Лекция 9.

Тема: Проверка значимости построенной модели.

После построения уравнения регрессии (2.3), наблюдаемые значения объясняемой переменной можно представить как:

$$y_i = \hat{y}_i + e_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

А так же можно вычислить выборочные дисперсии величин Y , $\hat{Y}$, e :

$$\text{var}(y) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 - \text{дисперсия наблюдаемых значений } Y;$$

$$\text{var}(\hat{y}) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 - \text{дисперсия расчетных значений } \hat{Y};$$

$$\text{var}(e) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (e_i - \bar{e})^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n e_i^2 - \text{дисперсия остатков.}$$

Далее вычисляются дисперсии коэффициентов a , b для того, чтобы в дальнейшем использовать их для проверки на значимость этих коэффициентов.

Остаточной дисперсией называется величина:

$$S^2 = \frac{n}{n-2} \cdot \text{Var}(e) = \frac{1}{n-2} \cdot \sum_{i=1}^n e_i^2 \quad (2.10)$$

В знаменателе остаточной дисперсии стоит число степеней свободы равное $(n - 2)$, а не n , так как две степени свободы теряются при определении значений двух коэффициентов (a, b) .

Дальше необходимо найти оценки дисперсий этих коэффициентов:

$$S_a^2 = \frac{S^2 \cdot \overline{(x^2)}}{n \cdot \text{var}(x)}, \quad (2.13)$$

$$S_b^2 = \frac{S^2}{n \cdot \text{var}(x)}. \quad (2.14)$$

Для проверки значимости коэффициентов a и b вычисляются статистики:

$$t_a = \frac{|a|}{S_a}, \quad t_b = \frac{|b|}{S_b}, \quad (2.15)$$

здесь S_a, S_b - стандартные ошибки коэффициентов регрессии т. е.

$$S_a = \sqrt{S_a^2}; \quad S_b = \sqrt{S_b^2}.$$

Статистики t_a и t_b подчиняются распределению Стьюдента с числом степеней свободы $\nu = n - 2$. Выдвигается гипотеза $H_0: a = 0$ и для заданного уровня значимости α (обычно $\alpha = 0,05$) и числа степеней свободы $\nu = n - 2$ из таблицы распределения критерия Стьюдента определяется критическое значение $t_{кр} = t(\alpha, \nu)$.

Если $t_a > t_{кр}$ гипотеза H_0 отвергается и коэффициент a признается значимо отличным от нуля.

Если $t_a < t_{кр}$ у нас нет оснований отвергать гипотезу H_0 т. е. в этом случае необходимо считать, что коэффициент a не значимо отличается от нуля.

Аналогично производится проверка на значимость и коэффициента b .

После проверки всех коэффициентов уравнения регрессии (2.3) на значимость и оставления в нем только значимых коэффициентов осуществляется переход к проверке качества самого уравнения, то есть к проверке его на адекватность.

Для проверки уравнения регрессии (2.3) на адекватность разброс наблюдаемых значений объясняемой переменной, характеризуемый выборочной дисперсией $var(y)$, представляется следующим образом:

$$var(y) = \overset{\wedge}{var}(y) + var(e). \quad (2.16)$$

Как видно из формулы (2.16) дисперсия $var(y)$ разложена на две составляющие: $\overset{\wedge}{var}(y)$ – часть, объясненную уравнением регрессии; $var(e)$ – часть, не объясненную уравнением регрессии.

Коэффициентом детерминации R^2 называется отношение:

$$R^2 = \frac{\overset{\wedge}{var}(y)}{var(y)}. \quad (2.17)$$

Из формулы (2.16) можно получить другое выражение для R^2 :

$$R^2 = 1 - \frac{\text{var}(e)}{\text{var}(y)}. \quad (2.18)$$

Коэффициент детерминации характеризует долю разброса выборочных значений зависимой переменной Y , объясненную с помощью уравнения регрессии (2.3). Отношение $\text{var}(e)/\text{var}(y)$ выражает собой не объясненную уравнением регрессии (2.3) долю разброса выборочных значений зависимой переменной Y .

Как следует из (2.17) и (2.18) $0 \leq R^2 \leq 1$. При $R^2 = 1$, построенное уравнение регрессии (2.3) точно описывает наблюдаемые в выборке значения Y т. е. $y_i = \hat{y}_i$; $i = \overline{1, n}$; так как $\text{var}(y) = \text{var}(\hat{y})$ и $\text{var}(e) = 0$.

При $R^2 = 0$, построенное уравнение регрессии (2.3) ничего не дает, так как $\text{var}(y) = \text{var}(e)$, $\text{var}(\hat{y}) = 0$, $y_i = \bar{y}$ $i = \overline{1, n}$; т. е. качество предсказания выборочных значений Y уравнением регрессии (2.3) ничуть не лучше чем у прямой $\hat{Y} = \bar{Y}$.

При $0 < R^2 < 1$, чем ближе значение R^2 к единице, тем лучше качество аппроксимации $\hat{y}$ наблюдаемых значений y .

Для определения статистической значимости коэффициента детерминации R^2 проверяется гипотеза $H_0: F = 0$ для F -статистики, рассчитываемой по формуле:

$$F = \frac{R^2 \cdot (n - 2)}{1 - R^2}. \quad (2.19)$$

Величина F имеет распределение Фишера – Снедекора с $k_1 = 1$, $k_2 = n - 2$ степенями свободы. Для заданного уровня значимости α (как правило, $\alpha = 0,05$) из таблицы распределения критерия Фишера – Снедекора определяется $F_{кр} = F(\alpha, k_1, k_2)$. Далее вычисленное по формуле (2.19) значение критерия F сравнивается с $F_{кр}$, определенным из таблицы (приложение 2):

если $F < F_{кр}$, то H_0 принимается, т.е. R^2 – незначим;
если $F > F_{кр}$, то H_0 отклоняется, т. е. R^2 – значим.

**Значения F -критерия Фишера – Снедекора при 5% - ном уровне
значимости**

$f_{\text{воспр}} = f_2$	$f_1 = f_{\text{ад}} = 1$	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	164.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	244.0	249.0	254.3
2	18.5	19.0	19.2	19.3	19.3	19.3	19.4	19.4	19.5
3	10.1	9.6	9.3	9.1	9.0	8.9	8.7	8.6	8.5
4	7.7	6.9	6.6	6.4	6.3	6.2	5.9	5.8	5.6
5	6.6	5.8	5.4	5.2	5.1	5.0	4.7	4.5	4.4
6	6.0	5.1	4.8	4.5	4.4	4.3	4.0	3.8	3.7
7	5.5	4.7	4.4	4.1	4.0	3.9	3.6	3.4	3.2
8	5.3	4.5	4.1	3.8	3.7	3.6	3.3	3.1	2.9
9	5.1	4.3	3.9	3.6	3.5	3.4	3.1	2.9	2.7
10	5.0	4.1	3.7	3.5	3.3	3.2	2.9	2.7	2.5
11	4.8	4.0	3.6	3.4	3.2	3.1	2.8	2.6	2.4
12	4.8	3.9	3.5	3.3	3.1	3.0	2.7	2.5	2.3
13	4.7	3.8	3.4	3.2	3.0	2.9	2.6	2.4	2.2
14	4.6	3.7	3.3	3.1	3.0	2.9	2.5	2.3	2.1
15	4.5	3.7	3.3	3.1	2.9	2.8	2.5	2.3	2.1
16	4.5	3.6	3.2	3.0	2.9	2.7	2.4	2.2	2.0
17	4.5	3.6	3.2	3.0	2.8	2.7	2.4	2.2	2.0
18	4.4	3.6	3.2	2.9	2.8	2.7	2.3	2.1	1.9
19	4.4	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.3	2.1	1.9
20	4.4	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.3	2.1	1.9
22	4.3	3.4	3.1	2.8	2.7	2.6	2.2	2.0	1.8
24	4.3	3.4	3.0	2.8	2.6	2.5	2.2	2.0	1.7
26	4.2	3.4	3.0	2.7	2.6	2.5	2.2	2.0	1.7
28	4.2	3.3	3.0	2.7	2.6	2.4	2.1	1.9	1.7
30	4.2	3.3	2.9	2.7	2.5	2.4	2.1	1.9	1.6
40	4.1	3.2	2.9	2.6	2.5	2.3	2.0	1.8	1.5
60	4.0	3.2	2.8	2.5	2.4	2.3	1.9	1.7	1.4
120	3.9	3.1	2.7	2.5	2.3	2.2	1.8	1.6	1.3
∞	3.8	3.0	2.6	2.4	2.2	2.1	1.8	1.5	1.0