

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
КАЗАНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А.Н.ТУПОЛЕВА-КАИ

И.Н. СИДОРОВ, В.М. БОРОДИН, В.А. КРЕНЕВ, А.И. ЭНСКАЯ

СТАТИКА, КИНЕМАТИКА, ДИНАМИКА

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим центром
КНИТУ-КАИ им. А.Н. Туполева

Казань 2016

УДК 591.36

Боро 62

Рецензенты:

докт. физ.-мат. наук, профессор Ю.П. Артюхин
(Казанский (Приволжский) федеральный университет);

кафедра теоретической механики
(Казанский государственный архитектурно-строительный
университет)

Сидоров И.Н., Бородин В.М., Кренев В.А., Энская А.И.

Боро 62 Статика, кинематика, динамика: Практические занятия по теоретической механике. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2016, 117с.

ISBN 987-5-7579-1591-3

Приводится методика решения задач по статике, кинематике и динамике курса теоретической механики.

Предназначено для студентов очного обучения всех специальностей КГТУ им. А.Н. Туполева, где изучается теоретическая механика (в основном для студентов института авиации, наземного транспорта и энергетики, а также факультета автоматики и электронного приборостроения). Может быть использовано студентами вечернего и заочного обучения, а также в филиалах КГТУ.

Ил. 74. Библиогр.: 3 назв.

УДК 591.36

© Изд-во Казан. гос. техн. ун-та. 2016.

© Сидоров И.Н., Бородин В.М.,

Кренев В.А., Энская А.И. 2016.

ISBN 978–5–7579–0223–X

Раздел I. СТАТИКА

1. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ (2 ЗАНЯТИЯ, 6 ЧАСОВ)

ЗАНЯТИЕ 1. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Одной из основных задач статики является задача на равновесие свободного твердого тела под действием приложенных к нему сил

Твердое тело, на движения которого не накладывается никаких ограничений, называется *свободным*. В противном случае – *несвободным*. На практике мы чаще встречаемся с несвободными телами.

Ограничения, накладываемые на движение твердого тела, называются связями. Связи, рассматриваемые в статике, обычно осуществляются при помощи твердых или гибких тел.

Все силы, действующие на несвободное твердое тело, можно разделить на активные (или заданные) силы и реакции связей.

Силы называются активными, если их действие на тело не зависит от наложенных на него связей. Например, сила тяжести тела является активной силой, поскольку не зависит от любых связей, ограничивающих его движение.

Реакциями связей называются силы, которыми связи действуют на тело, препятствуя тем или иным его перемещениям. Они отличаются от активных сил тем, что всегда зависят от этих сил и заранее неизвестны. Лишь для некоторых типов связей известны направления их реакций. Величины реакций связей находят из уравнений равновесия сил, действующих на рассматриваемое твердое тело.

Принцип освобожденности от связей. Любое несвободное движение твердого тела можно рассматривать как свободное, если действия связей заменить их реакциями.

Рассмотрим некоторые типичные виды связей, называемые простейшими, и укажем возможные направления их реакций. При определении направления реакции связи используется правило, по которому направление реакции связи противоположно тому, куда связь препятствует перемещаться телу.

1. Гладкая поверхность.

Реакция гладкой поверхности направлена по общей нормали к соприкасающимся поверхностям в точке их касания (рис.1.1,а). Если же одна

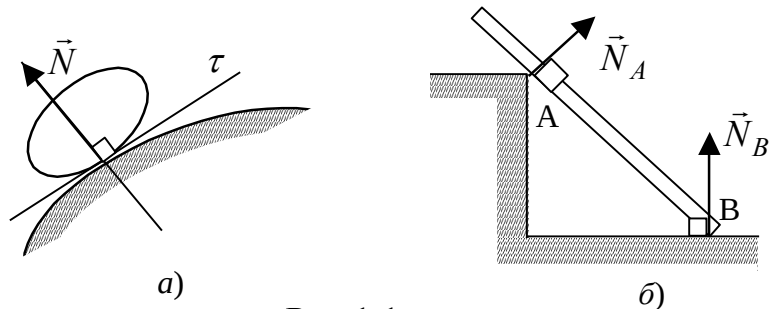


Рис.1.1.

из них вырождается в точку, то реакция направлена по нормали к другой поверхности (рис.1.1,б).

2. Сферический шарнир – это устройство, изображенное на рис.2.2,а, которое делает неподвижной точку O стержня AO . Направление реакции может быть любым и поэтому раскладывается на три неизвестные составляющие:

$$\vec{R}_O = X_O \vec{i} + Y_O \vec{j} + Z_O \vec{k}, \quad \text{здесь}$$

X_O, Y_O, Z_O могут принимать любые значения. Условное обозначение сферического шарнира показано на

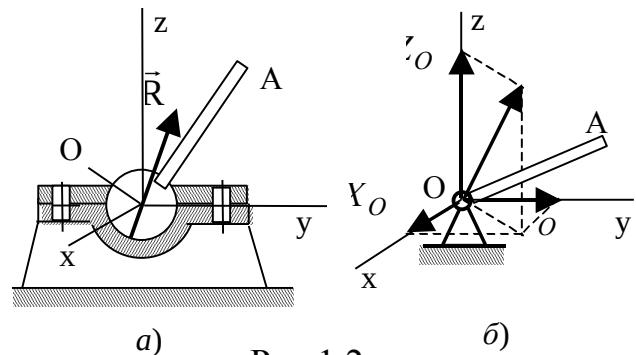


Рис.1.2.

3. Цилиндрическая шарнирно–неподвижная опора. Цилиндрический шарнир или подшипник позволяет соединенным с его помощью телам поворачиваться вокруг оси цилиндра и скользить вдоль этой оси. Конструктивно это соединение можно представить в виде цилиндриче-

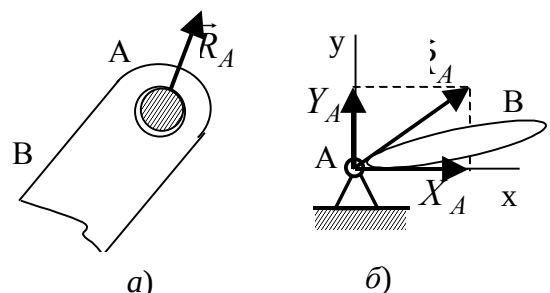
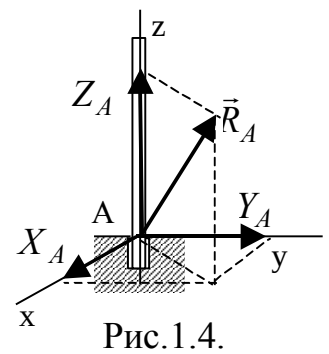


Рис.1.3.

ского стержня, вставленного в цилиндрическое отверстие тела AB (рис.1.3,а). Реакция цилиндрического шарнира направлена по нормали к поверхности отверстия. Следовательно, реакция цилиндрического шарнира проходит через ось шарнира и может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной к оси вращения шарнира. Поэтому ее можно представить в виде двух неизвестных составляющих: $\vec{R}_A = X_A \vec{i} + Y_A \vec{j}$, здесь X_A, Y_A могут принимать любые значения. Условное обозначение такой опоры показано на рис.4.3,б, оно такое же, как и для сферического шарнира, но из контекста задачи всегда ясно, какой это шарнир.

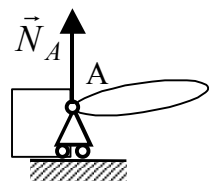
4. Подпятник. Это соединение цилиндрического шарнира с опорной плоскостью, препятствующей осевому перемещению тела. Реакция подпятника раскладывается на три составляющие (рис.1.4):

$\vec{R}_A = X_A \vec{i} + Y_A \vec{j} + Z_A \vec{k}$, но, в отличие от сферического шарнира составляющая реакции, направленная вдоль



оси шарнира может принимать только положительные значения или обращаться в нуль ($Z_A \geq 0$).

5. Цилиндрическая шарнирно-подвижная опора. Такая опора дает возможность телу поворачиваться вокруг нее, скользить в направлении оси шарнира и перемещаться по опорной поверхности. Препятствует перемещению по нормали к опорной поверхности, поэтому ее реакция $\vec{N}_A$ направлена по нормали к опорной поверхности плоскости катков (рис.1.5) и может принимать только положительное значение или обращаться в нуль ($N_A \geq 0$).



6. Жесткий невесомый стержень. Концы стержня имеют шарниры, допускающие свободу вращения

(рис.1.6,а). Рассмотрим изогнутый стержень CD . Поскольку

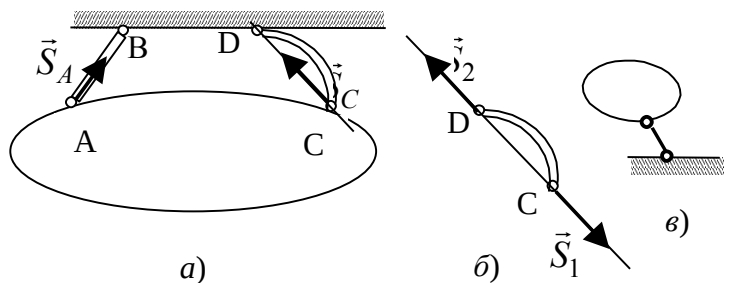


Рис.4.6.

стержень невесомый, то он находится в равновесии под действием лишь двух сил $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ (рис.1.6,б). В соответствии с аксиомой 1 силы $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ противоравны, следовательно, они должны быть направлены по прямой, соединяющей концы стержня. Согласно аксиоме 4 противодействие направлено вдоль той же прямой: $\vec{S}_C = -\vec{S}_1$. Таким образом, реакция жесткого невесомого стержня направлена по прямой, соединяющей его концы. Стержень может испытывать деформации растяжения или сжатия, поэтому величина его реакции может принимать произвольное значение. Если реакцию стержня направить от места крепления стержня к телу в сторону привеса, то при ее положительном значении стержень будет испытывать деформацию растяжения, а при отрицательном значении – деформацию сжатия. Условное обозначение такой связи показано на рис.1.6,в.

7. Гибкая невесомая нерастяжимая нить (трос, канат, цепь и т.п.). В отличие от жесткого невесомого стержня, нить может испытывать только деформацию растяжения, следовательно, ее реакция направлена вдоль нити внутрь нее (рис.1.7). Значение реакции нити может быть только положительным или равным нулю ($T_A \geq 0, T_B \geq 0$).

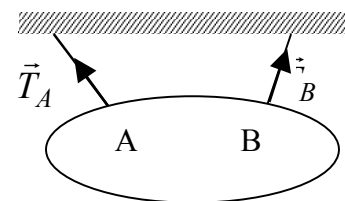


Рис.1.7.

Решение задач на равновесие твердого тела, независимо типа системы действующих сил, рекомендуется проводить в следующем порядке:

- Выделить твердое тело, равновесие которого надо рассмотреть для отыскания неизвестных величин.
- Изобразить активные силы.
- Если твердое тело несвободно, то, согласно принципу освобожденности от связей, следует отбросить связи и заменить их действие соответствующими реакциями
- Выяснить, какая система сил действует на тело, сколько можно составить уравнений равновесия, сколько неизвестных величин. Если число

неизвестных равно числу уравнений, то задача является статически определимой. Если число неизвестных больше числа уравнений равновесия, то задача либо статически неопределима, либо требуется рассмотреть дополнительно равновесие других тел, взаимодействующих с рассматриваемым.

- В зависимости от типа системы составить уравнения равновесия.
- Найти из составленных уравнений неизвестные величины.

Этот порядок является общим при решении любых задач на равновесие твердого тела.

Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на любые две координатные оси и сумма моментов всех сил относительно произвольной точки равнялись нулю:

$$\sum_{s=1}^n X_s = 0, \quad \sum_{s=1}^n Y_s = 0, \quad \sum_{s=1}^n m_O(\vec{F}_s) = 0 \quad (1.1)$$

Проекция силы $\vec{F}$ на какую-то ось равна произведению модуля силы $\vec{F}$ на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси: $F_x = F \cos \alpha$ (рис.1.8).

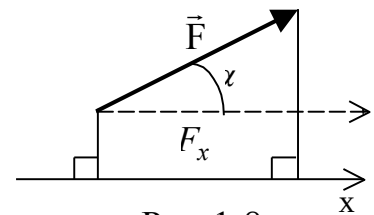


Рис.1.8.

Для плоской системы сил моментом силы $\vec{F}$ относительно точки O , принадлежащей плоскости действия сил, называется алгебраическая величина, равная взятому со знаком плюс или минус произведению модуля силы $\vec{F}$ на плечо h (плечом называется длина перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы):

$m_O(\vec{F}) = \pm F h$. Момент силы считается положительным (принимается знак плюс), если сила стремится повернуть тело вокруг выбранной точки против хода часовой стрелки, и отрицательным (принимается знак минус), если по ходу часовой стрелки. Напри-

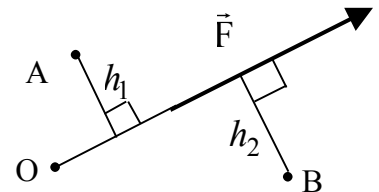


Рис.1.9.

мер, на рис.1.9 $m_A(\vec{F}) = +Fh_1$, $m_B(\vec{F}) = -Fh_2$, $m_O(\vec{F}) = 0$.

Система двух равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил $\vec{F}$ и $-\vec{F}$ (рис.1.10) называется парой сил. Действие пары сил на тело характеризуется ее моментом. Для плоской системы сил под мо-

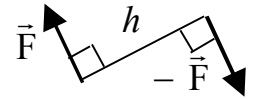


Рис.1.10.

мент пары считается алгебраической величиной, равной произведению модуля силы пары на ее плечо (плечом пары называется кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары) и взятое со знаком плюс или минус. Момент пары считается положительным (принимается знак плюс), если она стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, и отрицательным (принимается знак минус), если по ходу часовой стрелки (на рис.1.10 момент пары отрицательный).

В инженерных расчетах часто приходится сталкиваться с силами, действующими на все точки данной части поверхности тела. Такие силы называются *распределенными* и характеризуются *интенсивностью*, т.е. величиной силы, приходящейся на единицу поверхности. Плоская система распределенных сил характеризуется *интенсивностью* q – величиной силы приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка, она измеряется в Н/м. В общем случае, когда силы распределены вдоль отрезка прямой таким образом, что их интенсивность является некоторой функцией $q = q(x)$ ($0 \leq x \leq l$) (рис.1.11,а) их можно заменить равнодействующей $\vec{Q}$, величина которой и линия действия определяются выражениями

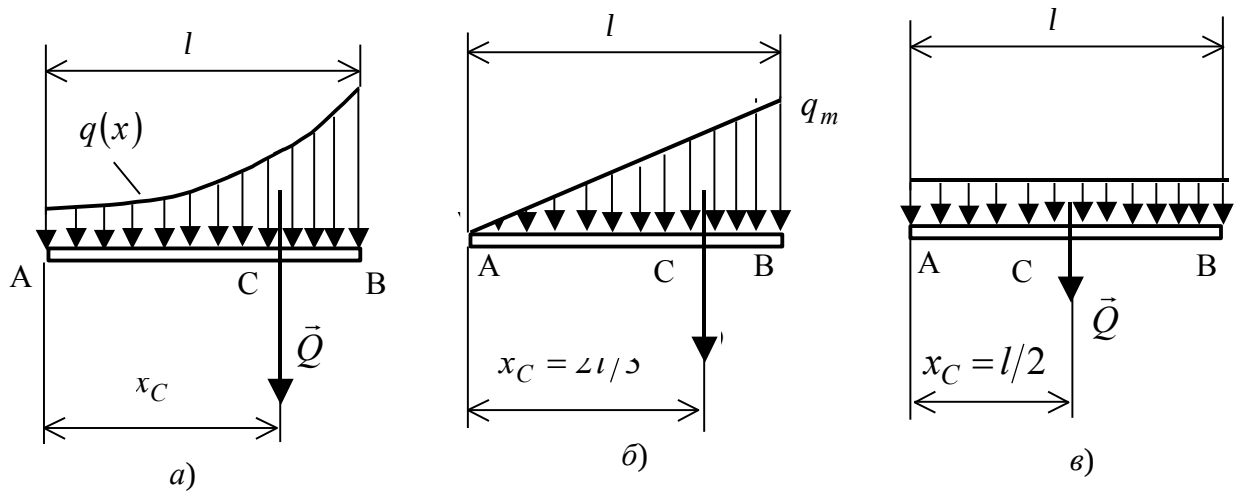


Рис.1.11.

$$Q = \int_0^l q(x) dx, \quad x_C = \frac{1}{Q} \int_0^l x q(x) dx. \quad (1.2)$$

В частных случаях, когда сила распределена по линейному закону (рис.1.11,б) из (1.2) получим

$$Q = q_m l/2, \quad x_C = 2l/3. \quad (1.3)$$

Если $q = \text{const}$, то нагрузка называется равномерно распределенной (рис.1.11,в) и из (1.2) получим

$$Q = ql, \quad x_C = l/2. \quad (1.4)$$

В технике встречается такой тип закрепления балок, как *неподвижная защемленная балка* или *жесткая заделка* (рис.1.12). В этом случае на заделанный конец балки действует система распределенных сил реакций, которые можно заменить неизвестной силой $\vec{R}_A = X_A \vec{i} + Y_A \vec{j}$ и парой сил с неизвестным моментом m_A .

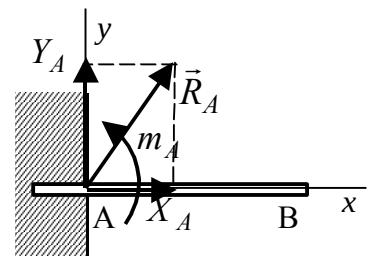


Рис.1.12.

Перейдем к решению задач.

Задача 4.10 (И.В.Мещерский)

Однородный стержень AB веса 100 Н опирается одним концом на гладкий горизонтальный пол, другим – на гладкую плоскость, наклоненную под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. У конца B стержень поддерживается веревкой BC , перекинутой через блок C и несущей груз P ; часть веревки BC параллельна наклонной плоскости. Пренебрегая трением на блоке, определить вес груза P и давление на пол и наклонную плоскость (рис.1.13).

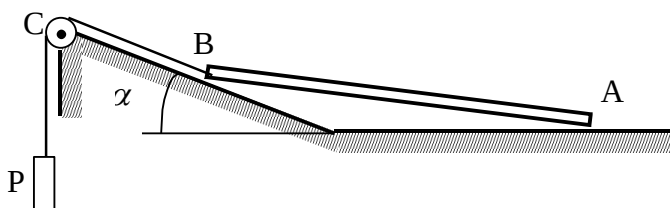


Рис.1.13.

Решение.

1. Будем рассматривать равновесие стержня AB .
2. На стержень действует одна активная сила $\vec{Q}$ – сила тяжести стержня, равная по величине его весу и приложенная в середине стержня (рис.1.14).
3. Заменим действия связей (пол, наклонная плоскость и веревка) их реакциями (рис.1.14).
4. Стержень AB находится под действием плоской системы сил, для которой можно записать три уравнения равновесия. Незвестны только величины трех

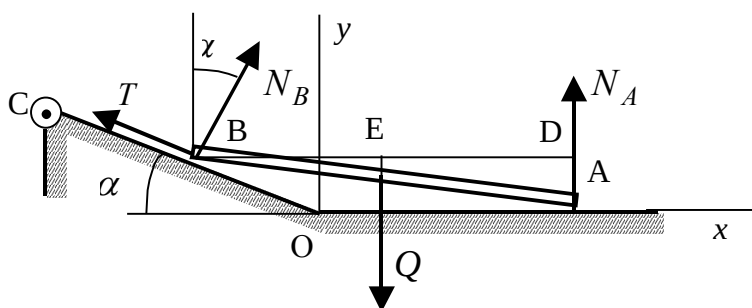


Рис.1.14.

сил этой системы, следовательно, задача является статически определимой

5. Составим уравнения равновесия (1.1). Выберем направление осей декартовой системы координат (рис.1.14). Уравнение моментов будем составлять относительно точки B , так как через нее проходят линии действия двух неизвестных по величине сил.

$$\begin{aligned}\sum_s X_s &= -T \cos \alpha + N_B \sin \alpha = 0; \\ \sum_s Y_s &= T \sin \alpha + N_B \cos \alpha - Q + N_A = 0; \\ \sum_s m_B(\vec{F}_s) &= -Q \cdot BE + N_A \cdot BD = 0.\end{aligned}$$

6. Найдем неизвестные величины. Из уравнения моментов находим

$$N_A = Q \frac{BE}{BD} = \frac{Q}{2}.$$

($BE = BD/2$, так как CE является средней линией треугольника ABD). Решая совместно первые два уравнения, находим

$$N_B = \frac{Q}{2} \cos \alpha; \quad T = \frac{Q}{2} \sin \alpha.$$

Поскольку трение на блоке C не учитывается, то вес груза P численно равен реакции веревки T . Подставив числовые данные, получим

$$N_A = 50 \text{ Н}; \quad N_B = 43,3 \text{ Н}; \quad P = T = 25 \text{ Н}.$$

Здесь $\vec{N}_A$ и $\vec{N}_B$ – реакции пола и наклонной плоскости, действующие на стержень AB . Силы давления на пол и наклонную плоскость равны этим реакциям по величине, но действуют в противоположных им направлениях.

Задача 4.28 (И.В.Мещерский)

Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рис.1.15 и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенной силы и пары сил:

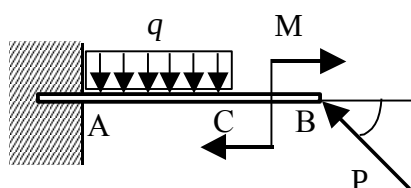


Рис.1.15.

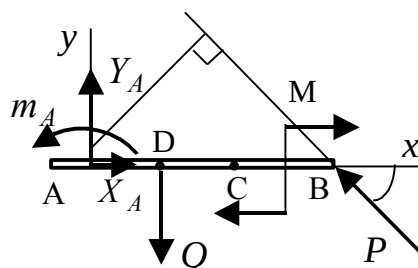


Рис.1.16.

$$q = 1,5 \text{ кН/м}, \quad P = 4 \text{ кН}, \quad M = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad AC = 3 \text{ м}, \quad BC = 2 \text{ м}, \quad \alpha = 45^\circ.$$

Решение.

1. Будем рассматривать равновесие балки AB .
2. Изобразим активные силы, действующие на балку AB : силу $\vec{P}$, пару сил с моментом M ; равномерно распределенную нагрузку заменим равнодействующей $\vec{Q}$, равной по величине $Q = q \cdot AC = 4,5 \text{ кН}$ и приложенной в середине отрезка AC (рис.1.16).
3. Заменим действие связи «жесткая заделка» ее реакциями X_A, Y_A, m_A (рис.1.16).
4. Балка AB находится под действием плоской системы сил, для которой можно записать три уравнения равновесия. Неизвестны три величины: X_A, Y_A, m_A , следовательно, задача является статически определимой.
5. Составим уравнения равновесия. Выберем направление осей декартовой системы координат (рис.1.16). Уравнение моментов будем составлять относительно точки A

$$\sum_s X_s = X_A - P \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_s Y_s = Y_A - Q + P \sin \alpha = 0;$$

$$\sum_s m_A(\vec{F}_s) = m_A - Q \cdot \frac{AC}{2} + P \cdot AB \cdot \sin \alpha - M = 0.$$

6. Решая систему составленных уравнений, находим:

$$X_A = P \cos \alpha, \quad Y_A = Q - P \sin \alpha, \quad m_A = Q \cdot \frac{AC}{2} - P \cdot AB \cdot \sin \alpha + M.$$

Подставив числовые данные, получим

$$X_A = 2,8 \text{ кН}, \quad Y_A = 1,7 \text{ кН}, \quad m_A = -5,39 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Знак минус показывает, что направление момента пары в заделке не совпадает с предполагаемым, т.е. на самом деле момент пары жесткой заделки направлен по ходу часовой стрелки.

Рекомендуем дома решить следующие задачи: 4.26; 4.27; 4.29; 4.30; 4.31 (И.В.Мещерский).

ЗАНЯТИЕ 2. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Метод решения задач статики при наличии трения остается таким же, как и при его отсутствии, но только уравнения равновесия дополняются неравенствами для сил трения скольжения и моментов трения качения

$$0 \leq F_{TP} \leq F_{TP}^{\max}, \quad F_{TP}^{\max} = f N, \quad (2.1)$$

$$0 \leq M_{TP} \leq M_{TP}^{\max}, \quad M_{TP}^{\max} = \delta N, \quad (2.2)$$

здесь f и δ – коэффициенты трения скольжения и трения качения соответственно, N – нормальная реакция.

Сила трения скольжения препятствует скольжению одного тела по поверхности другого, лежит в плоскости, касательной к обеим соприкасающимся поверхностям, и направлена в сторону, противоположную возможному скольжению.

Момент трения качения препятствует качению одного тела по поверхности другого, т.е. направлен в сторону, противоположную возможному качению.

Таким образом, при наличии трения условия равновесия содержат и неравенства. Однако большинство задач сводится к рассмотрению предельного

положения равновесия, когда силы трения скольжения или моменты трения качения достигают своего наибольшего значения.

Перейдем к решению задач.

Задача 5.31 (И.В.Мещерский)

Однородный брус опирается в точке А на негладкий горизонтальный пол и удерживается в точке В веревкой (рис.2.1). Коэффициент трения бруса о пол равен f . Угол α , образуемый с полом. Равен 45° . При каком угле φ наклона веревки к горизонту брус начнет скользить?

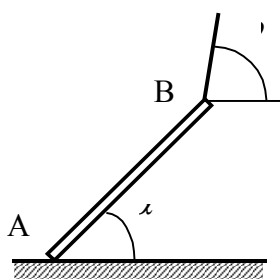


Рис.2.1.

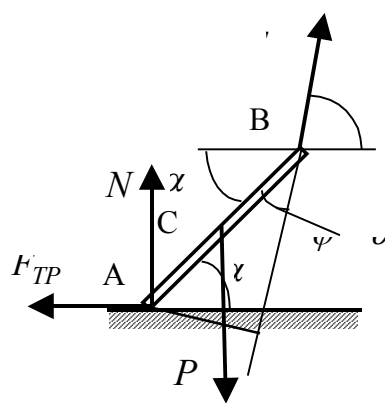


Рис.2.2.

Решение.

1. Будем рассматривать условия предельного равновесия бруса AB , при этом сила трения достигает своего максимального значения.
2. На брус действует одна активная сила $\vec{P}$ – сила тяжести, приложенная в середине бруса и равная по величине его весу (рис.2.2).
3. Укажем реакции связей. Реакция веревки $\vec{T}$ направлена по этой веревке. Реакция пола может быть представлена в виде двух сил: нормальной реакцией $\vec{N}$ и силой трения $\vec{F}_{TP}$ (рис.2.2).
4. Брус AB находится под действием плоской системы сил, для которой можно записать три уравнения равновесия. Неизвестны четыре величины: N , F_{TP} , T , φ . Уравнения равновесия дополняем неравенством (2.1). Задача является статически определимой.

5. Составим уравнения равновесия. Выберем направление осей декартовой системы координат (рис.2.2). Уравнение моментов будем составлять относительно точки A

$$\begin{aligned}\sum_s X_s &= -F_{TP} + T \cos \varphi = 0; \\ \sum_s Y_s &= N - P + T \sin \varphi = 0; \\ \sum_s m_A(\vec{F}_s) &= -P \cdot \frac{AB}{2} \cos \alpha + T \cdot AB \cdot \sin(\varphi - \alpha) = 0, \\ F_{TP} &= F_{TP}^{\max} = f N.\end{aligned}$$

6. Решаем систему составленных уравнений. Из уравнений моментов находим

$$T = P \frac{\cos \alpha}{2 \sin(\varphi - \alpha)},$$

тогда из второго уравнения найдем

$$N = P - T \sin \varphi = P \left(1 - \frac{\cos \alpha \sin \varphi}{2 \sin(\varphi - \alpha)} \right).$$

Из первого уравнения находим

$$F_{TP} = T \cos \varphi = P \frac{\cos \alpha \cos \varphi}{2 \sin(\varphi - \alpha)}.$$

После подстановки найденных значений N и F_{TP} в четвертое уравнение получим

$$P \frac{\cos \alpha \cos \varphi}{2 \sin(\varphi - \alpha)} = f P \left(1 - \frac{\cos \alpha \sin \varphi}{2 \sin(\varphi - \alpha)} \right),$$

и учитывая, что $\alpha = 45^\circ$ ($\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$), после алгебраических преобразований последнего уравнения получим

$$\cos \varphi = f(\sin \varphi - 2 \cos \varphi).$$

Учитывая, что $\varphi \neq 90^\circ$, отсюда находим

$$\operatorname{tg} \varphi = 2 + \frac{1}{f}.$$

Задача 5.39 (И.В.Мещерский)

Определить силу $\vec{P}$, необходимую для равномерного качения цилиндрического катка диаметра 60 см и веса 300 Н по горизонтальной плоскости, если коэффициент трения качения $\delta = 0,5$ см, а угол, составляемый силой $\vec{P}$ с горизонтальной плоскостью, равен $\alpha = 30^\circ$ (рис.2.3).

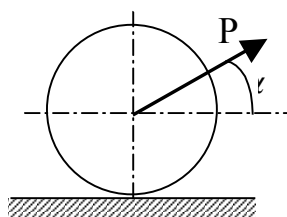


Рис.2.3.

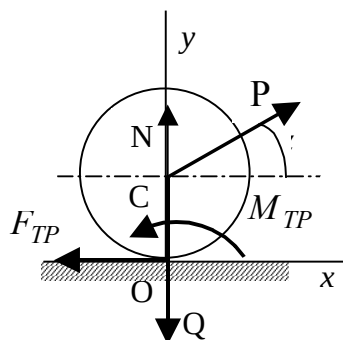


Рис.2.4.

Решение.

1. Для определения условий равномерного качения катка будем рассматривать условия такого его предельного равновесия, когда $0 \leq F_{TP} < F_{TP}^{\max} = f N$, $M_{TP} = M_{TP}^{\max} = \delta N$.
2. На каток действуют активные силы $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ – сила тяжести катка, приложенная в точке C и равная по величине его весу (рис.2.4).
3. Укажем реакции связей. Со стороны горизонтальной плоскости на каток действуют $\vec{N}$, $\vec{F}_{TP}$ и M_{TP} (рис.2.4).
4. Каток находится под действием плоской системы сил, для которой можно записать три уравнения равновесия. Неизвестны пять величин: N , F_{TP} , M_{TP} , P , f . Уравнения равновесия дополняем неравенством для силы трения скольжения и равенством для момента трения качения. Задача является статически определимой.
5. Составим уравнения равновесия. Выберем направление осей декартовой системы координат (рис.2.4). Уравнение моментов будем составлять относительно точки O

$$\begin{aligned}\sum_s X_s &= -F_{TP} + P \cos \alpha = 0; \\ \sum_s Y_s &= N - Q + P \sin \alpha = 0; \\ \sum_s m_O(\vec{F}_s) &= -P \cdot \frac{d}{2} \cos \alpha + M_{TP} = 0, \quad OC = \frac{d}{2}, \\ 0 &\leq F_{TP} < f N, \\ M_{TP} &= \delta N.\end{aligned}$$

6. Решаем систему составленных уравнений. Находим

$$F_{TP} = P \cos \alpha, \quad N = Q - P \sin \alpha, \quad M_{TP} = P \cdot \frac{d}{2} \cos \alpha.$$

Подставив эти значения в последние два неравенства, получим

$$P < \frac{f Q}{\cos \alpha + f \sin \alpha}, \quad P = \frac{2 \delta Q}{d \cos \alpha + 2 \delta \sin \alpha}.$$

Следовательно, при равномерном качении катка должно выполняться неравенство

$$\frac{f}{\cos \alpha + f \sin \alpha} > \frac{2 \delta}{d \cos \alpha + 2 \delta \sin \alpha},$$

а оно будет выполняться при условии

$$f > \frac{2 \delta}{d}.$$

Таким образом, для равномерного качения катка необходимо, чтобы

$$f > \frac{2 \delta}{d} \text{ или } f > \lambda \quad \text{и} \quad P = \frac{2 \delta Q}{d \cos \alpha + 2 \delta \sin \alpha}.$$

Здесь $\lambda = 2 \delta / d = \delta / r$ – безразмерный коэффициент трения качения. Для большинства тел $f > \lambda$. Подставив числовые значения, получим $P = 5,72$ Н.

Рекомендуем дома решить следующие задачи: 5.28; 5.29; 5.30; 5.32; 5.38; (И.В.Мещерский).

ЗАНЯТИЕ 3. Самостоятельная работа

Студенты самостоятельно решают задачи 4.7; 4.8; 4.11; 5.36; 5.40 (И.В.Мещерский) под руководством преподавателя.

2. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ (2 ЗАНЯТИЯ, 4 ЧАСА)

ЗАНЯТИЕ 4. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ

Основным способом решения задач на равновесие системы твердых тел является расчленение: систему тел сразу расчленяют на отдельные тела, действие связей заменяют их реакциями и составляют уравнения равновесия для каждого из тел в отдельности. При этом учитывают, что реакции связей, соединяющих тела в систему, попарно равны по модулю и противоположны по направлению.

Приступим к решению задач.

Задача 4.53 (И.В.Мещерский)

Однородный стержень AB длины $2l$ и веса P может вращаться вокруг горизонтальной оси на конце A стержня. Он опирается на однородный стержень CD той же длины $2l$, который может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину E . Точки A и E лежат на одной вертикали на расстоянии $AE=l$. К концу D подвешен груз $Q=2P$. Определить угол φ , образуемый стержнем AB с вертикалью в положении равновесия, пренебрегая трением (рис.4.1).

Решение.

1. Будем рассматривать равновесие стержней AB и CD отдельно.
2. На стержень AB действует одна активная сила $\vec{P}$, равная по величине его весу и приложенная в середине стержня AB (рис.4.2,а). На стержень CD дейст-

вуют активные силы $\vec{Q}$ и $\vec{G}$, причем сила $\vec{G}$ равна по величине весу стержня CD и приложена в его середине – точке E (рис.4.2,б).

3. Заменим действие связей их реакциями. На стержень AB действуют реакции $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}_C$ (рис.4.2,а). На стержень CD действуют реакции $\vec{X}_E, \vec{Y}_E, \vec{N}'_C$,

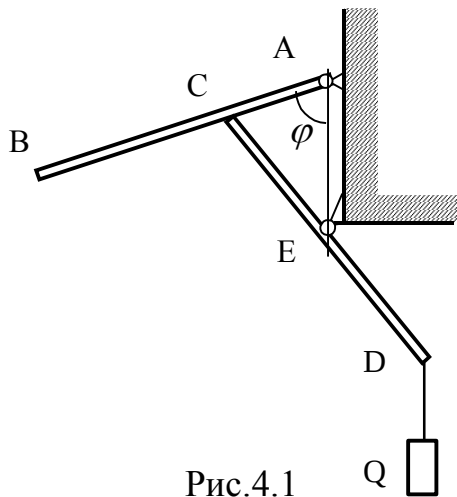


Рис.4.1

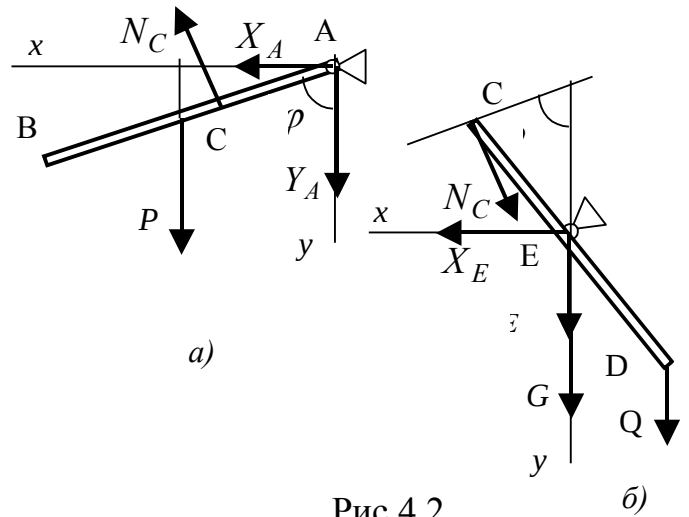


Рис.4.2

причем $\vec{N}'_C = -\vec{N}_C$, обозначим их модули N_C (рис.4.2,б).

4. На стержни действуют плоские системы сил. Можно записать шесть уравнений равновесия. Незвестных величин тоже шесть: $X_A, Y_A, N_C, X_E, Y_E, \varphi$. Задача статически определима.
5. Выберем направление осей декартовых координат, и составим уравнения равновесия

$$\sum_s X_s = X_A + N_C \cos \varphi = 0, \quad (4.1)$$

$$\sum_s Y_s = Y_A - N_C \sin \varphi + P = 0, \quad (4.2)$$

$$\sum_s m_A(\vec{F}_s) = -N_C \cdot AC + P \frac{AB}{2} \sin \varphi = 0, \quad AC = 2l \cos \varphi, \quad (4.3)$$

$$\sum_s X_s = X_E - N_C \cos \varphi = 0, \quad (4.4)$$

$$\sum_s Y_s = Y_E + N_C \sin \varphi + G + Q = 0, \quad (4.5)$$

$$\sum_s m_E(\vec{F}_s) = N_C \cdot CE \cdot \cos \varphi - Q \cdot DE \sin(180^\circ - 2\varphi) = 0, \quad CE = DE = l. \quad (4.6)$$

6. Решим систему составленных уравнений. Из уравнений (4.3) и (4.6), учитывая, что $AB=2l$, находим

$$N_C = \frac{P \sin \varphi}{2 \cos \varphi} \quad \text{и} \quad N_C = 2Q \sin \varphi.$$

Отсюда находим два решения

$$1) \sin \varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0;$$

$$2) \cos \varphi = \frac{P}{4Q} \rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{P}{4Q}\right).$$

Подставив исходные данные, вычислим второе решение

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{8}\right) = 82^\circ 50'.$$

Из остальных уравнений можно найти величины реакций. В данной задаче это не требуется.

Рекомендуем дома решить следующие задачи 4.26; 4.27; 4.28 (И.В.Мещерский)

ЗАНЯТИЕ 5. Самостоятельная работа

Студенты самостоятельно решают задачи 4.29; 4.30; 4.31 (И.В.Мещерский) под руководством преподавателя.

3. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ (2 занятия, 4 часа)

ЗАНЯТИЕ 6. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Для равновесия тела под действием произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на три

координатные оси и суммы моментов всех сил относительно этих осей были равны нулю:

$$\sum_{s=1}^n X_s = 0, \quad \sum_{s=1}^n Y_s = 0, \quad \sum_{s=1}^n Z_s = 0,$$

$$\sum_{s=1}^n m_x(\vec{F}_s) = 0, \quad \sum_{s=1}^n m_y(\vec{F}_s) = 0, \quad \sum_{s=1}^n m_z(\vec{F}_s) = 0.$$

Моментом силы $\vec{F}$ относительно оси l называется скалярная величина, равная произведению модуля проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, на плечо, и взятая со знаком плюс или минус. Знак плюс выбирается тогда, когда с положительного конца оси виден возможный поворот тела вокруг оси под действием силы против хода часовой стрелки, и знак минус – если по ходу часовой стрелки.

Будем обозначать этот момент $m_l(\vec{F})$, тогда

$$m_l(\vec{F}) = \pm F' h,$$

Можно сформулировать следующее правило для вычисления момента силы относительно оси:

- 1) провести плоскость, перпендикулярную оси (лучше через точку приложения силы);
- 2) спроектировать силу на эту плоскость и определить модуль проекции силы:

$$F' = F \cos \alpha;$$

- 3) определить плечо силы относительно оси h ;
- 4) вычислить модуль момента силы относительно оси:

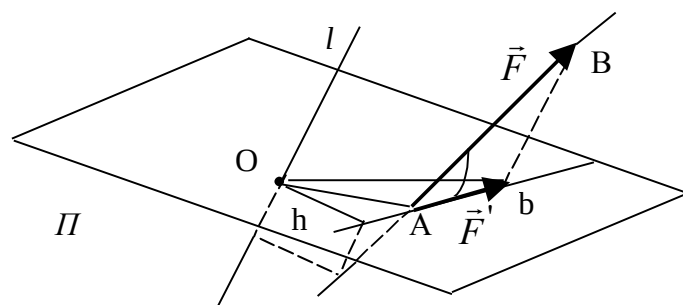


Рис.6.1.

$$|m_l(\vec{F})| = hF';$$

- 5) выбрать знак момента в соответствии с правилом его определения:

$$m_l(\vec{F}) = +F'h \text{ (знак выбран для случая, изображенного на рис.6.1).}$$

Приступим к решению задач.

Задача 8.29 (И.В.Мещерский)

Прямоугольная дверь, имеющая вертикальную ось вращения AB , открыта на угол $\alpha = 60^\circ$ и удерживается в этом положении двумя веревками, из которых одна, CD , перекинута через блок и натягивается грузом $P = 320$ Н, другая, EF , привязана к точке F пола. Вес двери 640 Н; ее ширина $AC = AD = 1,8$ м; высота $AB = 2,4$ м. Пренебрегая трением на блоке, определить натяжение веревки EF , а также реакции цилиндрического шарнира в точке A и подпятника в точке B (рис.6.2).

Решение.

1. Будем рассматривать равновесие двери.
2. на дверь действует активная сила $\vec{Q}$ – сила тяжести, приложенная в центре тяжести двери (на пересечении диагоналей) и равная по величине ее весу (рис.6.3).
3. Укажем реакции связей. Реакция веревки CD направлена по веревке от точки C к точке D и равна по величине весу груза: $T_C = P$, так как блок меняет направление, но не величину натяжения веревки. Реакция $\vec{T}_E$ веревки EF на-

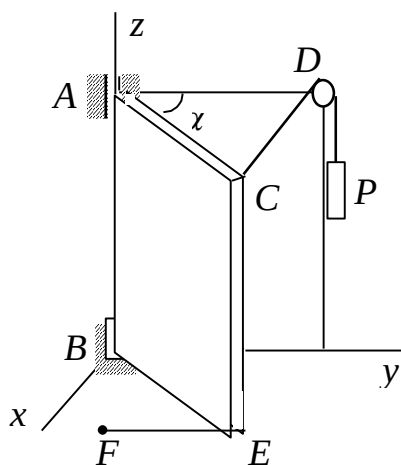


Рис.6.2.

$$\begin{aligned} AC = AD &= a \\ AB = CE &= b \end{aligned}$$

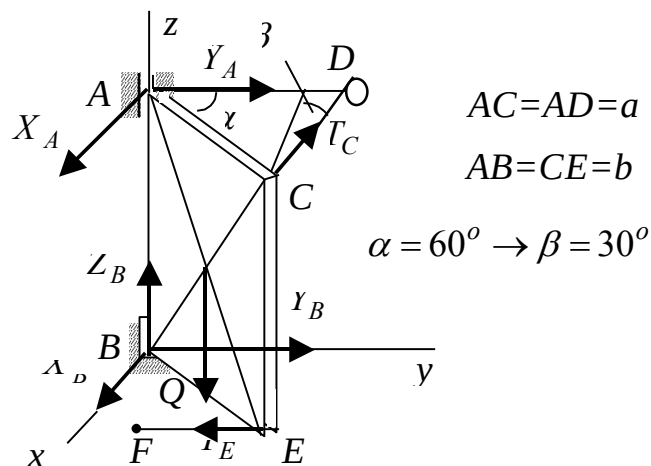


Рис.6.3.

правлена по этой веревке. Реакцию подпятника в точке B разложим на составляющие $\vec{R}_B = X_B \vec{i} + Y_B \vec{j} + Z_B \vec{k}$. Реакцию цилиндрического шарнира в точке A разложим на составляющие $\vec{R}_A = X_A \vec{i} + Y_A \vec{j}$ (рис.6.3).

4. Дверь находится под действием произвольной пространственной системы сил. Число уравнений равновесия – шесть. Незвестных величин – шесть: $X_A, Y_A, X_B, Y_B, Z_B, T_E$. Задача статически определима.
5. Составим уравнения равновесия. Направление осей декартовых координат выбрано, как показано на рис.6.3.

$$\sum_s X_s = X_A + X_B - T_C \cos \beta = 0, \quad (6.1)$$

$$\sum_s Y_s = Y_A + Y_B - T_E - T_C \sin \beta = 0, \quad (6.2)$$

$$\sum_s Z_s = Z_B - Q = 0, \quad (6.3)$$

$$\sum_s m_x(\vec{F}_s) = -Y_A b - Q \frac{a}{2} \cos \alpha - T_C b \sin \beta = 0, \quad (6.4)$$

$$\sum_s m_y(\vec{F}_s) = X_A b + Q \frac{a}{2} \sin \alpha - T_C b \cos \beta = 0, \quad (6.5)$$

$$\sum_s m_z(\vec{F}_s) = -T_E a \sin \alpha + T_C a \sin \alpha = 0. \quad (6.6)$$

6. Решим систему составленных уравнений равновесия. Из уравнения (6.6) с учетом того, что $\alpha = 60^\circ$, находим

$$T_E = T_C.$$

Из уравнений (6.4) и (6.5) находим

$$Y_A = -\left(Q \frac{a}{2b} \cos \alpha + T_C \sin \beta\right), \quad X_A = -Q \frac{a}{2b} \sin \alpha + T_C \cos \beta.$$

Из уравнений (6.1) – (6.3) находим

$$X_B = Q \frac{a}{2b} \sin \alpha, \quad Y_B = T_C + Q \frac{a}{2b} \cos \alpha, \quad Z_B = Q.$$

Подставив числовые данные, получим

$$T_E = 320\text{Н}, \quad X_A = 69\text{Н}, \quad Y_A = 280\text{Н}, \quad X_B = 208\text{Н}, \quad Y_B = 440\text{Н}, \quad Z_B = 649\text{Н}.$$

Рекомендуем решить дома следующие задачи: 8.16; 8.18; 8.19; 8.20 (И.В.Мещерский).

ЗАНЯТИЕ 7. Самостоятельная работа

Студенты самостоятельно решают задачи 8.21; 8.24; 8.25 (И.В.Мещерский) под руководством преподавателя. Подведение итогов.

Раздел II. КИНЕМАТИКА

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ, ТРАЕКТОРИЯ, СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ (2 ЗАНЯТИЯ, 4 ЧАСА)

ЗАНЯТИЕ 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ТРАЕКТОРИЯ ТОЧКИ.

Непрерывная кривая, которую описывает точка при своем движении, называется траекторией. При решении задач небесной механики, траекторию называют орбитой. Если траектория точки является прямой линией, то движение этой точки называется прямолинейным, а если траектория кривая линия, то - криволинейным.

При решении различных задач кинематики точки используются два способа задания её движения: координатный и естественный. Суть задания движения точки M координатным способом

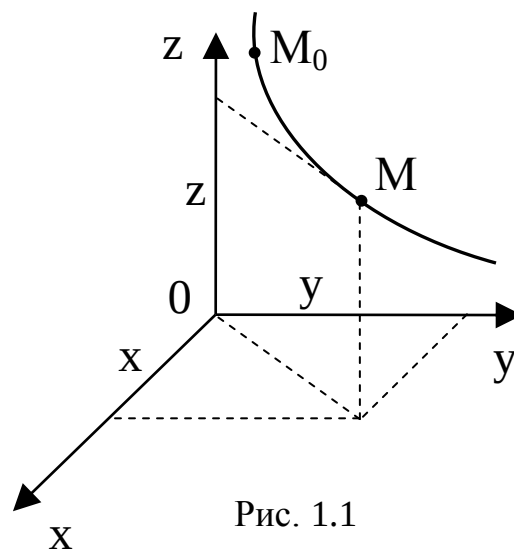


Рис. 1.1

(например в декартовых координатах) состоит в задании трёх однозначных, непрерывных и дважды дифференцируемых по времени скалярных функций (координат движущейся точки M) (рис. 1.1)

$$x = x(t),$$

$$y = y(t), \quad (1.1)$$

$$z = z(t).$$

Функции (1.1) в механике называют уравнениями или законом движения точки.

Математически, функции (1.1) могут рассматриваться как параметрические уравнения кривой, на которой лежит траектория точки. В них роль параметра играет время t . Если исключить из них, каким – либо способом, время t , то можно получить уравнение нужной кривой в координатной форме.

Естественный способ задания движения точки используется, как правило, в тех задачах механики, в которых кривая, на которой лежит траектория точки, заранее известна (часто материальна) (рис. 1.2). Для задания движения точки M естественным способом необходимо выполнить следующие требования:

1⁰. задать кривую, на которой лежит траектория точки,

2⁰. выбрать опорную точку O (начало отсчета),

3⁰. договориться об ориентации (в какую сторону от начала отсчета дуги кривой положительны, а в какую отрицательны),

4⁰. задать дуговую координату σ в виде однозначной, непрерывной и дважды дифференцируемой функции времени

$$\sigma = \sigma(t). \quad (1.2)$$

Функцию (1.2) называют уравнением, или законом движения точки M по траектории.

Рассмотрим конкретные примеры.

Задача 10.6 (И. В. Мещерский).

Движение точки, описывающей фигуру Лиссажу, задается уравнением $x = 3\sin t$, $y = 2\cos 2t$ (t - время в секундах). Найти уравнение траектории, вычертить её и указать направление движения точки в различные моменты времени.

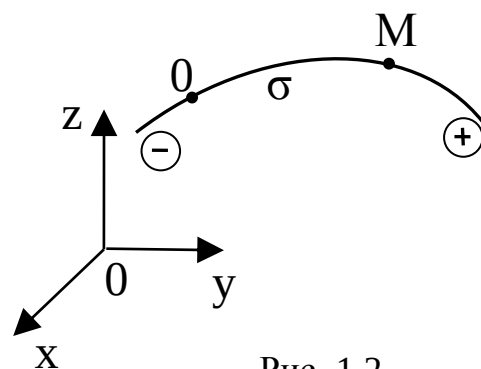


Рис. 1.2

Указать также ближайший после начала движения момент времени t_1 , когда траектория пересечет ось Ox .

Решение.

Для нахождения уравнения кривой, на которой лежит траектория точки, исключим из уравнений движения параметр t . Для этого преобразуем второе уравнение:

$$y = 2 \cos t = 2(\cos^2 t - \sin^2 t) = 2(1 - \sin^2 t). \quad (1.3)$$

Из первого уравнения движения

$$\sin t = \frac{x}{3}. \quad (1.4)$$

Подставляя выражение для $\sin t$ из (1.4) в (1.3), получим

$$y = 2\left(1 - 2\frac{x^2}{9}\right) = 2 - \frac{4}{9}x^2. \quad (1.5)$$

Таким образом, траектория движущейся точки лежит на параболе (1.5) (рис. 1.3). Проследим за движением точки исследуя функции $x = 3 \sin t$ и $y = 2 \cos 2t$. Во – первых она начинает своё движение из точки M_0 с координатами $x_0 = x(0) = 3 \sin 0 = 0$ и $y_0 = y(0) = 2 \cos(2 \cdot 0) = 2$, т.е. из вершины параболы. Во – вторых, её координата x , при возрастании t , непрерывно растёт и достигает максимума 3 (максимум функции $\sin t$ равен 1). После чего координата x точки убывает и достигает минимума -3 (минимум функции $\sin t$ равен -1) и т.д. При этом, координата y движущейся точки меняется в пределах от -2 до 2.

Таким образом, движущаяся точка, стартовав из вершины параболы (1.5), совершает по её части

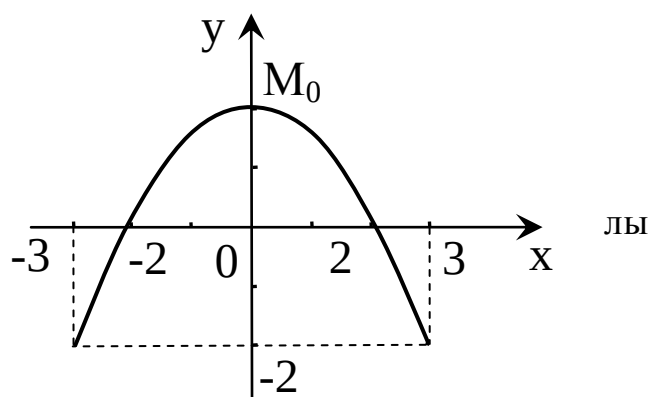


Рис. 1.3

($|x| \leq 3, |y| \leq 2$) гармоническое колебание с периодом 2π .

Для нахождения момента времени t_1 , необходимо решить уравнение $2\cos t_1 = 0$ (координата y при пересечении точкой оси Ox обращается в 0).
Т.е.

$$2\cos t_1 = 0, \quad 2t_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

$$t_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Ближайший после начала движения момент времени пересечения точкой оси Ox будет определяться значением $k=0$. Итак $t_1 = \frac{\pi}{4}$ с.

Задача 10.12 (И. В. Мещерский).

Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$. Длина $OA = AB = 80$ см. Найти уравнение движения и траекторию средней точки M шатуна. А также уравнение движения ползуна B , если в начальный момент ползун находился в крайнем правом положении; оси координат указаны на рисунке 1.4.

Решение.

Найти уравнения движения точки M , это значит найти её координаты x_M, y_M для произвольного момента времени t . За время t кривошип OA механизма повернется на угол

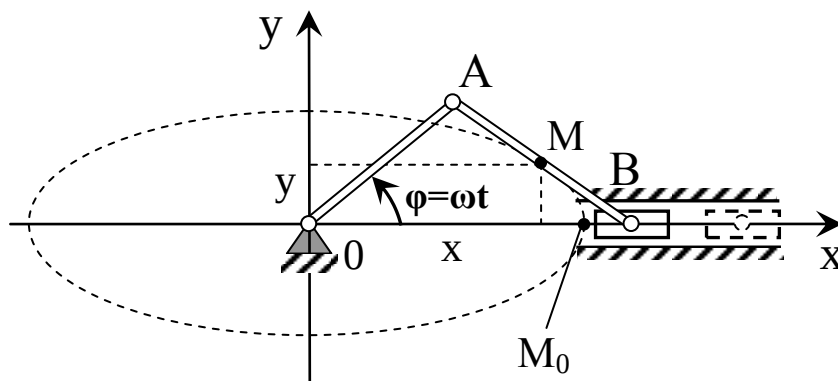


Рис. 1.4

$\varphi = \omega t$ (вращение равномерное с угловой скоростью ω и в начальный момент

кривошип OA горизонтален). Из геометрических соображений координаты точки M (см. рис.1.4) будут: $x_M = OA \cos \varphi + AM \cos \varphi = (OA + AM) \cos \varphi$; $y_M = MB \sin \varphi$. С учетом заданных параметров механизма получим:

$$x_M = 120 \cos 10t, \quad (1.6)$$

$$y_M = 40 \sin 10t.$$

Выражения (1.6) и есть уравнения движения точки M в плоскости.

Для нахождения кривой, на которой лежит траектория точки M механизма, исключим из (1.6) параметр t :

$$\cos 10t = \frac{x_M}{120}, \quad \sin 10t = \frac{y_M}{40}, \quad \cos^2 10t + \sin^2 10t = \left(\frac{x_M}{120} \right)^2 + \left(\frac{y_M}{40} \right)^2;$$
$$\frac{x_M^2}{120^2} + \frac{y_M^2}{40^2} = 1. \quad (1.7)$$

Итак, при работе механизма, за время полного оборота кривошипа OA , точка M шатуна описывает полный эллипс (1.7) с полуосями 120 см и 40 см.

Для записи уравнения движения ползуна B , найдем его координату x_B для произвольного момента t (рис. 1.4):

$$x_B = OA \cos \varphi + AB \cos \varphi = (OA + AB) \cos \varphi,$$

$$x_B = 160 \cos 10t. \quad (1.8)$$

Полученное уравнения движения (1.8) показывает, что ползун совершает прямолинейное гармоническое колебание амплитуды 160 см и периода

$$T = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \text{ с.}$$

Рекомендуемые задачи на дом: 10.2, 10.13 (И. В. Мещерский).

ЗАНЯТИЕ 2. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ ТОЧКИ.

В кинематике вводятся понятия кинематических характеристик движения точки, а именно, понятия вектора скорости $\bar{v}$ и вектора ускорения $\bar{a}$, также разработаны методы их нахождения.

Если движение точки задано координатным способом, т.е. заданы уравнения (1.1), то векторы $\bar{v}$ и $\bar{a}$ (рис.2.1) находятся по их проекциям на неподвижные оси координат x, y, z :

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}, \quad |\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad (2.1)$$

$$\cos\left(\bar{v}, \overset{\wedge}{Ox}\right) = \frac{\dot{x}}{|\bar{v}|}, \quad \cos\left(\bar{v}, \overset{\wedge}{Oy}\right) = \frac{\dot{y}}{|\bar{v}|}, \quad \cos\left(\bar{v}, \overset{\wedge}{Oz}\right) = \frac{\dot{z}}{|\bar{v}|}, \quad (2.2)$$

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}, \quad |\bar{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \quad (2.3)$$

$$\cos\left(\bar{a}, \overset{\wedge}{Ox}\right) = \frac{\ddot{x}}{|\bar{a}|}, \quad \cos\left(\bar{a}, \overset{\wedge}{Oy}\right) = \frac{\ddot{y}}{|\bar{a}|}, \quad \cos\left(\bar{a}, \overset{\wedge}{Oz}\right) = \frac{\ddot{z}}{|\bar{a}|}. \quad (2.4)$$

Если движение точки задано естественным способом, то векторы $\bar{v}$ и $\bar{a}$ (рис. 2.2) находятся по их проекциям на естественные оси траектории (касательную с ортом $\bar{\tau}$, главную нормаль с ортом $\bar{n}$ и бинормаль с ортом $\bar{b}$):

$$v_\tau = \dot{\sigma}, \quad v_n = v_b = 0, \quad |\bar{v}| = |\dot{\sigma}|, \quad (2.5)$$

$$a_\tau = \dot{v}_\tau = \ddot{\sigma}, \quad a_n = \frac{v_\tau^2}{\rho} = \frac{|\bar{v}|^2}{\rho}, \quad (2.6)$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

где ρ - радиус кривизны траектории в той её точке, через ко-

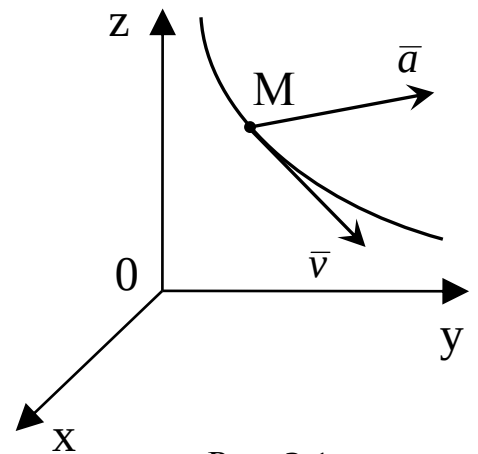


Рис. 2.1

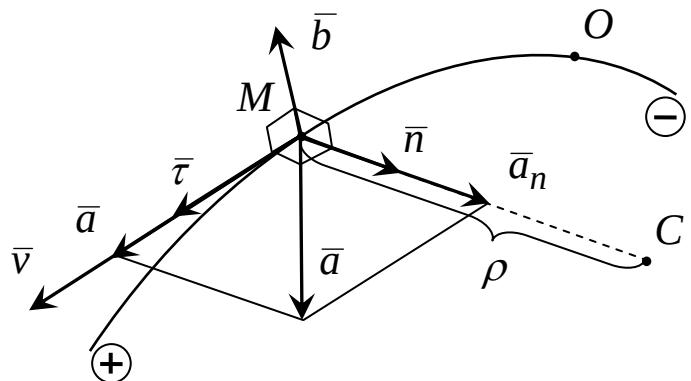


Рис. 2.2

торую в рассматриваемый момент времени проходит движущаяся точка М.

Если необходимо найти ρ , а движение точки задано координатным способом (1.1) то можно воспользоваться формулами:

$$|a_\tau| = \frac{|a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z|}{|\vec{v}|}, \quad a_n = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_\tau^2}, \quad \rho = \frac{|\vec{v}|^2}{a_n}. \quad (2.7)$$

Рассмотрим примеры.

Задача 12.27 (И. В. Мещерский)

Движение точки задано уравнениями $x = 2t$, $y = t^2$ (t - в секундах, x и y - в сантиметрах). Определить величины и направления скорости и ускорения точки в момент времени $t_1 = 1$ с. Поставим дополнительный вопрос: найти радиус кривизны траектории в той её точке, через которую в момент $t_1 = 1$ с проходит движущаяся точка.

Решение.

Исключим t из уравнений движения, найдем уравнение кривой на которой лежит траектория точки:

$$t = \frac{x}{2}, \quad y = \frac{1}{4}x^2. \quad (2.8)$$

Исследование заданных уравнений движения показывает, что при изменении времени t от нуля до бесконечности, координаты x и y движущейся точки монотонно возрастают. Это говорит о том, что такая точка стартует из начала координат и движется по правой ветви параболы (2.8)

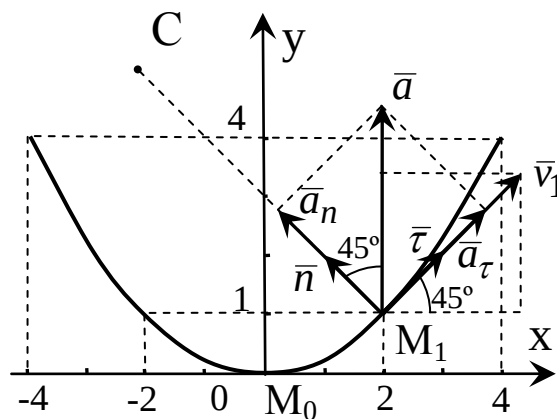


Рис. 2.3

всё время в одну сторону, устремляясь в бесконечность.

Определим положение точки на траектории в момент $t_1 = 1$ с (точка M_1):
 $x_1 = x(1) = 2$ см, $y_1 = y(1) = 1$ см.

Для нахождения вектора скорости точки в момент $t_1 = 1$ с воспользуемся формулами (2.1), (2.2):

$$v_x = \dot{x}(1) = 2 \text{ см/с}, v_y = \dot{y}(1) = 2t \text{ см/с};$$

$$\text{при } t_1 = 1 \text{ с } v_x = 2 \text{ см/с}, v_y = 2 \text{ см/с}, |\bar{v}(1)| = v_1 = 2\sqrt{2} \approx 2,28 \text{ см/с},$$

$$\cos\left(\overset{\wedge}{\bar{v}(1)}, OX\right) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

а значит угол наклона вектора скорости $\bar{v}_1$ к оси OX равен 45° . Вектор $\bar{v}_1$ изображен на рис.2.3.

Для нахождения вектора ускорения точки, воспользуемся формулами (2.3), (2.4):

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = 0 \text{ см/с}^2, a_y = \dot{v}_y(1) = \ddot{y} = 2 \text{ см/с}^2, |\bar{a}| = 2 \text{ см/с}^2,$$

для любого t . Вектор ускорения направлен вверх (рис. 2.3). Разложим $\bar{a}$ на составляющие $\bar{a}_\tau$ и $\bar{a}_n$ (рис. 2.3). Так как $\bar{a}_\tau$ и $\bar{v}_1$ сонаправлены, то движение точки ускоренное.

С помощью формул (2.7) найдем радиус кривизны параболы в точке M_1 :

$$|\bar{a}_\tau| = \frac{|0 \cdot 2 + 2 \cdot 2|}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ см/с}^2,$$

$$|\bar{a}_n| = \sqrt{2^2 - 2} = \sqrt{2} \text{ см/с}^2.$$

Заметим, я что в данной задаче a_τ и a_n могут быть найдены сразу из ри-

сунка; $\rho = \frac{(2\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \approx 5,66 \text{ см}.$

Задача 12.19 (И. В. Мещерский).

На проволочной окружности радиуса 10 см надето колечко М; через него проходит стержень ОА, который равномерно вращается вокруг отточки О, лежащей на той же окружности (рис. 2.4);

угловая скорость стержня такова, что он поворачивается на прямой угол в 5 с. Определить скорость V и ускорение a колечка.

Решение.

Для решения поставленной задачи необходимо задать движение колечка М. Здесь предпочтителен естественный способ, так как траектория колечка лежит на заранее известной окружности. Начало отсчета дуговой координаты выберем в точке О (рис. 2.4); за положительное направление отсчета дуговой координаты примем направление движения колечка; изобразим

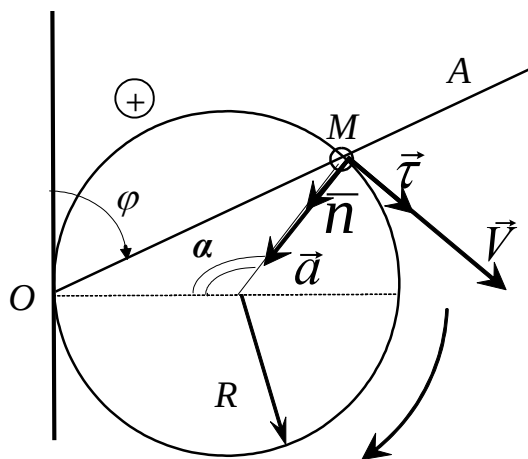


Рис. 2.4

колечко в текущий момент времени t и найдем его дуговую координату

$\sigma(t) = \overset{\cup}{OM}$ (рис. 2.4); учтем, что за время t стержень ОА повернется на угол

$\varphi = \omega t$ ($\omega = \frac{\pi}{6}$ - угловая скорость стержня). Из геометрии известно, что

$\sigma = \overset{\cup}{OM} = R\alpha$ ($\alpha = 2\varphi$ - центральный угол, опирающийся на дугу ОМ), тогда

$$\sigma = 2\pi t. \quad (2.9)$$

Выражение (2.9) и есть закон движения колечка вдоль траектории.

Воспользуемся формулами (2.5) и (2.6):

$v_\tau = \dot{\sigma} = 2\pi \text{ см /с}$ (равномерное движение по окружности);

$$a_\tau = \dot{v}_\tau = \ddot{\sigma} = 0; \quad a = a_n = \frac{v_\tau^2}{R} = \frac{4\pi^2}{10} = 0,4\pi^2 \text{ см /с}^2.$$

Векторы скорости и ускорения изображены на рис. 2.4.

Рекомендуемые задачи на дом: 12.17, 12.21, 12.28(И. В. Мещерский).

2. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА (1 ЗАНЯТИЕ, 2 ЧАСА).

ЗАНЯТИЕ 3. Самостоятельная работа

Движение тела называется поступательным, если любая прямая мысленно проведенная в теле, остается при движении тела параллельной своему первоначальному положению.

Из теории известно, что при поступательном движении тела, траектории всех его точек одинаковы, скорости и ускорения всех его точек в каждый момент времени векторно равны. Это значит, что задание поступательного движения тела сводится к заданию движения любой его точки.

Движение тела называется вращательным, если какие – нибудь две точки, принадлежащие телу, остаются во все время движения неподвижными.

В силу модели- абсолютно твердое тело, применяемой в кинематике, легко показать, что прямая, проходящая через неподвижные точки А и В, также будет неподвижна и называется осью вращения (рис. 3.1).

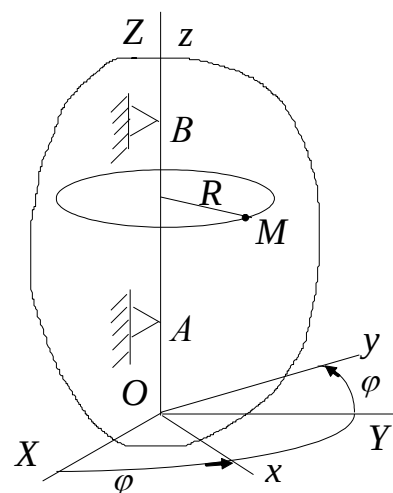


Рис. 3.1

Вращательное движение задается функцией (рис. 3.1) $\varphi = \varphi(t)$, где φ - угол поворота тела, измеряемый в радианах. Кинематическими характеристиками вращающегося тела являются угловая скорость $\omega = \dot{\varphi}$ и угловое ускорение $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$, по которым можно судить о характере движения тела (если ω и ε одного знака, то вращательное движение ускоренное, если ω и ε разного знака, то – замедленное). В частности, если $\varepsilon = 0$, то $\omega = \omega_0 = \text{const}$ (равномерное движение) и $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$, если $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$ (равномерное вращение), то

$$\omega = \varepsilon_0 t + \omega_0 \text{ и } \varphi = \frac{\varepsilon_0 t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0, \quad (3.1)$$

где ω_0 и φ_0 - начальная угловая скорость и начальный угол поворота тела.

Траекторией любой точки М (рис. 3.1) тела будет окружность определенного радиуса R, а её вектор скорости и вектор ускорения находятся по проекциям на естественные оси:

$$v_\tau = \omega R, \quad a_\tau = \varepsilon R, \quad a_n = \omega^2 R, \quad |\vec{a}| = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (3.2)$$

Рассмотрим примеры.

Задача 13.18 (И. В. Мещерский).

Вал радиуса $R=10$ см приводится во вращение гирей Р, привешенной к нему на нити. Движение гири выражается уравнением $x=100t^2$, где x - расстояние гири от места схождения нити с поверхности вала, выраженное в сантиметрах, t - время в секундах. Определить угловую

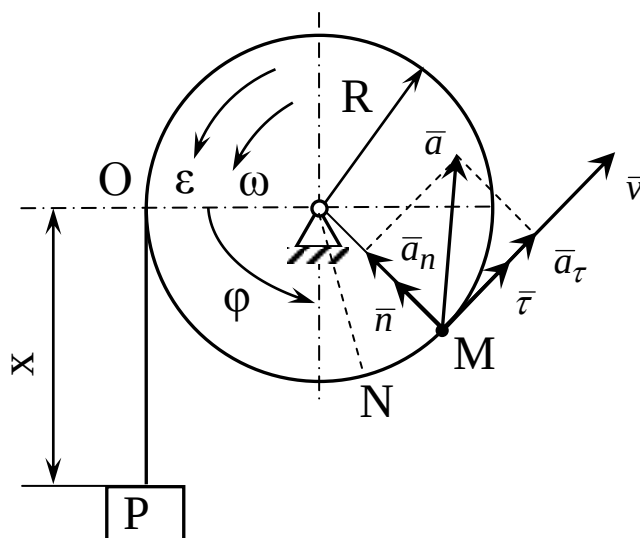


Рис. 3.2

скорость ω и угловое ускорение ε вала, а также полное ускорение a точки на поверхности вала в момент t (рис. 3.2).

Решение.

В рассматриваемой задаче движение гири прямолинейное поступательное происходящее по закону $x = 100t^2$ (см). Так как нить по поверхности вала не проскальзывает, то длина дуги ON с которой разматывается нить за время t будет равна длине этой нити, т. е. $\overset{\cup}{ON} = x$, а потому угол, на который повернётся вал за время t будет:

$$\varphi = \frac{\overset{\cup}{ON}}{R} = \frac{x}{R}; \quad \varphi = 10t^2. \quad (3.3)$$

Выражение (3.3) представляет собой закон вращательного движения вала. С помощью него находим кинематические характеристики вала: $\omega = \dot{\varphi} = 20t \text{ с}^{-1}$, $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = 20 \text{ с}^{-2}$ (вращение вала равноускоренное). Вектор скорости и вектор ускорения произвольной точки M на поверхности вала находим по формулам (3.2), а именно:

$$v_{\tau} = \omega R = 200t \text{ см/с}, \quad a_{\tau} = \varepsilon R = 200 \text{ см/с}^2, \\ a_n = \omega^2 R = 4000t \text{ см/с}^2, \quad |\vec{a}| = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 10\sqrt{400 + 400^2 t^2} = 200\sqrt{1 + 400t^4}.$$

Нужные векторы изображены на рис. 3.2.

Задача 13.12 (И. В. Мещерский).

Определить скорость v и ускорение a точки, находящейся на поверхности Земли в Ленинграде, принимая во внимание только вращение Земли вокруг своей оси; широта Ленинграда 60° , радиус Земли 6370 км.

Решение.

Как известно, Земля вращается равномерно, делая один полный оборот (2π радиан) в сутки, а потому её угловая скорость будет постоянной и равной

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \approx 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}. \quad \text{Очевидно, что}$$

угловое ускорение Земли $\varepsilon = \dot{\omega} = 0$.

Точка Л (Ленинград), при вращении Земли описывает окружность радиуса

$R = OL = O_1L \cdot \sin 30^\circ = 6370 \cdot 10^3 \cdot 0,5 = 3185 \cdot 10^3 \text{ (м)}$ (см рис. 3.3). Вектор скорости

точки Л направлен по касательной к её траектории, а его величина $v = \omega R = 7,27 \cdot 10^{-5} \cdot 3185 \cdot 10^3 = 231,55 \text{ м/с}$. Вектор ускорения точки Л направлен по главной нормали к её траектории ($a_\tau = \varepsilon R = 0$), а его величина

$$a = a_n = \omega^2 R = 7,27 \cdot 10^{-10} \cdot 3185 \cdot 10^3 = 0,0168 \text{ м/с}^2.$$

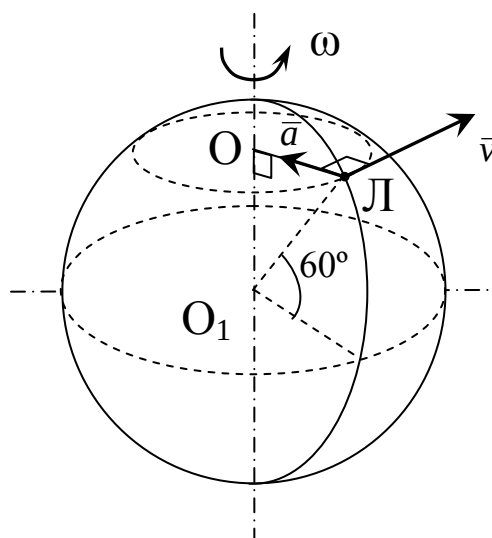


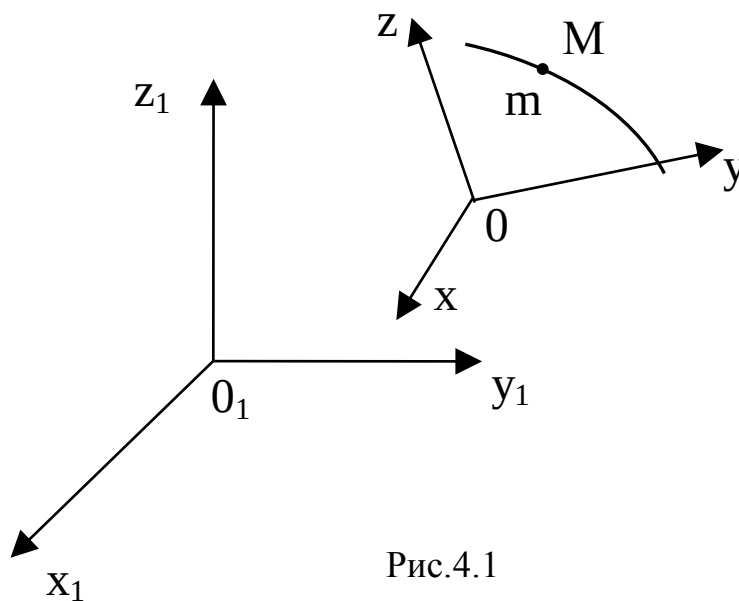
Рис. 3.3

Рекомендуемые задачи на дом: 13.8 (рекомендуется решать с помощью формул (3.1)), 13.10, 13.17 (И. В. Мещерский).

3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ (3 ЗАНЯТИЯ, 6 ЧАСОВ).

ЗАНЯТИЕ 4. СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ В СЛОЖНОМ ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ.

Восстановим основные понятия кинематики сложного движения точки. Имеется некоторая «неподвижная» система координат x_1, y_1, z_1 (рис.4.1) и движущаяся по отношению к ней подвижная система координат x, y, z . Будем рассматривать движение объекта, моделируемого точкой M , с позиции наблюдателя, находящегося в неподвижной системе координат.



Вспомним основные определения:

1°. Движение точки M по отношению к движущейся системе координат (по отношению к наблюдателю, находящемуся в осях x, y, z) называется относительным движением точки M . Вектор скорости и вектор ускорения точки M в этом движении называются, соответственно, относительной скоростью и относительным ускорением и обозначаются $\vec{v}_r, \vec{a}_r$.

2°. Движение точки M по отношению к неподвижной системе координат (по отношению к наблюдателю, находящемуся в осях x_1, y_1, z_1) называется абсолютным движением точки M . Вектор скорости и вектор ускорения точки M в

этом движении называются, соответственно, абсолютной скоростью и абсолютным ускорением и обозначаются $\bar{v}_a$, $\bar{a}_a$.

3°. Движение подвижных осей x, y, z (рассматриваемых как тело) по отношению к неподвижным x_1, y_1, z_1 (по отношению к наблюдателю, находящемуся в осях x_1, y_1, z_1) называется переносным движением.

Переносной скоростью (переносным ускорением) движущейся точки М в данный момент времени называется вектор, равный абсолютной скорости (абсолютному ускорению) той точки m , (см. рис.4.1) принадлежащей подвижной системе координат, через которую в этот момент проходит движущаяся точка М. Обозначаются переносная скорость и переносное ускорение соответственно $\bar{v}_e$, $\bar{a}_e$.

В теории доказывается, прежде всего, теорема о сложении скоростей: «Абсолютная скорость точки, совершающей сложное движение, равна в каждый момент времени векторной сумме её относительной и переносной скоростей, т. е.:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e. \quad (4.1)$$

Рассмотрим примеры.

Задача 22.9 (И. В. Мещерский).

Пассажир движущегося со скоростью 72 км/ч по горизонтальному шоссе автомобиля видит через боковое стекло кабины траектории капель дождя, наклонёнными к вертикали под углом 40°. Определить абсолютную скорость падения дождевых капель отвесно падающего дождя, пренебрегая трением капель о стекло.

Решение.

Введем в рассмотрение нужные оси координат: неподвижную x_1, y_1 , связанную с дорогой и подвижную x, y , связанную с корпусом автомобиля и движущуюся вместе с ним прямолинейно поступательно со скоростью $\bar{v} = 72 \text{ км/ч} = 20 \text{ м/с}$ (рис. 4.2).

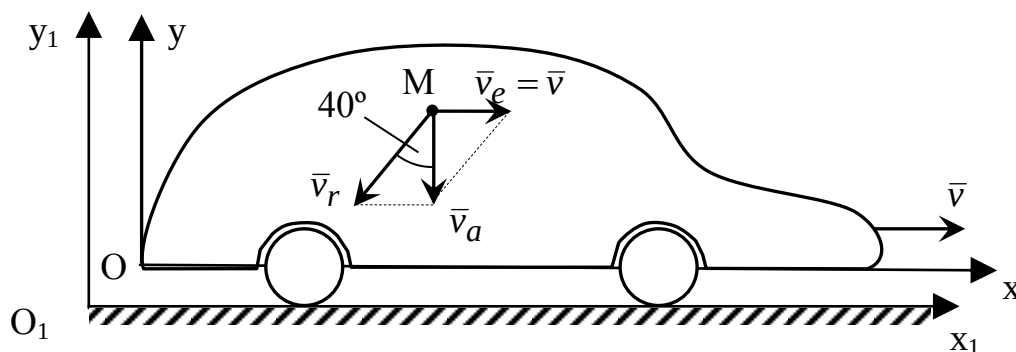


Рис. 4.2

Тогда относительное движение капли M (по отношению к осям x, y , т.е. к наблюдателю, сидящему в автомобиле) будет происходить по прямой, наклоненной под углом 40° к вертикали, а потому вектор $\bar{v}_r$ будет направлен по этой прямой (рис. 4.2). Переносной скоростью капли M будет, по определению, вектор, равный абсолютной скорости той точки стекла автомобиля (подвижных осей x, y) через которую в данный момент капля M проходит; т. е. $\bar{v}_e = \bar{v}$ (при поступательном движении тела, скорости всех его точек векторно равны). По отношению к дороге (осям x_1, y_1) дождь падает вертикально, а потому вектор $\bar{v}_a$ будет направлен по вертикали вниз.

Геометрическая реализация теоремы (4.1) осуществляется построением соответствующего параллелограмма (рис. 4.2). Из рисунка видно, что $|\bar{v}_a| = |\bar{v}_e| \operatorname{ctg} 40^\circ \approx 20 \cdot 1,9 = 23,84 \text{ м/с}$.

Задача 22.14 (И. В. Мещерский).

Шары центробежного регулятора Уатта, вращающегося вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$, благодаря изменению нагрузки машины отходят от этой оси, имея для своих стержней в данном положении

угловую скорость $\omega_1 = 1,2 \text{ с}^{-1}$. Найти абсолютную скорость шаров регулятора в рассматриваемый момент времени, если длина стержней $l = 0,5 \text{ м}$, расстояния между осями их подвеса $2e = 0,1 \text{ м}$, углы, образованные стержнями с осью регулятора, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 30^\circ$ (рис. 4.3).

Решение.

Свяжем подвижные оси x, y, z с вращающимся регулятором (рис. 4.3) (оси Oy и Oz в плоскости стержней регулятора), тогда эти оси будут совершать переносное движение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω .

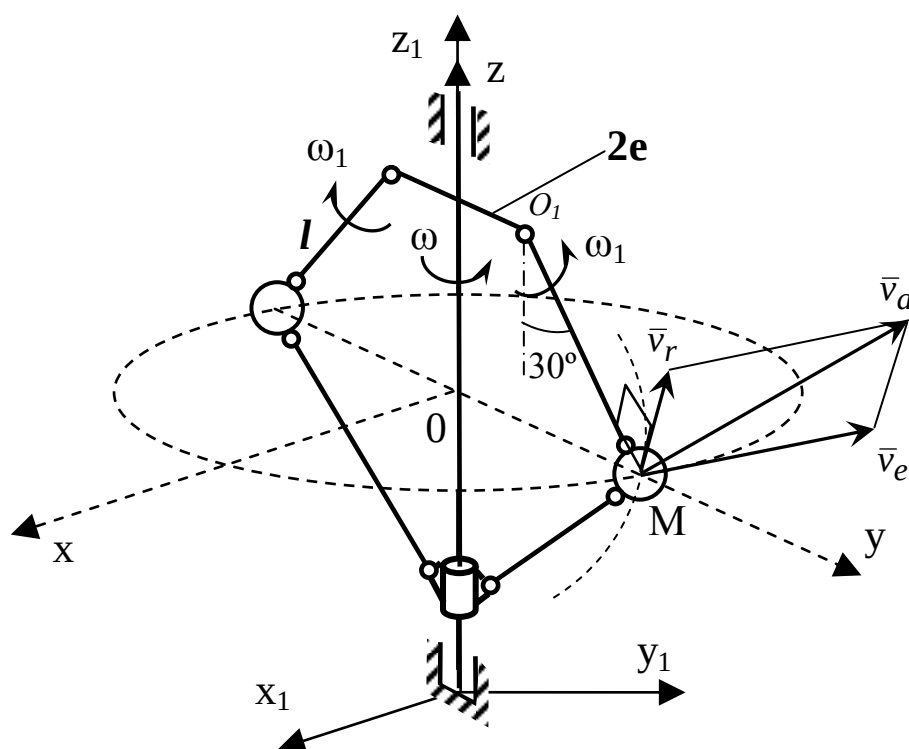


Рис. 4.3

Шар М будет совершать по отношению к осям x, y, z (в плоскости yOz) относительное движение по окружности радиуса $O_1M=l$ (так как он принадлежит стержню, совершающему вращательное движение вокруг оси, проходящей через точку O_1 и перпендикулярную плоскости yOz с угловой скоростью ω_1). Вектор относительной скорости шара лежит в плоскости yOz и направлен

перпендикулярно стержню O_1M . Его величина будет: $v_r = \omega_1 l = 1,2 \cdot 0,5 = 0,6$ м/с. Переносная скорость шара M в данный момент будет равна (согласно определению) вектору скорости той точки вращающихся осей $x y z$, через которую шар проходит. Эта точка движется по окружности радиуса $\hat{I}\hat{I} = e + l \sin 30^\circ = 0,05 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,3$ м; её скорость направлена по касательной к окружности и равна: $v_e = \omega \cdot \hat{I}\hat{I} = 10 \cdot 0,3 = 3$ м/с.

Согласно теореме о сложении скоростей (4.1), вектор абсолютной скорости шара будет направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\bar{v}_r$ и $\bar{v}_e$ (рис. 4.3), а его величина будет: $|\bar{v}_a| = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{0,6^2 + 3^2} \approx 3,06$ м/с.

Рекомендуемые задачи на дом: 27.15, 27.17 (И. В. Мещерский).

ЗАНЯТИЕ 5. СЛОЖЕНИЕ УСКОРЕНИЙ В СЛОЖНОМ ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ (ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА).

Теорема о сложении ускорений в сложном движении точки (теорема Кориолиса) формулируется следующим образом: «Абсолютное ускорение точки, совершающей сложное движение, равно в каждый момент времени векторной сумме её относительного, переносного и кориолисова ускорений», т.е.:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c. \quad (5.1)$$

Кориолисово ускорение

$$\bar{a}_c = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_r), \quad (5.2)$$

где $\bar{\omega}$ - вектор угловой скорости подвижной системы координат (если подвижная система представляет собой тело вращающееся вокруг неподвижной оси, то вектор $\bar{\omega}$ направляется вдоль оси вращения в ту сторону, чтобы с его

конца вращение наблюдалось происходящим против часовой стрелки). В частности если переносное движение поступательное ($\vec{\omega} = 0$), $\vec{a}_c = 0$ и $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e$.

Рассмотрим примеры.

Задача 23.9 (И. В. Мещерский).

Автомобиль на прямолинейном участке пути движется с ускорением $a_0 = 2 \text{ м/с}^2$. На продольный вал насажен вращающийся маховичок радиуса $R = 0,25 \text{ м}$, имеющий в данный момент угловую скорость $\omega = 4 \text{ с}^{-1}$ и угловое ускорение $\varepsilon = 4 \text{ с}^{-2}$.

Найти абсолютное ускорение точек обода маховичка в данный момент (рис. 5.1).

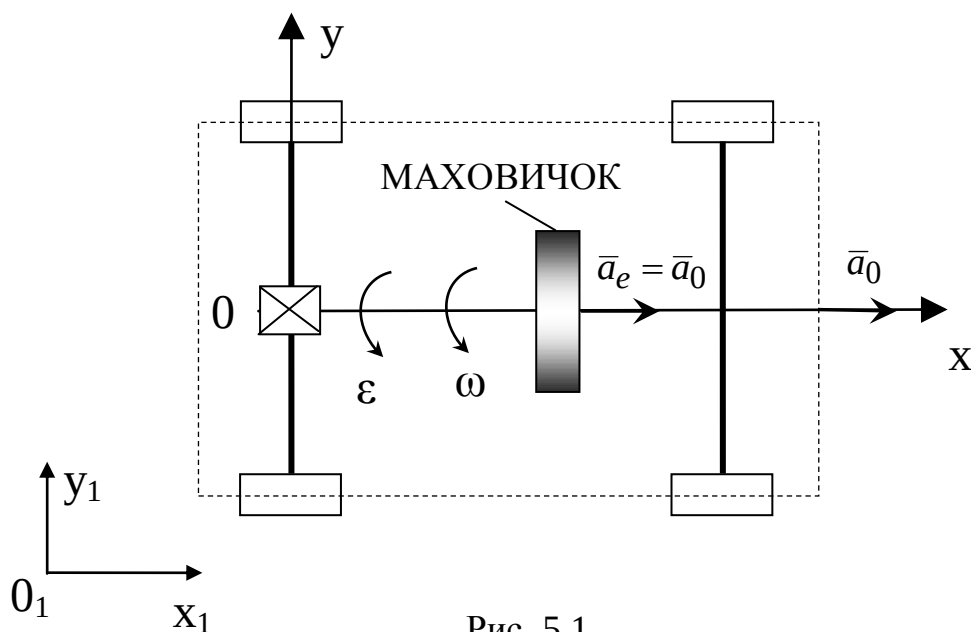


Рис. 5.1

Решение.

Свяжем с автомобилем подвижную систему координат x, y , которая вместе с ним со-

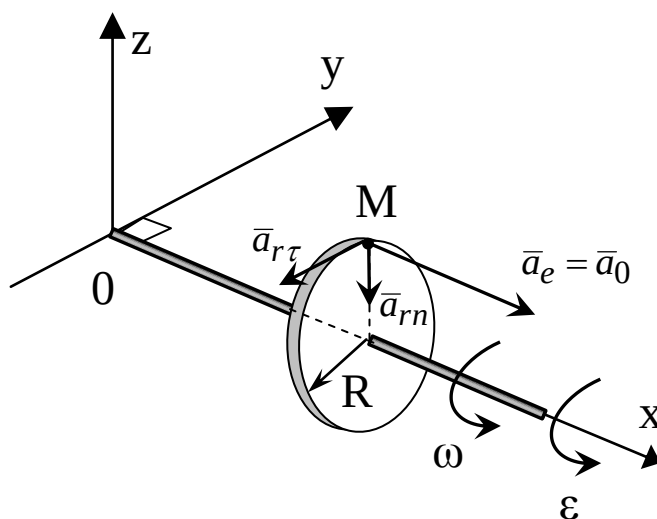


Рис. 5.2

вершает переносное поступательное движение с ускорением по отношению к неподвижным осям x_1, y_1 . Любая точка обода маховичка по отношению к подвижной системе x, y (по отношению к корпусу автомобиля) ведёт себя как точка вращающегося тела, поэтому её относительное ускорение равно векторной сумме вектора касательного и вектора нормального ускорения: $\bar{a}_r = \bar{a}_{r\tau} + \bar{a}_{rn}$, где $a_{r\tau} = \varepsilon R = 4 \cdot 0,25 = 1 \text{ м/с}^2$; $a_{rn} = \omega^2 R = 4^2 \cdot 0,25 = 4 \text{ м/с}^2$. Векторы $\bar{a}_{r\tau}$ и $\bar{a}_{rn}$ показаны на рис. 5.2. Переносное ускорение $\bar{a}_e$ точки М маховичка в данный момент - вектор равный ускорению той точки автомобиля, через которую в этот момент точка М проходит. Так как автомобиль движется поступательно, то ускорения всех его точек в данный момент одинаковы и равны a_0 . Таким образом, $a_e = a_0$ (рис. 5.2). В силу той же причины (переносное движение поступательное) ускорение Кориолиса $a_c = 0$.

Теорема о сложении ускорений (5.1) позволяет найти абсолютное ускорение точки М обода маховичка. А именно, $\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e$, $\bar{a}_a = \bar{a}_{r\tau} + \bar{a}_{rn} + \bar{a}_0$. Слагаемые векторы взаимно перпендикулярны (рис. 5.2), а потому вектор $\bar{a}_a$ направлен по диагонали параллелепипеда, построенного на этих векторах, а его модуль равен:

$$|\bar{a}_a| = \sqrt{a_{r\tau}^2 + a_{rn}^2 + a_0^2} = \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{21} \approx 4,58 \text{ м/с}^2.$$

Задача 23.29
(И. В. Мещерский).

Квадрат ABCD со стороной $2a$ м вращается вокруг стороны AB (рис. 5.3) с постоянной угловой скоростью

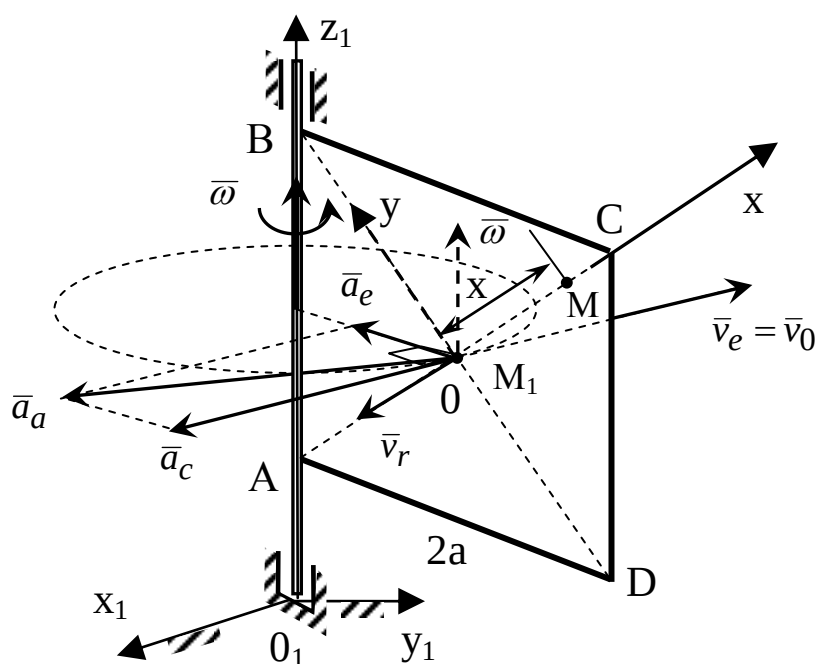


Рис. 5.3

$\omega = \pi\sqrt{2} \text{ с}^{-1}$. Вдоль диагонали AC совершает гармоническое колебание точка М по закону $x = a \cos \frac{\pi}{2} t$ м.

Определить величину абсолютного ускорения точки при $t_1=1$ с и $t_2=2$ с. Дополнительно, найти абсолютную скорость в эти моменты.

Решение.

Выберем в качестве подвижной системы координат оси xOy , связанные с вращающимся квадратом ABCD (рис. 5.3), тогда относительным движением точки М будет её колебательное движение вдоль диагонали AC (вдоль оси x) по закону $x = a \cos \frac{\pi}{2} t$ м. Положение точки М на квадрате в момент времени

$t_1=1$ с будет: $x(1) = a \cos \frac{\pi}{2} = 0$, т.е. в момент $t_1=1$ с точка М будет проходить центр квадрата. Скорость точки М в её движении по квадрату (относительная скорость $\bar{v}_r$) находится по проекции на ось Ox : $v_{rx} = \dot{x} = -\frac{a\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t$; в момент времени $t_1=1$ с $v_{rx}(1) = \dot{x} = -\frac{a\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = -\frac{a\pi}{2}$. Таким образом, вектор $\bar{v}_r$ относительной скорости направлен вдоль диагонали AC к точке А (рис. 5.3), а её модуль равен

$$|\bar{v}_r| = \frac{a\pi}{2} \text{ м/с.} \quad (5.3)$$

Ускорение точки М в её движении по квадрату (относительное ускорение $\bar{a}_r$) находится по проекции на ось Ox : $a_{rx} = \dot{v}_{rx} = \ddot{x} = -\frac{a\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{2} t$; в момент времени $t_1=1$ с $a_{rx}(1) = -\frac{a\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{2} = 0$. Таким образом, относительное ускорение точки М в рассматриваемый момент:

$$\bar{a}_r = 0. \quad (5.4)$$

Переносным движением в рассматриваемой задаче будет равномерное вращение квадрата вокруг вертикальной оси O_1z_1 с угловой скоростью $\omega = \pi\sqrt{2} \text{ с}^{-1}$. Угловое ускорение квадрата $\varepsilon = \dot{\omega} = 0$. Переносной скоростью (переносным ускорением) движущейся точки М в момент $t_1 = 1 \text{ с}$ будет вектор, равный скорости (ускорению) центра квадрата ($\bar{v}_O$) через который в этот момент точка М проходит, т.е.

$$v_e = v_0 = \omega a = a\pi\sqrt{2} \text{ м/с}, \quad (5.5)$$

$$a_e = a_0 = \omega^2 a = 2a\pi^2 \text{ м/с}^2; \quad (5.6)$$

направлены векторы $\bar{v}_e$ и $\bar{a}_e$ так как показано на рис. 5.3 (так как направлены вектор скорости и вектор ускорения точки равномерно вращающегося тела).

Вектор ускорения Кориолиса находим согласно векторного произведения (5.2), т.е. направим этот вектор перпендикулярно плоскости, содержащей векторы $\bar{v}_r$ и $\bar{\omega}$ (перпендикулярно плоскости квадрата) в ту сторону, чтобы он дополнял векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{v}_r$ до правой тройки (рис. 5.3). Модуль этого вектора равен

$$|\bar{a}_{\bar{n}}| = 2|\bar{\omega}| \cdot |\bar{v}| \sin 135^\circ = 2\pi\sqrt{2} \frac{a\pi}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = a\pi^2 \text{ м/с}^2. \quad (5.7)$$

Найдем $\bar{v}_a$ и $\bar{a}_a$ в момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$, реализуя соответствующие теоремы (4.1) и (5.1). Из рис. 5.3 видно, что $\bar{v}_e$ и $\bar{v}_r$ взаимно перпендикулярны, а потому их векторная сумма, т.е. вектор $\bar{v}_a$, направлен по диагонали прямоугольника, построенного на векторах $\bar{v}_e$ и $\bar{v}_r$, а его модуль равен:

$$|\bar{v}_a| = \sqrt{\frac{a^2\pi^2}{4} + 2a^2\pi^2} = \frac{3}{2}a\pi \text{ м/с}.$$

Вектор $\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_c$ направлен по диагонали прямоугольника, построенного на $\bar{a}_e$ и $\bar{a}_c$ (рис. 5.3) и равен по модулю: $|\bar{a}_a| = \sqrt{|\bar{a}_e|^2 + |\bar{a}_c|^2} \text{ м/с}^2$, где $|\bar{a}_e|$ и

$|\bar{a}_c|$ ранее вычислены по (см. (5.6) и (5.7)). Итак,

$$|\bar{a}_a| = \sqrt{4a^2\pi^4 + a^2\pi^4} = a\pi^2\sqrt{5} \text{ м/с}^2.$$

Рекомендуемые задачи на дом: 23.29 (реализовать момент времени $t_2=2$ с), 23.17 (И. В. Мещерский).

ЗАНЯТИЕ 6. Самостоятельная работа

Студенты решают задачи 23.27, 23.47, 23.49 (И. В. Мещерский) самостоятельно под руководством преподавателя.

Задачи на дом: 23.48, 23.58 (И. В. Мещерский)

4. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА (4 ЗАНЯТИЯ, 8 ЧАСОВ)

ЗАНЯТИЕ 7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ В ТЕЛЕ СОВЕРШАЮЩЕМ ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ.

Движение твердого тела называется плоскопараллельным или плоским, если все точки тела перемещаются в неподвижных плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

На основании определения ясно, что изучение плоского движения сводится к изучению движения плоской фигуры в плоскости (Рис. 7.1). Движение же плоской фигуры в плоскости может быть задано тремя скалярными функциями (однозначными, непрерывными и дважды дифференцируемыми по t).

$$\begin{cases} x_o = x_o(t), \\ y_o = y_o(t), \\ \varphi = \varphi(t), \end{cases} \quad (7.1)$$

где x_o, y_o - координаты полюса (произвольной, наперед выбранной точки плоской фигуры), φ - угол поворота фигуры. Функции (7.1) называют в механике уравнениями или законом плоского движения твердого тела.

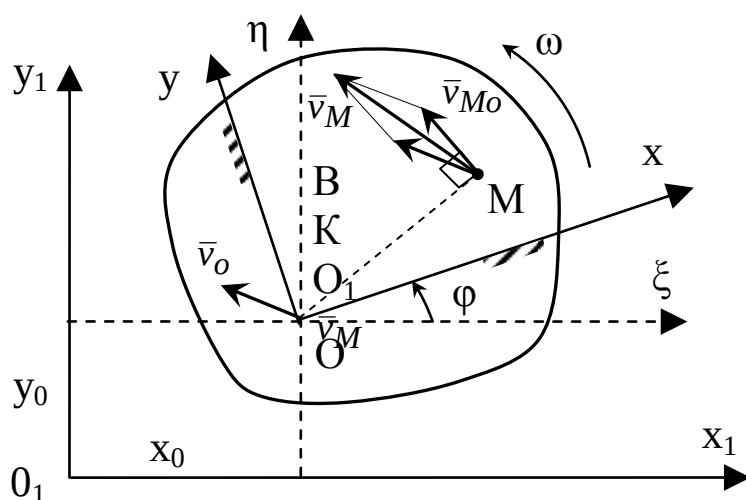


Рис. 7.1

Найти распределение скоростей в плоской фигуре (найти скорость произвольной точки M) можно с использованием теоремы о сложении скоростей в сложном движении точки (4.1), если ввести поступательно движущиеся оси $\xi o \eta$, связанные с фигурой лишь в полюсе. Тогда скорость точки M в ее относительном движении вместе с вращающейся вокруг полюса фигурой (относительно осей $\xi o \eta$) будет

$$|\bar{v}_r| = |\bar{v}_{MO}| = |\omega| MO. \quad (7.2)$$

Вектор $\bar{v}_{MO}$ направлен перпендикулярно радиусу MO в сторону вращения (рис.7.1) угловая скорость ω определяется с помощью третьей функции из (рис.7.1) ($\omega = \dot{\varphi}$).

Переносной скоростью точки M фигуры в момент t будет вектор, равный скорости той точки осей $\xi O \eta$, через которую в этот момент точка M проходит. Так как оси $\xi O \eta$ движутся поступательно, то

$$\bar{v}_e = \bar{v}_O; \quad (7.3)$$

вектор $\bar{v}_O$ находится с использованием первых двух функций из (7.1). Таким образом, так как $\bar{v}_M = \bar{v}_e + \bar{v}_r$, то окончательно (учитывая (7.2) и (7.3)):

$$\bar{v}_M = \bar{v}_O + \bar{v}_{MO}, \quad (7.4)$$

где $\bar{v}_O$ - скорость полюса, а $\bar{v}_{MO}$ - скорость точки M во вращении вместе с плоской фигурой вокруг полюса. Результат (7.4) – формула распределения скоростей в теле, совершающем плоское движение.

В механике вводится понятие мгновенного центра скоростей (м.ц.с.) как движущейся по фигуре точки, совпадающей в каждый момент с той её точкой P , скорость которой в этот момент равна нулю. При этом доказано, что в фигуре в каждый момент времени существует единственная точка P ($\bar{v}_P = 0$) и распределение скоростей в фигуре в этот момент таково, как будто бы она вращается вокруг точки P :

$$\bar{v}_M = \bar{v}_{MP}, \text{ где } |\bar{v}_{MP}| = |\omega| MP. \quad (7.5)$$

Существует несколько практических способов нахождения м.ц.с.:

1. Дано: $\bar{v}_A$, линия действия скорости точки B не параллельна вектору $\bar{v}_A$.

Точка P лежит на линии пересечения перпендикуляра к вектору $\bar{v}_A$ в точке A и перпендикуляра к линии действия скорости точки B , проведенного через точку B (Рис. 7.2). при этом, имеют место

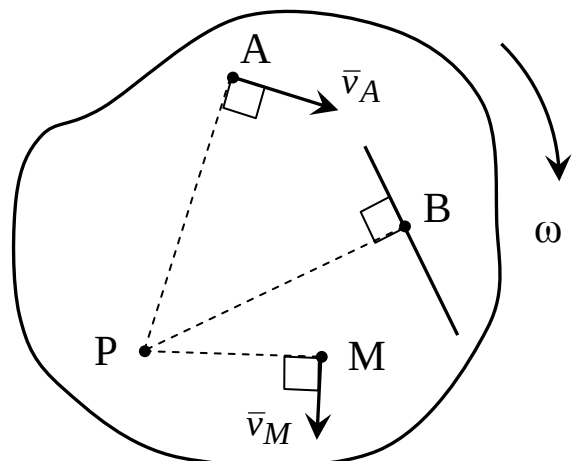


Рис. 7.2

формулы те же, что и для вращательного движения: $\frac{|\bar{v}_A|}{AP} = |\omega| = \frac{|\bar{v}_B|}{BP}$, позволяющие найти скорость $\bar{v}_B$ и, вообще, распределение скоростей, т. е. $|\bar{v}_M| = |\omega|MP$ (Рис.7.2)

2. Дано: $\bar{v}_A, \bar{v}_B, \bar{v}_A \parallel \bar{v}_B, \bar{v}_A \perp AB, |\bar{v}_A| \neq |\bar{v}_B|$

Точка P лежит на линии пересечения прямой AB и прямой, проведенной через концы векторов $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ (Рис.7.3а). При этом, $\frac{|\bar{v}_A|}{AP} = \frac{|\bar{v}_B|}{BP} = |\omega|$.

Если $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ коллинеарны, но противоположно направлены (Рис.7.3б), то точка P лежит внутри отрезка AB и ограничение $|\bar{v}_A| \neq |\bar{v}_B|$ можно отменить.

3. Дано: $\bar{v}_A$, линия действия скорости точки B параллельна вектору $\bar{v}_A$ (Рис.7.4).

Мгновенного центра скоростей в конечной части плоскости не существует; угловая скорость плоской фигуры в данный момент равна нулю ($\omega = 0$) и распределение скоростей в плоской фигуре в данный момент такое же как при поступательном движении, т. е. $\bar{v}_A = \bar{v}_B = \bar{v}_M$ (M – произвольная точка фигуры). Это мгновенное распределение скоростей называют мгновенно поступательным движением.

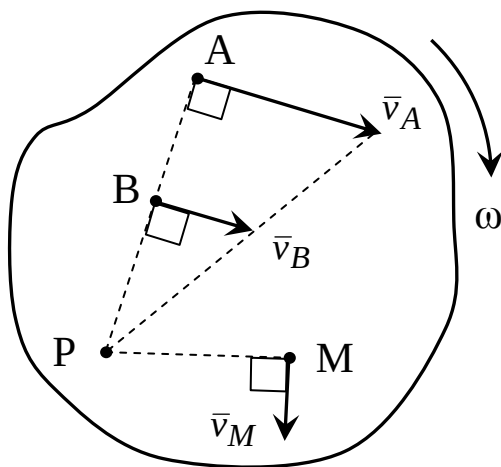


Рис. 7.3а

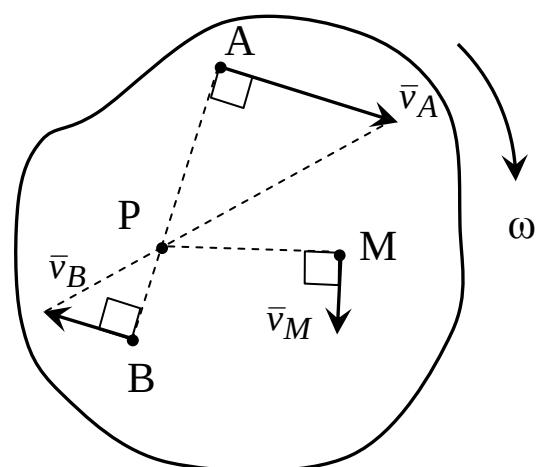


Рис. 7.3б

4. Дано: плоская фигура катится без проскальзывания по неподвижному плоскому контуру.

Точка P плоской фигуры, которая в данный момент касается точки P' неподвижного контура и будет м.ц.с. (при качении без скольжения $\vec{v}_P = \vec{v}_{P'} = 0$) (Рис.7.5). При этом:

$$\frac{|\vec{v}_A|}{AP} = \frac{|\vec{v}_M|}{MP} = |\vec{\omega}|.$$

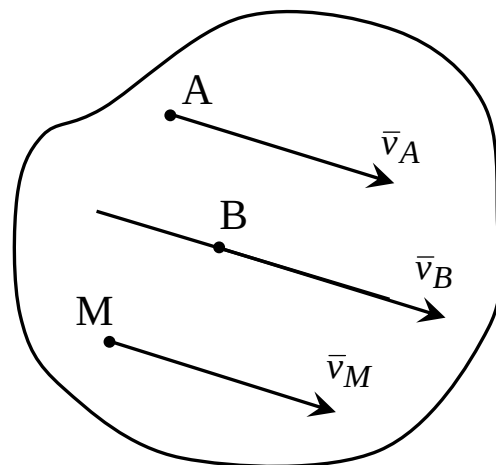


Рис. 7.4

Рассмотрим примеры.

Задача 16.17 (И.В. Мещерский)

Определить скорость точки К четырехзвенного механизма $OABO_1$ в положении, указанном на рисунке, если звено OA длиной 20см имеет угловую скорость 2с^{-1} . точка К расположена в середине (Рис.7.6) стержня BO_1 .

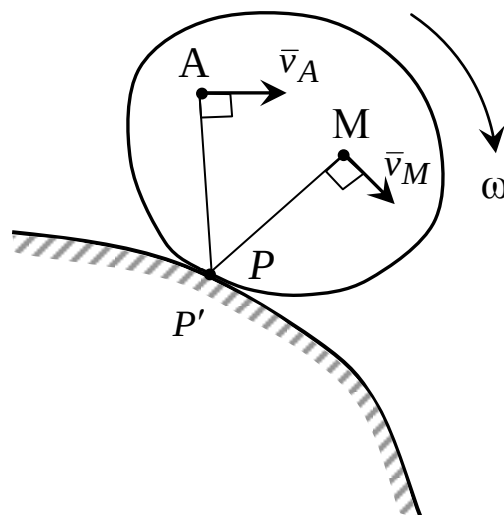


Рис. 7.5

Решение.

Звено OA механизма совершает вращательное движение вокруг оси, проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости чертежа, а потому вектор скорости точки A (Рис. 7.6) (вектор $\bar{v}_A$) перпендикулярен OA и равен по модулю:

$$\bar{v}_A = \omega OA = 2 \cdot 20 = 40 \text{ см/с.}$$

Звено AB совершает плоское движение. Известна скорость точки A этого звена ($\bar{v}_A$) и линия действия скорости точки B (точка B принадлежит и вращающе-

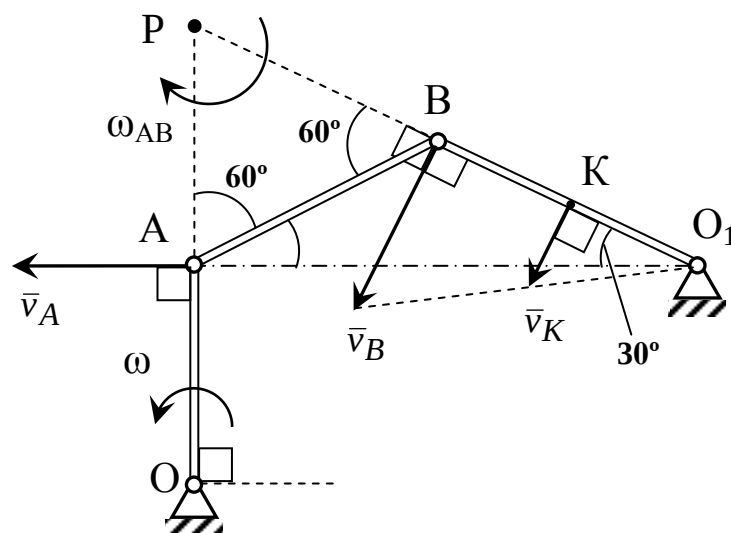


Рис. 7.6

муся звену BO_1 , а потому её вектор скорости должен быть перпендикулярен радиусу BO_1). Таким образом, применим способ 1 (см. Рис. 7.2) нахождения м.ц.с.. Для звена AB м.ц.с. (точка P) показан на Рис.7.6. имеют место соотношения:

$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}, v_B = \frac{BP}{AP} v_A; \text{ из треугольника } ABP \text{ следует } AP=BP, \text{ а потому}$$

$$v_B = v_A = 40 \text{ см/с.}$$

Точка K – середина вращающегося звена BO_1 , поэтому

$$v_K = \frac{v_B}{2} = 20 \text{ см/с.}$$

Задача 16.31 (И.В. Мещерский)

Колесо радиуса $R=0,5\text{ м}$ катится без скольжения по прямолинейному участку пути; скорость центра его постоянна и равна $v_0=10\text{ см/с}$. Найти скорости

концов M_1 , M_2 , M_3 , M_4 вертикального и горизонтального диаметров колеса. Определить его угловую скорость (Рис.7.7).

Решение.

Колесо катится без проскальзывания, совершая плоское движение. Очевидно, применим способ 4 (см. Рис.7.5) нахождения м.ц.с. для нашей задачи м.ц.с. – точка P колеса касающаяся в данный момент прямолинейной опоры (Рис. 7.7). Тогда имеет место соответствующая картина распределения скоростей и соответствующие соотношения:

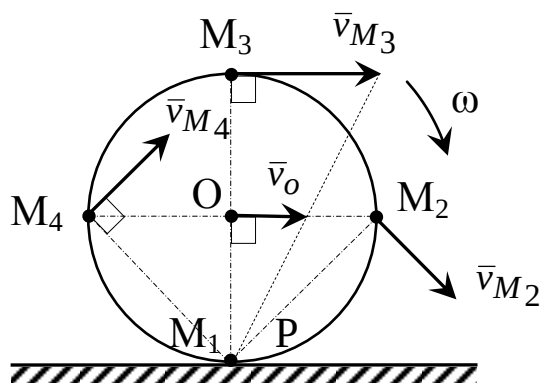


Рис. 7.7

$$\frac{v_O}{OP} = \frac{v_{M2}}{M_2P} = \frac{v_{M3}}{M_3P} = \frac{v_{M4}}{M_4P} = |\omega|. \quad (7.6)$$

Из (7.6) получим:

$$|\omega| = \frac{10}{0,5} = 20 \tilde{n}^{-1}, v_{M1} = 0,$$

$$v_{M2} = |\omega| M_2P = 20 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{2} \approx 14,14 \text{ м/с},$$

$$v_{M3} = |\omega| M_3P = 20 \cdot 1 = 20 \text{ м/с},$$

$$v_{M4} = |\omega| M_4P = 20 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{2} \approx 14,14 \text{ м/с}.$$

Рекомендуемые задачи на дом: 16.28, 16.29, 16.35 (И. В. Мещерский).

ЗАНЯТИЕ 8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЙ В ТЕЛЕ СОВЕРШАЮЩЕМ ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ.

Найти распределение ускорений в плоской фигуре (найти ускорение произвольной точки M) можно с использованием теоремы о сложении ускорений в сложном движении точки (5.1), если ввести поступательно движущиеся оси $\xi O \eta$, связанные с фигурой лишь в полюсе. Тогда ускорение точки M в её относительном движении вместе с вращающейся вокруг полюса фигурой (относительно осей $\xi O \eta$) будет сумма касательного и нормального ускорений:

$$\bar{a}_\tau = \bar{a}_{MO} = \bar{a}_{MO}^\tau + \bar{a}_{MO}^n, \quad (8.1)$$

где их величины

$$|a_{MO}^\tau| = |\varepsilon| \cdot MO \quad (8.2)$$

$$a_{MO}^n = \omega^2 MO. \quad (8.3)$$

Вектор $\bar{a}_{MO}^\tau$ направлен перпендикулярно радиусу MO в сторону стрелки ε (угловое ускорение $\varepsilon = \ddot{\varphi}$). Вектор $\bar{a}_{MO}^n$ направлен к полюсу (к оси относительного вращения) (Рис.8.1).

Переносным ускорением точки M фигуры в момент t будет вектор, равный ускорению той точки осей $\xi O \eta$, че-

рез которую в этот момент точка M проходит. Так как оси $\xi O \eta$ движутся поступательно, то

$$\bar{a}_e = \bar{a}_0; \quad (8.4)$$

вектор $\bar{a}_0$ находится с использованием первых двух функций из (7.1).

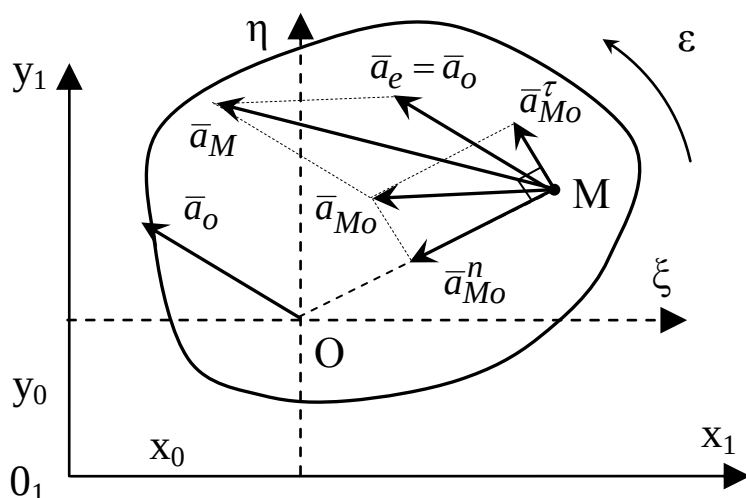


Рис. 8.1

$$\bar{a}_{\tilde{n}} = 0 \quad (8.5)$$

(переносное движение поступательное).

Таким образом, в силу теоремы (5.1), с учетом (8.1) - (8.5) получим:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_0 + \bar{a}_{MO}^{\tau} + \bar{a}_{MO}^n. \quad (8.6)$$

Выражение (8.6) – формула распределения ускорений в теле, совершающем плоское движение, которая говорит о том, что ускорение любой точки плоской фигуры складывается из ускорения полюса и ускорений касательного и нормального этой точки при её вращении вместе с фигурой вокруг полюса.

Рассмотрим примеры

Задача 18.11 (И.В. Мещерский)

Кривошип OA длины 20см вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_0 = 10 \text{с}^{-1}$ и приводит в движение шатун AB длины 100см, ползун B движется по вертикали (рис.8.2). Найти угловую скорость и угловое ускорение шатуна, а также ускорение ползуна B в момент, когда кривошип и шатун взаимно перпендикулярны и образуют с горизонтальной осью углы $\alpha = 45^0$ и $\beta = 45^0$. Дополнительно найти скорость ползуна в этот момент.

Решение.

Звено OA механизма совершает вращательное движение вокруг оси O , поэтому вектор скорости точки A ($\vec{v}_A$) направлен перпендикулярно радиусу OA , а его величина равна:

$$v_A = \omega_0 \cdot OA = 10 \cdot 20 = 200 \text{см/с}$$

Шатун AB механизма совершает плоское движение. В данный момент известен вектор скорости его точки A ($\vec{v}_A$) и линия действия скорости точки B (точка B движется прямолинейно по вертикали).

Таким образом, применим способ 1⁰ (см. Рис.7.2) нахождения м.ц.с.. Для шатуна AB он находится в точке пересечения перпендикуляров к вектору $\vec{v}_A$ и линии действия скорости точки B (см. Рис.8.2) и распределение скоростей в шатуне таково, как будто он

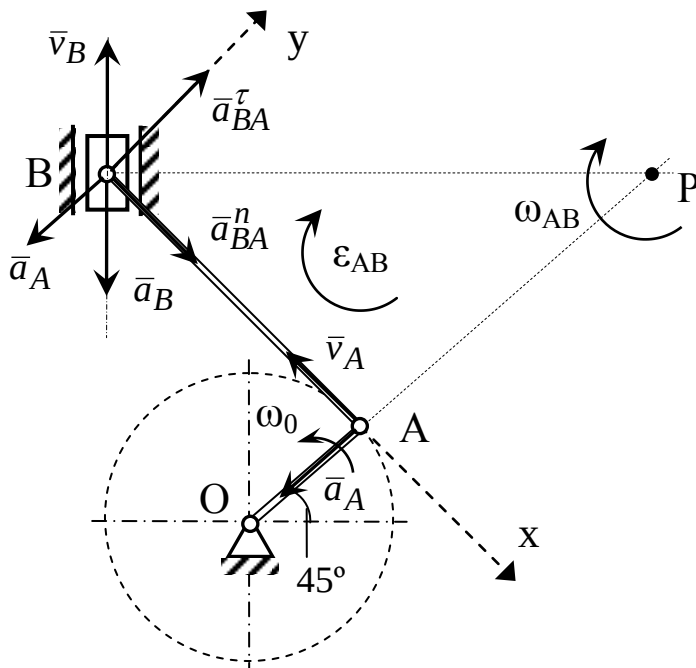


Рис. 8.2

вращается вокруг точки P с угловой скоростью ω_{AB} . Имеют место соотношения:

$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = |\omega_{AB}|. \text{ Из } \triangle ABP \text{ видно, что } AP=AB=100\text{см, } BP=100\sqrt{2}\text{ см и}$$

$$\frac{200}{100} = \frac{v_B}{100\sqrt{2}} = |\omega_{AB}|, \text{ откуда: } v_B = 200\sqrt{2} \approx 282.84\text{см/с, } |\omega_{AB}| = 2\text{с}^{-1}.$$

Кривошип OA вращается равномерно, а потому ускорение его точки A лишь нормальное (см. Рис.8.2) и его величина равна:

$$a_A = \omega^2 \cdot OA = 10^2 \cdot 20 = 2000 \text{ м/с}^2.$$

Для нахождения ускорения точки B шатуна применим формулу распределения ускорений (8.6), приняв за полюс точку A т. е.:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^n, \quad (8.7)$$

где согласно (8.2) и (8.3)

$$|\vec{a}_{BA}^{\tau}| = |\epsilon_{AB}| \cdot BA \quad (8.8)$$

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot BA = 400 \text{ см/с}^2 \quad (8.9)$$

Вектор $\bar{a}_{BA}^\tau \perp BA$ и направлен предположительно (величина и знак углового ускорения ε_{AB} нам заранее не известны). Вектор $\bar{a}_{BA}^n$ направлен к полюсу А (Рис. 8.2). Так как точка В движется прямолинейно по вертикали, то вектор $\bar{a}_B$ направим по этой вертикали предположительно вниз (Рис. 8.2)

Выражение (8.7) можно рассматривать теперь как векторное уравнение на плоскости содержащее две скалярные неизвестные a_B и a_{BA}^τ . Известно, что векторное уравнение эквивалентно системе двух скалярных уравнений, полученных проектированием его на какие-либо две оси координат (например, оси B_x и B_y на Рис.8.2).

На ось B_x :

$$a_B \cos 45^\circ = a_{BA}^n, \quad (8.10)$$

На ось B_y :

$$-a_B \sin 45^\circ = -a_A + a_{BA}^\tau. \quad (8.11)$$

Из (8.10) с использованием (8.9) получим:

$$a_B = \frac{a_{BA}^n}{\cos 45^\circ} = \frac{400 \cdot 2}{\sqrt{2}} = 400\sqrt{2} \approx 565,6 \text{ см/с}^2 \quad (8.12)$$

Из (8.11) с использованием (8.12) имеем:

$$a_{BA}^\tau = a_A - a_B \sin 45^\circ = 2000 - 400\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1600 \text{ см/с}^2 \quad (8.13)$$

Так как a_B и a_{BA}^τ имеют положительные знаки, то их направления таковы, как мы и предположили.

Из (8.8) с учетом (8.13) находим угловое ускорение

$$|\varepsilon_{AB}| = \frac{a_{BA}^\tau}{BA} = \frac{1600}{100} = 16 \text{ с}^{-2}.$$

Задача 18.23 (И.В. Мещерский)

Колесо катится без скольжения в вертикальной плоскости по наклонному прямолинейному пути. Найти ускорение концов двух взаимно перпендикулярных диаметров колеса, из которых один параллелен рельсу, если в рассматриваемый момент времени скорость центра колеса $v_0=1\text{м/с}$, ускорение центра колеса $a_0 = 3\text{м/с}^2$, радиус колеса $R=0,5\text{м}$.

Решение.

Так как колесо катится без проскальзывания, то точка M_1 колеса в данный момент есть его м.ц.с. Тогда угловая скорость колеса будет:

$$\omega = \frac{v_0}{R}. \quad (8.14)$$

Заметим, что формула (8.14) имеет место для любого момента времени, поэтому угловое ускорение колеса

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{\dot{v}_0}{R} = \frac{a_0}{R}; \quad (8.15)$$

При этом, если $\bar{v}_0$ и $\bar{a}_0$ одного направления, то направления ω и ε также совпадают.

Для нашей задачи:

$$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{1}{0.5} = 2\text{с}^{-1}, \varepsilon = \frac{a_0}{R} = \frac{3}{0.5} = 6\text{с}^{-2}. \quad (8.16)$$

Чтобы найти ускорение точки M_1 колеса воспользуемся формулой (8.6), приняв за полюс точку О:

$$\bar{a}_{M_1} = \bar{a}_0 + \bar{a}_{M_1O}^{\tau} + \bar{a}_{M_1O}^n; \quad (8.17)$$

при этом
 $\left| \bar{a}_{M_1 O}^{\tau} \right| = \varepsilon \cdot M_1 O = 6 \cdot 0.5 = 3 \text{ м/с}^2$,
 а направлен вектор $\bar{a}_{M_1 O}^{\tau} \perp M_1 O$ в сторону стрелки ε (Рис.8.3);

$a_{M_1 O}^n = \omega^2 \cdot M_1 O = 2^2 \cdot 0.5 = 2 \text{ м/с}^2$, а направлен вектор $\bar{a}_{M_1 O}^n$ к полюсу O (Рис.8.3).

Складывая по формуле (8.17) нужные векторы получим:

$$\bar{a}_{M_1} = \bar{a}_{M_1 O}^n = 2 \text{ м/с}^2.$$

Аналогично, ускорение точки M_2 будет:

$$\bar{a}_{M_2} = \bar{a}_0 + \bar{a}_{M_2 O}^{\tau} + \bar{a}_{M_2 O}^n; \quad (8.18)$$

при этом $\left| \bar{a}_{M_2 O}^{\tau} \right| = |\varepsilon| \cdot M_2 O = 3 \text{ м/с}^2$, $a_{M_2 O}^n = \omega^2 \cdot M_2 O = 2 \text{ м/с}^2$.

Нужные векторы показаны на Рис.8.3.

Выполняя сложение векторов (8.18) получим:

$$\left| \bar{a}_{M_2} \right| = \sqrt{\left(a_0 - a_{M_2 O}^n \right)^2 + \left(a_{M_2 O}^{\tau} \right)^2} = \sqrt{(3 - 2)^2 + 3^2} = \sqrt{10} \approx 3.26 \text{ м/с}^2$$

Далее:

$$\bar{a}_{M_3} = \bar{a}_0 + \bar{a}_{M_3 O}^{\tau} + \bar{a}_{M_3 O}^n \quad (8.19)$$

$\left| \bar{a}_{M_3 O}^{\tau} \right| = |\varepsilon| \cdot M_3 O = 3 \text{ м/с}^2$, $a_{M_3 O}^n = \omega^2 \cdot M_3 O = 2 \text{ м/с}^2$.

Нужные векторы на Рис.8.3. Выполняя сложение (8.19) будем иметь:

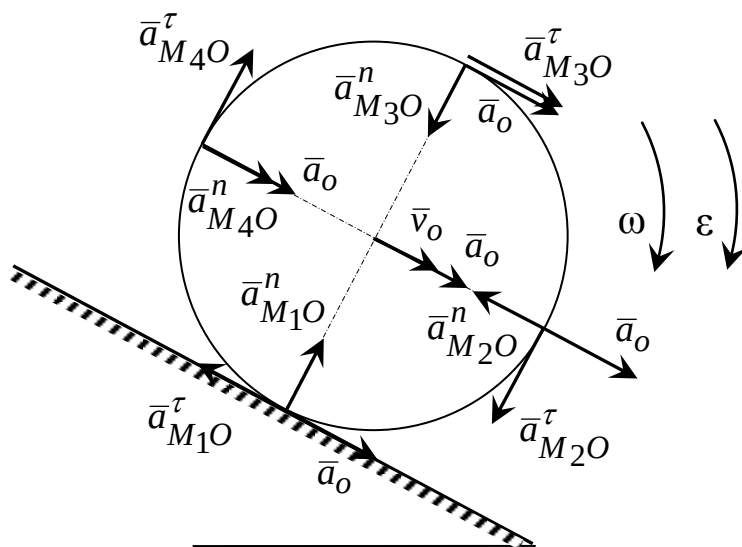


Рис. 8.3

$$|\bar{a}_{M_3}| = \sqrt{\left(a_0 + a_{M_3O}^\tau\right)^2 + \left(a_{M_3O}^n\right)^2} = \sqrt{(3+3)^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6.32 \text{ м/с}^2.$$

$$\bar{a}_{M_4} = \bar{a}_0 + \bar{a}_{M_4O}^\tau + \bar{a}_{M_4O}^n; \quad (8.20)$$

$$|\bar{a}_{M_4O}^\tau| = \varepsilon \cdot M_4O = 3 \text{ м/с}^2, \quad a_{M_4O}^n = \omega^2 \cdot M_4O = 2 \text{ м/с}^2.$$

Реализуя (8.20) (Рис.8.3), получим

$$|\bar{a}_{M_4}| = \sqrt{\left(a_0 + a_{M_4O}^n\right)^2 + \left(a_{M_4O}^\tau\right)^2} = \sqrt{(3+2)^2 + 3^2} = \sqrt{34} \approx 5.83 \text{ м/с}^2.$$

Задачи на дом: 18.22, 18.28 (И.В. Мещерский).

ЗАНЯТИЕ 9. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ НА ЗАНЯТИИ ПОД РУКОВОДСТВОМ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ.

Решение задач: 18.13, 18.26, 16.33 (И.В. Мещерский).

Задачи на дом: 18.27, 16.36 (И.В. Мещерский).

ЗАНЯТИЕ 10. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ НА ЗАНЯТИИ ПОД РУКОВОДСТВОМ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ.

Решение задач: 18.37, 18.20 (И.В. Мещерский).

Подведение итогов.

РАЗДЕЛ III. ДИНАМИКА

1. СОСТАВЛЕНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ (2 ЗАНЯТИЯ, 4 ЧАСА).

ЗАНЯТИЕ 1. СВОБОДНАЯ МАТЕРИАЛЬНАЯ ТОЧКА.

Материальная точка – модель реального тела, размерами которого, по принятой точности измерения длин, можно пренебречь, сохраняя массу.

Материальная точка называется свободной, если она моделирует тело, на перемещение которого в пространстве, не наложено никаких ограничений (нет других тел контактно взаимодействующих с рассматриваемым).

Математической моделью динамики свободной материальной точки является векторное дифференциальное уравнение

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{F}(t, \bar{r}, \frac{d\bar{r}}{dt}), \quad (1.1)$$

где m – масса точки; $\bar{r}$ – радиус-вектор точки; $\bar{F}(t, \bar{r}, \frac{d\bar{r}}{dt})$ – равнодействующая активных сил, приложенных к точке, зависящих, вообще говоря, от времени, радиус-вектора и $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V}$ – скорости точки; $\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{a}$ – ускорение точки.

Векторное уравнение (1.1) эквивалентно системе дифференциальных уравнений 6-ого порядка, полученной проектированием векторного уравнения (1.1) на оси прямоугольной системы координат (рис. 1.1)

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_X(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{y} = F_Y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{z} = F_Z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \end{cases} \quad (1.2)$$

где x, y, z – координаты движущейся точки; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ – проекции вектора скорости точки на оси координат; $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – проекции ускорения точки на те же оси.

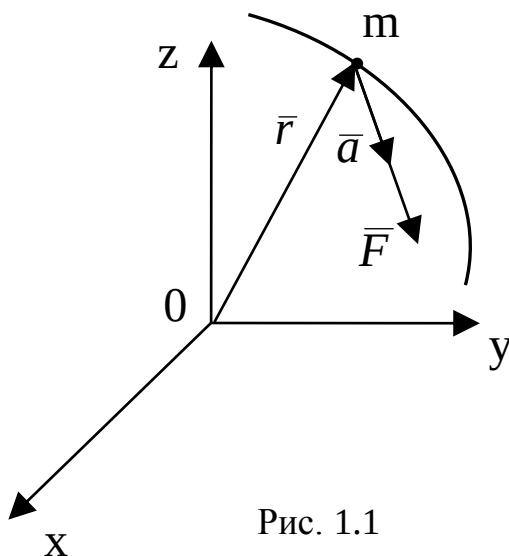


Рис. 1.1

Ставится задача:

По заданным массе точки и активным силам, к ней приложенным, найти её движение ($x = x(t), y = y(t), z = z(t)$), траекторию и её скорость в зависимости от времени или координат.

Очевидно, что решение этой задачи сводится математически к интегрированию системы (1.2) при заданных начальных условиях (x_0, y_0, z_0 – координаты точки и $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ – проекции её скорости при $t=0$).

Алгоритм решения подобных задач следующий:

- 1) Выбрать систему координат.

- 2) Изобразить начальные условия (отметить положение точки в начальный момент и её вектор начальной скорости).
- 3) Изобразить точку в произвольный момент времени (текущий радиус-вектор $\vec{r}\{x, y, z\}$ и вектор текущей скорости $\vec{V}$) и приложить к ней заданные активные силы.
- 4) Записать векторное уравнение (1.1) с конкретной правой частью.
- 5) Проанализировать правую часть, т.е. установить характер действующих сил, отметив их зависимость от времени или от положения точки или от её скорости. Важность этого пункта в том, что от вида правой части существенно зависит тип дифференциальных уравнений, а значит и метод их интегрирования.
- 6) Спроектировать векторное уравнение, на оси координат получив, таким образом, конкретную систему дифференциальных уравнений и приписать к ней начальные условия.
- 7) Проинтегрировать полученную систему дифференциальных уравнений «приспособив» её к решению поставленных задач механики (сделать соответствующие преобразования, замены переменных и т.д.).
- 8) Проанализировать полученные результаты; сделать выводы.

Реализуем предложенный алгоритм на примере конкретных задач.

Задача 27.16 (И.В.Мещерский)

На какую высоту H и за какое время T поднимется тело веса P , брошенное вертикально вверх со скоростью V_0 , если сопротивление воздуха может быть выражено формулой $K^2 PV^2$, где V - величина скорости тела?

Решение.

1) Движение точки прямолинейное по вертикали. Ось координат OZ направим по вертикали вверх, выбрав начало координат в точке бросания (рис. 1.2).

2) В точке O изобразим вектор начальной скорости $\vec{V}_0$ (рис. 1.2).

3) Изобразим точку в произвольный момент с текущей координатой Z и приложим к ней силу веса $\vec{P}$ и силу сопротивления $\vec{F}_C$, направленную против вектора $\vec{V}$ текущей скорости.

4) Векторное дифференциальное уравнение:

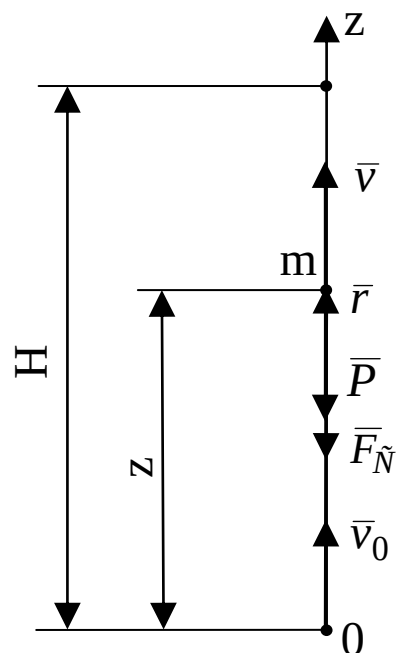


Рис. 1.2

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{P} + \vec{F}_C \quad (1.3)$$

5) $\vec{P}$ - постоянный вектор, $\vec{F}_C$ - вектор постоянного направления, а его модуль зависит от квадрата модуля текущей скорости.

6) Проекция уравнения (1.3) на ось OZ

$$\frac{P}{g} \ddot{z} = -P - K^2 P \dot{z}^2$$

или

$$\ddot{z} = -g(1 + K^2 \dot{z}^2). \quad (1.4)$$

при $t = 0, z_0 = 0, \dot{z} = V_0$.

7) Момент времени T достижения точкой максимальной высоты H определяется обращением в ноль скорости её движения, поэтому уравнение (1.4) необходимо преобразовать так, чтобы решая его, получить зависимость $V(t)$. Для этого необходимо ввести новую переменную $V = \dot{z}$, что приводит к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными вида:

$$\frac{dV}{dt} = -g(1 + K^2 V^2) \quad (1.5)$$

Решим уравнение (1.5) с учётом пределов изменения переменных

$$\frac{dV}{1 + K^2 V^2} = -g dt; \quad \int_{V_0}^0 \frac{dV}{1 + K^2 V^2} = -g \int_0^T dt; \quad \frac{1}{K} \int_{V_0}^0 \frac{d(KV)}{1 + (KV)^2} = -gt \Big|_0^T; \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{K} \arctg(KV) \Big|_{V_0}^0 = -gT; \quad \arctg(KV_0) = -gT; \quad T = \frac{1}{Kg} \arctg(KV_0) .$$

Для нахождения максимальной высоты подъёма точки, преобразуем уравнение (1.5) так, чтобы, решая его, получить зависимость $V(z)$. Для этого необходимо перейти в нём к новой независимой переменной Z , умножая обе его части на dz :

$$\frac{dz}{dt} = \dot{z} = V; \quad dz \frac{dV}{dt} = -g(1 + K^2 V^2) dz .$$

Учитывая, что $dz = V dt$ и, разделяя переменные, получим

$$\frac{VdV}{1+K^2V^2} = -gdz. \quad (1.7)$$

Решим уравнение (1.7) с учётом пределов изменения переменных

$$\int_{V_0}^0 \frac{VdV}{1+K^2V^2} = -g \int_0^H dz; \quad \frac{1}{2K^2} \int_{V_0}^0 \frac{d(1+K^2V^2)}{1+K^2V^2} = -gz \Big|_0^H; \quad (1.8)$$

$$\frac{1}{2K^2} \ln(1+K^2V^2) \Big|_{V_0}^0 = -gH; \quad -\frac{1}{2K^2} \ln(1+K^2V_0^2) = -gH;$$

$$H = \frac{1}{2K^2g} \ln(1+K^2V_0^2).$$

8) Анализ полученных результатов (1.6) и (1.8) показывает, что с увеличением начальной скорости V_0 , максимальная высота H и время подъёма T возрастают, а с увеличением коэффициента K силы сопротивления эти параметры убывают, что соответствует физической сущности явлений.

Задача 27.53 (И. В. Мещерский)

Определить движение тяжёлой материальной точки, масса которой равна m , притягиваемой к неподвижному центру O силой, прямо пропорциональной расстоянию. Движение происходит в пустоте; сила притяжения на единицу расстояния равна k^2m ; в момент $t = 0$: $x_0 = a$, $y_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$, причём ось Oy направлена по вертикали вниз.

Решение.

1) Ось Oy направим по вертикали вниз (по условию задачи), ось Ox - по горизонтали (Рис.1.3).

2) В начальный момент точка имеет координаты $x_0 = a, y_0 = 0$ и нулевую начальную скорость.

3) В произвольный момент времени положение точки определяется текущим радиус-вектором $\vec{r}\{x, y\}$ и на неё действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила притяжения $\vec{F}_i$, направленная к неподвижному центру $\hat{I}$.

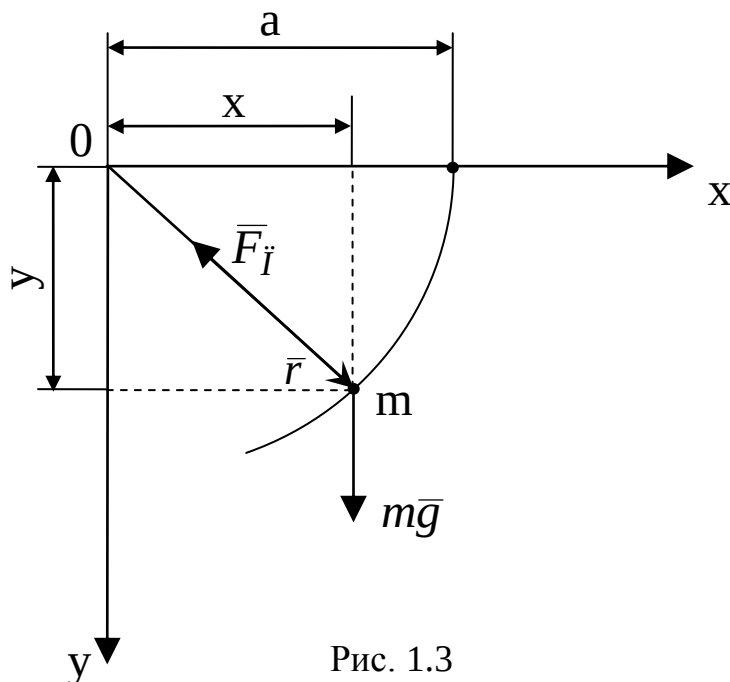


Рис. 1.3

4) Векторное дифференциальное уравнение :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m\vec{g} + \vec{F}_i \quad (1.9)$$

5) $m\vec{g}$ - постоянный вектор, а сила притяжения $\vec{F}_i$ направлена всегда против радиус-вектора $\vec{r}$, а её величина пропорциональна расстоянию точки до центра. О (т.е. пропорциональна $|\vec{r}|$) с коэффициентом $k^2 m$. Поэтому сила притяжения может быть математически представлена в виде

$$\vec{F}_i = -k^2 m \vec{r} \quad (1.10)$$

Дифференциальное уравнение (1.9) с учётом (1.10) будет

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m\vec{g} - k^2 m \vec{r}$$

или

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{g} - k^2 \bar{r} \quad (1.11)$$

6) Проектирование уравнения (1.11) на оси координат приводит к двум независимым дифференциальным уравнениям с соответствующими начальными условиями:

$$\ddot{x} = -k^2 x, \quad (1.12)$$

$$x_0 = a, \quad \dot{x}_0 = 0.$$

и

$$\ddot{y} = g - k^2 y, \quad (1.13)$$

$$y_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = 0.$$

7) Для решения поставленной задачи необходимо проинтегрировать уравнения (1.12) и (1.13). Первое из них относится к линейным однородным дифференциальным уравнениям, а второе - к линейным неоднородным второго порядка. Методы решения таких уравнений известны. Начнём с (1.12)

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (1.14)$$

$\lambda^2 + k^2 = 0$ - характеристическое уравнение, корни которого $\lambda_{1,2} = \pm ik$ - чисто мнимые. Общее решение уравнения (1.14) будет

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (1.15)$$

где $\tilde{N}_1$ и $\tilde{N}_2$ -постоянные интегрирования подлежащие определению по начальным условиям. Подставим в (1.15): $t = 0$, $x = x_0 = a$ и найдём $a = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0$, $C_1 = a$.

Дифференцируем (1.15) по времени (находим проекцию скорости точки на ось Ox)

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (1.16)$$

Подставляем в (1.16): $t = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$ и находим $0 = -C_1 k \sin 0 + C_2 k \cos 0$, $C_2 = 0$.

Таким образом, решение (1.15) с учётом найденных C_1 и C_2 будет

$$x = a \cos kt. \quad (1.17)$$

Решение неоднородного уравнения (1.13) приводится ниже:

$\ddot{y} + k^2 y = 0$ -однородное уравнение, соответствующее уравнению (1.13) того же типа, что и (1.14). Его общее решение

$$y_{\text{одн}} = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt. \quad (1.18)$$

Частное решение уравнения (1.13) предлагается отыскать в виде постоянной

$$y_{\text{ч}} = A. \quad (1.19)$$

Подставляя (1.19) в (1.13), получаем

$$0 = g - k^2 A, \quad A = \frac{g}{k^2}.$$

Общее решение уравнения (1.13), складывающееся из (1.18) и (1.19) будет

$$y = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt + \frac{g}{k^2}. \quad (1.20)$$

Постоянные интегрирования C_3 и C_4 находим по начальным условиям.

$$0 = C_3 \cos 0 + C_4 \sin 0 + \frac{g}{k^2}, \quad C_3 = -\frac{g}{k^2},$$

$$\dot{y} = -C_3 k \sin kt + C_4 k \cos kt, \quad 0 = -C_3 k \sin 0 + C_4 k \cos 0, \quad C_4 = 0.$$

Итак, решение (1.20) с учётом найденных C_3 и C_4 получается в виде

$$y = -\frac{g}{k^2} \cos kt + \frac{g}{k^2}. \quad (1.21)$$

8) Проанализируем полученные результаты. Во-первых, исключим время из (1.17) и (1.21), а именно, находя из (1.17)

$$\cos kt = \frac{x}{a}$$

подставляя в (1.21), получим

$$y = -\frac{g}{k^2 a} x + \frac{g}{k^2} \quad (1.22)$$

т.е. траектория движущейся точки лежит на прямой. Так как

$$|x| \leq a, \quad 0 \leq y \leq \frac{2g}{k^2},$$

то траекторией будет лишь отрезок прямой (1.22) (рис.1.4). Итак, в условиях поставленной задачи, точка будет совершать гармоническое колебание (1.17), (1.21) периода $2\pi/k$ на отрезке прямой (1.22) ($|x| \leq a$).

Предлагаемые задачи на дом: 27.18, 27.31, 27.49 (И.В. Мещерский).

Материальная точка называется несвободной, если она моделирует тело, на перемещение которого в пространстве наложены ограничения (существуют тела, контактно взаимодействующие с рассматриваемым), называемые связями.

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{F}(t, \bar{r}, \frac{d\bar{r}}{dt}) + \bar{R}, \quad (2.1)$$

рассматриваемое совместно с уравнениями, описывающими связи. Здесь $\bar{R}$ – равнодействующая реакций связей (сил, которыми связи действуют на рассматриваемое тело).

Векторное уравнение (2.1) эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) + R_x, \\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) + R_y, \\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) + R_z. \end{aligned} \quad (2.2)$$

рассматриваемой совместно с уравнениями, описывающими связи. R_x, R_y, R_z – проекции равнодействующей реакций на оси координат.

Если материальная точка движется по заранее заданной кривой, которая часто материальна (трубопровод, по которому движется частица топлива или рельсы, по которым движется трамвай, моделируемый точкой и т.д.), то удобно использовать систему дифференциальных уравнений, полученных проектированием (2.1) на естественные оси этой кривой (касательную, главную нормаль и бинормаль с соответствующими ортами $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$):

$$\begin{aligned} m\ddot{\sigma} &= F_\tau(t, \sigma, \dot{\sigma}) + R_\tau, \\ m \frac{\dot{\sigma}^2}{\rho} &= F_n(t, \sigma, \dot{\sigma}) + R_n, \\ 0 &= F_b(t, \sigma, \dot{\sigma}) + R_b. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ставится задача:

По заданным массе точки, активным силам к ней приложенным, уравнениям связей, найти ее движение ($x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, или $\sigma = \sigma(t)$, если используется система (2.3)), ее скорость в зависимости от времени или координат, а также $\bar{R}$ – реакцию связи.

Решение поставленной задачи сводится математически к интегрированию системы (2.2.) или (2.3) с учетом уравнений связей и при заданных начальных условиях.

Алгоритм решения подобных задач во многом аналогичен приведенному ранее алгоритму для свободной точки. Рассмотрим конкретные примеры.

Задача 31.3 (И.В. Мещерский)

По рельсам, проложенным по пути АВ и образующим затем петлю в виде кругового кольца ВС радиуса a , скатывается вагонетка массы m (рис. 2.1).

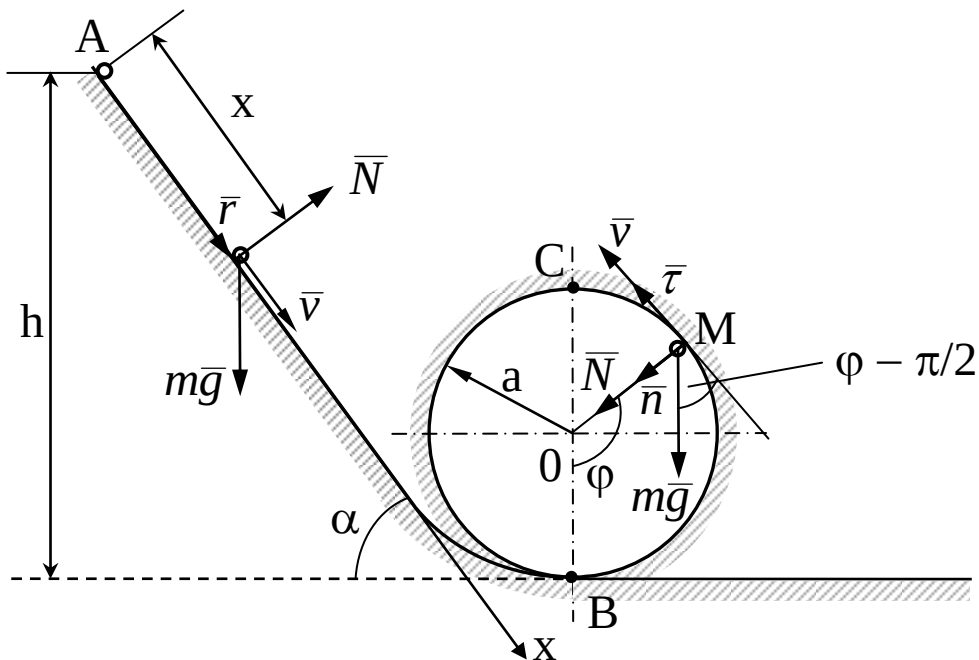


Рис. 2.1

С какой высоты h нужно пустить вагонетку без начальной скорости, чтобы она могла пройти всю окружность кольца, не отделяясь от него? Определить давление N вагонетки на кольцо в точке M , для которой $\angle MOB = \varphi$.

Решение.

Несвободное движение вагонетки, моделируемой материальной точкой, состоит из прямолинейного на участке AB и криволинейного внутри кругового кольца.

Рассмотрим движение точки на участке AB .

- 1) Ось координат Ax направляем вдоль участка AB .
- 2) Материальная точка стартует из точки A без начальной скорости.
- 3) В произвольный момент времени положение точки определяется текущей координатой x и к ней приложены сила тяжести и нормальная реакция $\bar{N}$ гладкой прямой AB .
- 4) Векторное уравнение движения точки

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = m\bar{g} + \bar{N} \quad (2.4)$$

- 5) $m\bar{g}$ и $\bar{N}$ постоянные силы.

- 6) Проекция уравнения (2.4) на ось Ax приводит к дифференциальному уравнению движения точки на участке AB :

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha, \quad (2.5)$$

где α - угол наклона прямой AB к горизонту.

7) Проинтегрируем уравнение (2.5) с целью нахождения скорости V_B точки в конце участка АВ учитывая, что $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}$ ($\mathbf{V}$ – текущая скорость точки на участке АВ)

$$\frac{dV}{dt} = g \sin \alpha, \quad dx \frac{dV}{dt} = g \sin \alpha dx, \quad (2.6)$$

$$\int_0^{V_B} V dV = g \sin \alpha \int_0^{h/\sin \alpha} dx, \quad V_B^2 = 2gh \quad .$$

Рассмотрим криволинейное движение точки внутри кругового кольца под действием сил $m\bar{g}$ и $\bar{N}$ ($\bar{N}$ – реакция кольца). Уравнения (2.3) для рассматриваемого случая будут:

$$m\ddot{\sigma} = -mg \cos(\varphi - \pi/2), \quad (2.7)$$

$$\frac{m\dot{\sigma}^2}{a} = N + g \sin(\varphi - \pi/2). \quad (2.8)$$

Если учесть, что $\dot{\sigma} = V$ (скорость точки на криволинейном участке), то уравнения (2.7) и (2.8) будут

$$\frac{dV}{dt} = -g \sin \varphi, \quad (2.9)$$

$$N = m \left(g \cos \varphi + \frac{V^2}{a} \right). \quad (2.10)$$

Чтобы определить реакцию N (давление) в текущей точке M , необходимо знать текущую скорость V . Найдем ее, интегрируя уравнение (2.9) с использованием, в качестве независимой переменной, угол φ .

$$\frac{d\varphi \cdot dV}{dt} = -g \sin \varphi \cdot d\varphi, \quad \frac{V \cdot dV}{a} = -g \sin \varphi \cdot d\varphi,$$

так как $\left(\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \frac{V}{a}\right),$

$$\int_{V_B}^V V \cdot dV = -ga \int_0^\varphi \sin \varphi d\varphi, \quad \frac{V^2}{2} \Big|_{V_B}^V = ga \cos \varphi \Big|_0^\varphi,$$

$$\frac{V^2}{2} - \frac{V_B^2}{2} = ga(\cos \varphi - 1), \quad V^2 = V_B^2 + 2ga(\cos \varphi - 1).$$

Если учесть (2.6), то

$$V^2 = 2g(h + a \cos \varphi - a). \quad (2.11)$$

Если подставить найденное выражение (2.11) для V^2 в (2.10), то величина реакции N (а значит и давление вагонетки на рельсы) в зависимости от φ будет:

$$N = mg \left(3 \cos \varphi + \frac{2h}{a} - 2 \right) \quad (2.12)$$

8) Анализ выражения (2.12) показывает, что наибольшее давление вагонетки на рельсы будет

$$N_{\max} = mg \left(1 + \frac{2h}{a} \right),$$

достигаемое при $\varphi = 0$ (в точке B), а наименьшее

$$N_{\min} = mg \left(\frac{2h}{a} - 5 \right),$$

достигаемое при $\varphi = \pi$ (в верхней точке C).

Условием прохождения вагонеткой всей окружности кольца, очевидно, будет $N_{\min} \geq 0$. Откуда

$$mg \left(\frac{2h}{a} - 5 \right) \geq 0, \quad h \geq 2,5a .$$

Задача 31.11 (И. В. Мещерский).

Лыжник при прыжке с трамплина спускается с эстакады АВ, наклоненной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту (Рис 2.2).

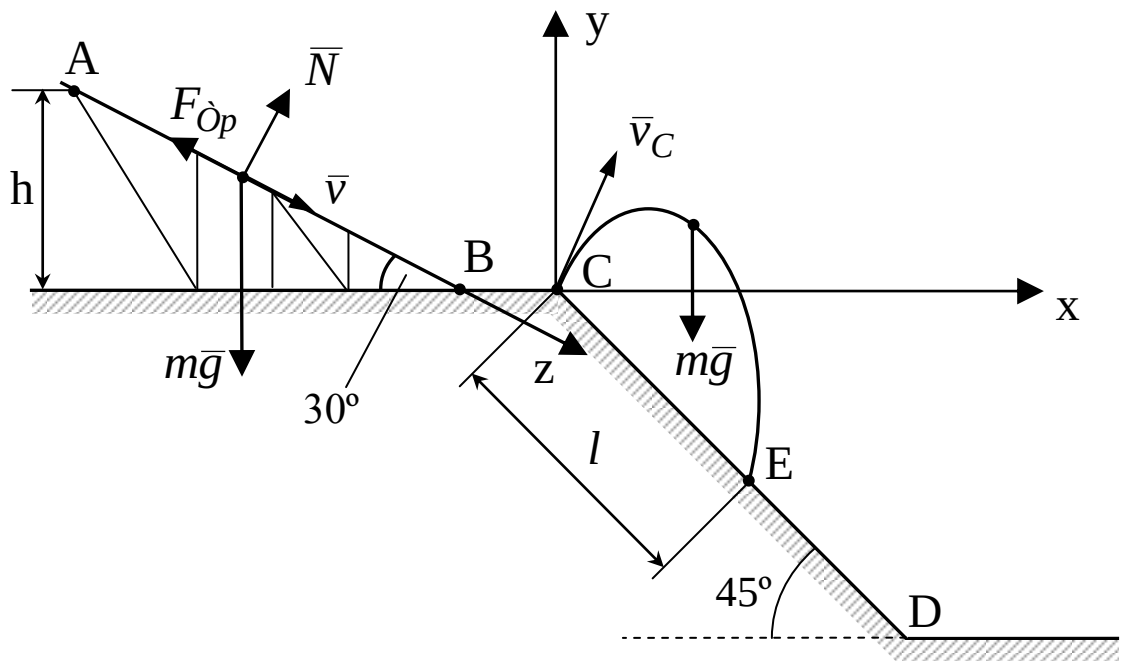


Рис. 2.2

Перед отрывом он проходит небольшую горизонтальную площадку ВС, длиной которой при расчете пренебрегаем. В момент отрыва лыжник толчком сообщает себе вертикальную составляющую скорости $V_y = 1 \text{ м/с}$. Высота эстакады $h = 9 \text{ м}$, коэффициент трения лыж о снег $f = 0,08$, линия приземления CD образует угол $\beta = 45^\circ$ с горизонтом. Определить дальность l полета лыжника, пренебрегая сопротивлением воздуха. Дальностью полета считать длину, измеряемую от точки отрыва С до точки приземления лыжника на линии CD.

Решение.

Движение лыжника, моделируемого материальной точкой, состоит из не-свободного прямолинейного на участках АВ и ВС и свободного по некоторой криволинейной траектории.

Моделирование движения точки на участке АВ и нахождение её скорости в точке В аналогичны рассмотренным в предыдущей задаче и приводятся ниже без подробных пояснений.

Уравнение движения точки на участке АВ (вдоль оси AZ) будет

$$m\ddot{z} = mg \sin 30^\circ - F_{\text{тр}}, \quad (2.13)$$

где $F_{\text{тр}} = fN = fmg \cos 30^\circ$ - сила трения.

Уравнение (2.13), с учетом выражения для силы трения, примет вид

$$\ddot{z} = \frac{g}{2}(1 - \sqrt{3}f)$$

или, с учетом числовых значений $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ и $f = 0,08$

$$\ddot{z} = 4.22. \quad (2.14)$$

Уравнение (2.14) в новых переменных $\dot{z} = V$ (скорость прямолинейного движения точки)

$$\frac{dV}{dt} = 4,22; \quad \frac{dz \cdot dV}{dt} = 4,22 \cdot dz; \quad VdV = 4,22 \cdot dz;$$

$$\left(AB = \frac{h}{\sin 30^\circ} \right), \quad \int_0^{V_B} VdV = 4,22 \int_0^{18} dz; \quad \frac{V_B^2}{2} = 4,22 \cdot 18; \quad V_B \approx 12,32 \text{ м/с}.$$

Моделирование криволинейного движения осуществим в осях ХСҮ. Начальными условиями для этого движения будут $x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = V_{cx}, \quad \dot{y}_0 = V_{cy}$ ($V_{cx} = V_B = 12,32 \text{ м/с}$, так как на большом горизонтальном участке ВС величина скорости практически не изменится, $V_{cy} = 1 \text{ м/с}$).

Свободное движение точки происходит под действием лишь силы тяжести. Её уравнением движения будет

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = m \bar{g} \quad (2.15)$$

Проекция уравнения (2.15) на оси С х и С у приводят к дифференциальным уравнениям:

$$\ddot{x} = 0, \quad (2.16)$$

$$\ddot{y} = -g. \quad (2.17)$$

Интегрируем уравнение (2.16)

$$\dot{x} = C_1 = V_{Cx} = 12,32 \text{ м/с}, \quad x = 12,32t + C_2, \quad C_2 = 0 \quad (\text{т.к. при } t=0, x = x_0 = 0).$$

Итак, решение

$$x = 12,32t. \quad (2.18)$$

Интегрируем уравнение (2.17)

$$\dot{y} = -gt = C_3; \quad C_3 = V_{cy} = 1,$$

(так как при $t=0$, $\dot{y} = \dot{y}_0 = 1 \text{ м/с}$)

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_3t + C_4$$

или $y = -4,9t^2 + t + C_4$; $C_4 = 0$, (так как при $t=0$, $y = y_0 = 0$).

Итак, решение

$$y = -4,9t^2 + t. \quad (2.19)$$

Найдем уравнение траектории свободного движения точки исключая время t из (2.18) и (2.19):

$$t = \frac{x}{12,32}; \quad y = -\frac{4,9}{12,32}x^2 + \frac{1}{12,32}x \quad (2.20)$$

$$y = -0,032x^2 + 0,081x.$$

Для нахождения дальности l полета определим координаты точки Е (точки пересечения параболической траектории (2.20) с прямой $y = -x$ - прямой CD). Т. е. решим систему:

$$\begin{aligned}y &= -0,032x^2 + 0,081x, \\ y &= -x.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Используя метод подстановки, получим

$$\begin{aligned}-x &= -0,032x^2 + 0,081x, & 0,032x^2 - 1,081x &= 0, \\ x_1 &= 0, & x_2 = x_E &= 33,78 \text{ м}, \\ y_2 &= -x_2 = -33,78 \text{ м}, & l = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} &= 47,7 \text{ м}.\end{aligned}$$

Предлагаемые задачи на дом: 31.9, 31.22 (И. В. Мещерский).

2.ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ(1 ЗАНЯТИЕ 2 ЧАСА)

ЗАНЯТИЕ 3.СОСТАВЛЕНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.

Занятие посвящено приобретению навыков решения следующей задачи.

Дано: движение подвижной системы координат Oxy по отношению к неподвижной $O_1x_1y_1z_1$ (переносное движение), активные силы (F - равнодействующая всех активных сил), уравнения, описывающие связи, если точка в движущей системе координат несвободна (рис 3.1).

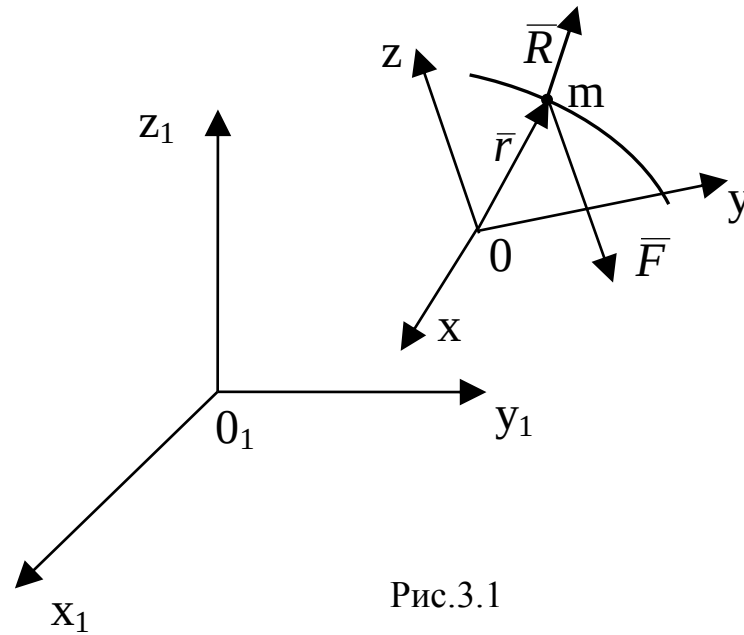


Рис.3.1

Найти: движение точки по отношению к движущейся системе координат (относительное движение $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$) и реакцию связей R , если точка не-свободна. Как известно из теории, математической моделью динамики материальной точки в движущейся (неинерциальной системе координат $Ox y z$) является векторное дифференциальное уравнение

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{F} \left(t, \bar{r}, \frac{d\bar{r}}{dt} \right) + \bar{R} + \bar{O}_e + \bar{O}_k, \quad (3.1)$$

где $\bar{r}$ - радиус - вектор движущейся точки в подвижной системе координат, $\frac{d\bar{r}}{dt}$ и $\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}$ - первая и вторая относительные производные радиуса – вектора r (производные, найденные без учета движения подвижной системы координат, имеющие смысл относительной скорости V_r и относительного ускорения движущейся точки)

$$\overline{\hat{O}_{\hat{a}}} = -m\overline{a_e}, \quad (3.2)$$

$$\overline{\hat{O}_k} = -m\overline{a_k}, \quad (3.3)$$

переносная и кориолисова силы инерции соответственно. При этом a_e – переносное, a_k – кориолисово ускорения (см. раздел «Кинематика» курса теоретической механики).

Добавление в уравнение (3.1) сил $\overline{\hat{O}_e}$ и $\overline{\hat{O}_{\hat{e}}}$ учитывает влияние подвижной системы координат на относительное движение точки.

Уравнение (3.1) эквивалентно системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) + R_x + \hat{O}_{ex} + \hat{O}_{kx}, \\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) + R_y + \hat{O}_{ey} + \hat{O}_{ky}, \\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) + R_z + \hat{O}_{ez} + \hat{O}_{kz}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

которая математически моделирует динамику относительного движения точки (динамику точки в неинерциальной системе координат).

Решение поставленной задачи, если составлена система (3.4), сводится, очевидно, к её интегрированию с учетом связей и при заданных начальных условиях (в начальный момент должно быть известно положение точки в подвижной системе координат и её начальная относительная скорость).

Рассмотрим конкретный пример.

Задача 33.14 (И.В. Мещерский)

Трубка АВ вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси CD, составляя с ней неизменный угол 45° (рис. 3.2). В трубке находится

тяжелый шарик М. Определить движение этого шарика относительно трубки, если начальная скорость его равна нулю и начальное расстояние от точки О равно a , трением пренебречь.

Поставим дополнительный вопрос к этой задаче: «Найти давление шарика на стенку трубки в произвольный момент времени».

Решение:

Свяжем с вращающейся трубкой подвижные оси координат: ось Ox направим вдоль оси трубки. Ось Oy – перпендикулярно оси трубки в плоскости, содержащей эту ось и ось вращения CD . Осью Oz дополним оси Ox и Oy до правой системы координат (рис. 3.2).

Начальное положение точки в трубке определяется координатой $x_0 = a$. Начальная относительная скорость равна нулю. В текущий момент времени t положение точки определяется координатой x , а её текущая относительная скорость $\overline{V_r} (V_r = \dot{x})$.

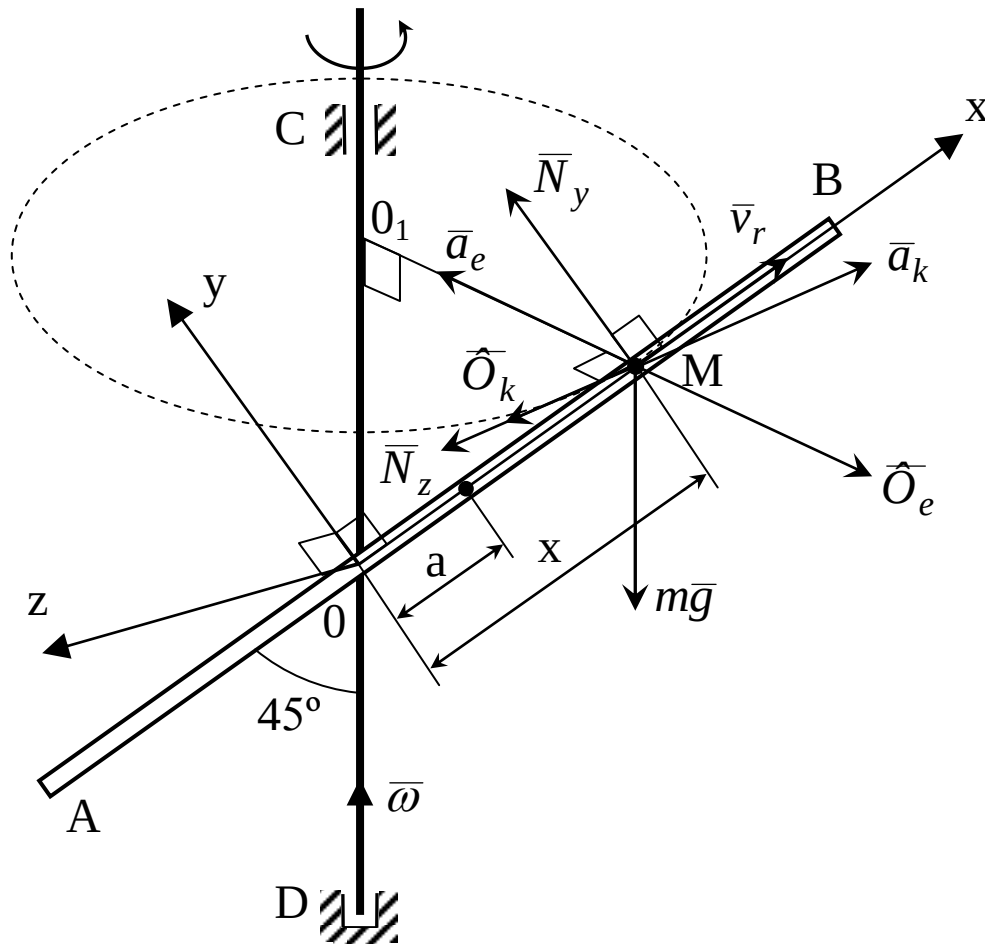


Рис. 3.2

К точке приложена активная сила тяжести $m\bar{g}$, нормальная реакция стенки трубки (трение не учитывается), представленная двумя её составляющими $\overline{N}_y$ и $\overline{N}_z$ (см. рис. 3.2)

Добавим, приложив к точке, переносную и кориолисову силы инерции согласно формулам (3.2) и (3.3).

Сила $\overline{F}_e$ направлена против переносного ускорения $\overline{a}_e$, а её величина пропорциональна (с коэффициентом m) величине этого ускорения. Так как переносное движение равномерное вращение трубки, то,

$$a_e = \omega^2 \cdot MO_1 = \omega^2 x \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \omega^2 x$$

вектор же $\bar{a}_e$ направлен к оси вращения. В итоге

$$\hat{O}_e = \frac{\sqrt{2}}{2} m \omega^2 x \quad (3.5)$$

Направление вектора $\bar{\Phi}_e$ показано на Рис.3.2.

Сила $\bar{\Phi}_k$ направлена против кориолисова ускорения $\bar{a}_k = 2(\bar{\omega} \times \bar{V}_r)$ (вектор $\bar{\omega}$ направлен вдоль оси вращения CD), а её величина пропорциональна (с коэффициентом m) величине этого ускорения. Вектор $\bar{a}_k$ определяется векторным произведением, а потому направлен перпендикулярно плоскости xOy (в ней лежат векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{V}_r$) в соответствующую сторону (параллельно оси Oz в противоположную сторону). Величина его равна $a_k = 2\omega \dot{x} \sin 45^\circ = \sqrt{2}\omega \dot{x}$.

В итоге

$$\hat{O}_k = \sqrt{2} m \omega \dot{x}. \quad (3.6)$$

Направление вектора $\bar{\Phi}_k$ показано на Рис.3.2.

Векторные уравнения (3.1) для нашей задачи будет:

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = m \bar{g} + \bar{N}_y + \bar{N}_z + \bar{\hat{O}}_e + \bar{\hat{O}}_k. \quad (3.7)$$

Проектируя (3.7) на ось Ox (вдоль этой оси точка совершает прямолинейное относительное движения), получим:

$$m \ddot{x} = -mg \cos 45^\circ + \hat{O}_e \sin 45^\circ.$$

Учитывая (3.5), приходим к дифференциальному уравнению относительного движения точки вида:

$$\ddot{x} - x\omega^2/2 = -g\sqrt{2}/2. \quad (3.8)$$

Методы решения линейных неоднородных уравнений вида (3.8) известны. Проведем соответствующие выкладки.

$\lambda^2 - \omega^2/2 = 0$ - характеристическое уравнение с корнями $\lambda_{1,2} = \pm\omega\sqrt{2}/2$.

$x_{\text{г\ddot{a}i}} = C_1 e^{(\sqrt{2}/2)\omega t} + C_2 e^{(-\sqrt{2}/2)\omega t}$ - общее решение соответствующего однородного уравнения (C_1 и C_2 - постоянные интегрирования);

$x_{\text{д\ddot{a}n\grave{o}}} = A$ - частное решение уравнения (3.8) (A - постоянная величина подлежащая определению подстановкой $x_{\text{д\ddot{a}n\grave{o}}} = A$ в уравнение (3.8))
 $-A\omega^2/2 = -g\sqrt{2}/2$; $A = \sqrt{2}g/\omega^2$. В итоге, решение уравнения (3.8) будет

$$x = C_1 e^{(\sqrt{2}/2)\omega t} + C_2 e^{(-\sqrt{2}/2)\omega t} + \sqrt{2}g/\omega^2. \quad (3.9)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определим с помощью начальных условий (при $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$).

$$\begin{aligned} a &= C_1 + C_2 + \sqrt{2}g/\omega^2; \\ \dot{x} &= \omega\frac{\sqrt{2}}{2}C_1 e^{(\sqrt{2}/2)\omega t} - \omega\frac{\sqrt{2}}{2}C_2 e^{(-\sqrt{2}/2)\omega t}; \\ 0 &= \omega(\sqrt{2}/2)C_1 - \omega(\sqrt{2}/2)C_2, \quad C_1 = C_2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{2}g/\omega^2). \end{aligned}$$

С учётом найденных C_1 и C_2 , решение (3.9) примет вид:

$$x = \frac{1}{2}(a - \sqrt{2}g/\omega^2)(e^{(\sqrt{2}/2)\omega t} + e^{(-\sqrt{2}/2)\omega t}) + \sqrt{2}g/\omega^2,$$

или

$$x = (a - \sqrt{2}g/\omega^2)ch((\sqrt{2}/2)\omega t) + \sqrt{2}g/\omega^2. \quad (3.10)$$

Анализ полученного закона движения шарика вдоль трубки (3.10) показывает, что:

а) если $a > \sqrt{2}g/\omega^2$, то шарик из начального положения будет двигаться всё время вверх по трубке и в некоторый момент времени покинет её в точке В;

б) если $a < \sqrt{2}g/\omega^2$, то – вниз по трубке и покинет её в точке А;

в) если $a = \sqrt{2}g/\omega^2$, то $x = x_0 = a = \sqrt{2}g/\omega^2 = Const$, т.е. шарик будет сохранять относительный покой.

Для нахождения давления шарика на стенку, спроектируем (3.7) на оси Oy и Oz :

$$0 = -mg \sin 45^\circ + \hat{O}_e \cos 45^\circ + N_y, \quad 0 = N_z + \hat{O}_k$$

Учитывая (3.5) и (3.6) получим

$$N_y = \frac{m}{2}(\sqrt{2}g + \omega^2 x), \quad N_z = -\sqrt{2}m\omega \dot{x}.$$

Итак, окончательно, величина реакции стенки трубки, а значит и величина давления шарика на стенку будет:

$$N = \sqrt{N_y^2 + N_z^2} = m/2 \sqrt{(\sqrt{2}g + \omega^2 x)^2 + 8\omega^2 \dot{x}^2}. \quad (3.11)$$

Выражение (3.11) позволяет найти давление шарика на стенку трубки в любой, интересующий нас, момент времени, так как зависимости $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ ранее получены.

Предлагаемые задачи на дом 33.7, 39.4 (И.В. Мещерский).

3. ТЕОРЕМЫ О КОЛИЧЕСТВЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ И ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС СИСТЕМЫ.(1 ЗАНЯТИЕ, 2 ЧАСА)

ЗАНЯТИЕ 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Любая совокупность материальных точек, каким либо образом взаимодействующих между собой, называется материальной системой (рис. 4.1).

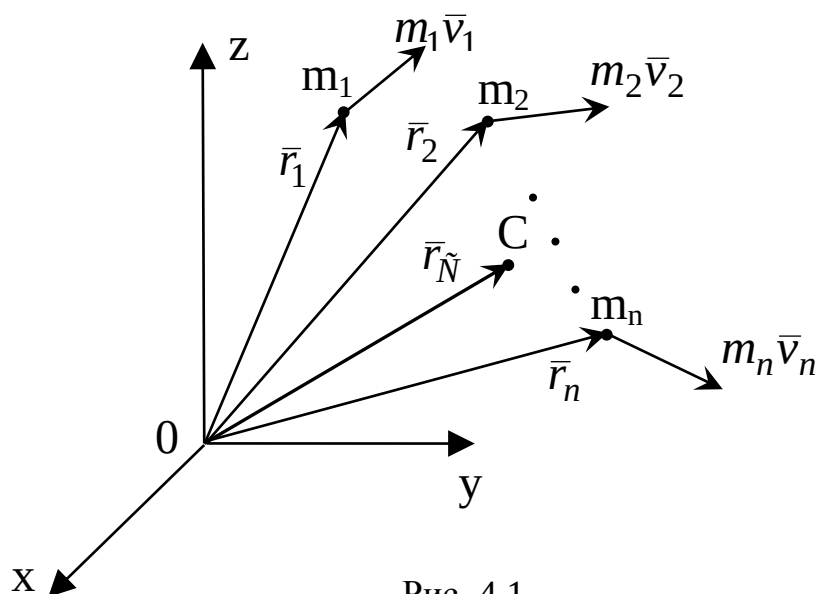


Рис. 4.1

Очевидно, что, введённая ранее модель АТТ (абсолютно твёрдое тело), является частным видом материальной системы.

Массой материальной системы называется сумма масс всех её точек, т.е.

$$M = \sum_{s=1}^n m_s$$

Центром масс материальной системы называется геометрическая точка, радиус – вектор которой определяется равенством:

$$\bar{r}_C = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^n m_s \bar{r}_s,$$

где $\bar{r}_s$ - радиус – вектор s-ой точки системы, а координаты – формулами:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{M} \sum_{s=1}^n m_s x_s, \\ y_C &= \frac{1}{M} \sum_{s=1}^n m_s y_s \\ z_C &= \frac{1}{M} \sum_{s=1}^n m_s z_s. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В формулах (4.1) x_s, y_s, z_s – координат s-ой точки системы.

В динамике материальной системы силы, приложенные к её точкам, делятся на внешние и внутренние. Силы, приложенные к точкам системы, называются внешними, если они вызваны действием точек или тел не входящих в систему ($\overline{F_s^e}$ – равнодействующая всех внешних сил приложенных к s-ой точке системы). Силы взаимодействия между точками рассматриваемой системы называются внутренними ($\overline{F_s^i}$ – равнодействующая всех внутренних сил приложенных к s-ой точке системы).

Известны свойства внутренних сил любой системы, а именно, главный вектор внутренних сил и их главный момент относительно любой точки равны нулю, т.е.:

$$\begin{aligned} \bar{R}^i &= \sum_{s=1}^n \bar{F}_s^i = 0, \\ \bar{M}_O^i &= \sum_{s=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_s^i) = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Количеством движения материальной точки называется вектор, равный произведению массы точки на её вектор скорости (рис. 4.1), т.е. $m_s \bar{V}_s (s = 1, 2, \dots, n)$.

Количеством движения материальной системы называется вектор $\bar{Q}$, равный векторной сумме (главному вектору) количеств движения всех её точек:

$$\bar{Q} = \sum_{s=1}^n m_s \bar{V}_s. (4.3)$$

Если воспользоваться определением центра масс системы, то находить её количество движения можно по формуле

$$\bar{Q} = M \bar{V}_c (4.4)$$

где $\bar{V}_c$ – скорость центра масс. Формула (4.4) особенно эффективна для нахождения количества движения такой системы, как А.Т.Т.

Формулировка теоремы о количестве движения системы такова: «производная по времени от количества движения системы равна векторной сумме (главному вектору) всех внешних сил этой системы»

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^e (4.5)$$

где

$$\bar{R}^e = \sum_{s=1}^n \bar{F}_s^e.$$

В проекциях на координатные оси

$$\begin{aligned}\frac{dQ_x}{dt} &= R_x^e = \sum F_{sx}^e, \\ \frac{dQ_y}{dt} &= R_y^e = \sum F_{sy}^e, \\ \frac{dQ_z}{dt} &= R_z^e = \sum F_{sz}^e.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Очевидно

$$Q_x = \sum m_s \dot{x}_s, \quad Q_y = \sum m_s \dot{y}_s, \quad Q_z = \sum m_s \dot{z}_s.$$

Теорема (4.5) и её скалярный аналог (4.6) допускают следствия:

1) Внутренние силы непосредственно не влияют на изменение количества движения системы;

2) Если $\overline{R^e} = 0$, то $\overline{Q} = \overline{const}$ (количество движения системы сохраняется)

3) Если, например, $R_x^e = 0$, то $Q_x = \sum m_s \dot{x}_s = const$ (проекция количества движения системы на ось Ox сохраняется).

Рассмотрим примеры.

Задача 36.9 (И.В. Мещерский)

По горизонтальной платформе А, движущейся по инерции со скоростью V_0 , перемещается тележка В (Рис. 4.2) с постоянной относительной скоростью U_0 . В некоторый момент времени тележка была заторможена. Определить общую скорость V платформы с тележкой после её остановки, если M - масса платформы, а m - масса тележки.

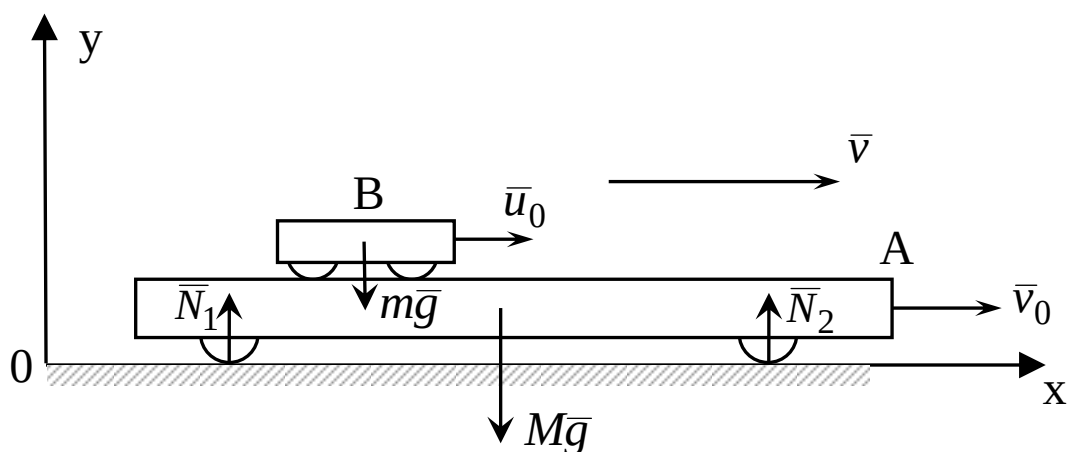


Рис. 4.2

Решение:

1) Рассмотрим систему, состоящую из двух взаимодействующих тел (платформы и тележки).

2) Выберем систему координат (оси xOy , Рис 4.2).

3) В произвольный момент времени t приложим к точкам системы внешние силы (силы тяжести платформы и тележки $M\bar{g}$ и $m\bar{g}$; реакции внешней связи – рельсов $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$). По условию задачи, внешними силами сопротивления движению платформы пренебрегаем.

4) Выясним, каким свойством обладают внешние силы системы. (В нашей задаче все внешние силы вертикальны, а потому сумма проекции всех внешних сил на ось Ox равна нулю, т.е. $R_x^e = 0$. Имеет место следствие 3) теоремы о количестве движения, а именно $Q_x = const$).

5) Реализуем свойство сохранения количества движения нашей системы в проекции на ось ox .

$Q_x = MV_0 + m(V_0 + U_0)$ - количество движения системы до торможения тележки (здесь учтено, что $V_0 + U_0$ - проекция абсолютной скорости тележки на ось ox)

$Q_x = (M + m)V$ - количество движения системы после торможения тележки (здесь V – проекция скорости платформы вместе с тележкой на ось Ox). Далее

$$MV_0 + m(V_0 + U_0) = (M + m)V, \quad (4.7)$$

$$V = V_0 + \frac{m}{M + m}U_0.$$

6) Анализ результата (4.7) показывает, что скорость платформы после торможения тележки увеличится, при этом это увеличение тем больше, чем больше относительная скорость U_0 тележки и тем меньше, чем больше масса платформы по отношению к массе тележки.

Теорема о движении центра масс математически записывается в виде:

$$M\bar{a}_c = \bar{R}^e \quad (4.8)$$

и читается: «центр масс материальной системы движется как материальная точка, массы равной массе всей системы и если к ней приложить силу, равную главному вектору всех внешних сил системы».

В выражении (4.8) $\bar{a}_c = \dot{\bar{V}}_c = \ddot{\bar{r}}_c$ – ускорение центра масс.

В проекциях на оси координат

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_c &= R_x^e = \sum F_{sx}^e, \\ M\ddot{y}_c &= R_y^e = \sum F_{sy}^e, \\ M\ddot{z}_c &= R_z^e = \sum F_{sz}^e. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Теорема (4.8) и её скалярный аналог (4.9) допускают следствия:

1) внутренние силы непосредственно не влияют на движение центра масс системы;

2) если $\bar{R}^e = 0$, то $\bar{a}_c = 0$ и $\bar{V}_c = \overline{\dot{nonst}}$ – центр масс системы движется равномерно и прямолинейно или покоится (если $\bar{V}_c = 0$ в начальный момент);

3) если, например, $R_x^e = 0$, то $\ddot{x}_c = 0$ и $\dot{x}_c = \text{Const}$ – центр масс системы движется так, что проекция его скорости на ось Ox не меняется или равна нулю (если $\dot{x}_c = 0$ в начальный момент);

4) если система представляет собой АТТ, движущееся поступательно, то (4.9) – дифференциальные уравнения движения такого тела.

Рассмотрим пример.

Задача 35.10 (И.В. Мещерский)

Электрический мотор массы M_1 установлен без креплений на гладком горизонтальном фундаменте; на валу мотора под прямым углом закреплён одним концом однородной стержень длины 2ℓ и массы M_2 , на другой конец стержня насажен точечный груз массы M_3 ; угловая скорость вала равна ω (Рис. 4.3)

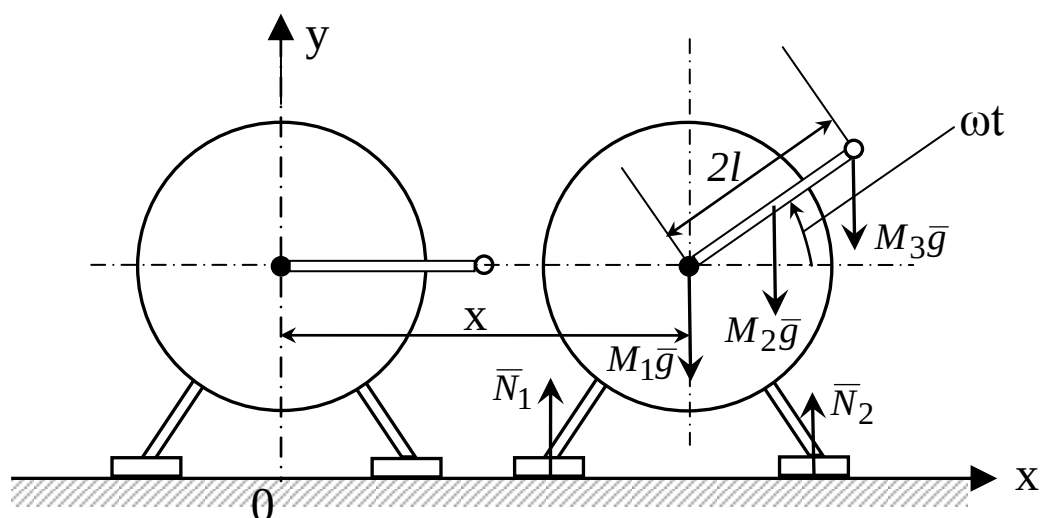


Рис. 4.3

Определить: 1) горизонтальное движение мотора; 2) наибольшее горизонтальное усиление R , действующее на болты, если ими будет закреплён кожух электромотора на фундаменте.

Решение.

Рассмотрим материальную систему, состоящую из корпуса мотора, стержня и точечного груза.

1) Ось Ox системы, координат направим вдоль фундамента, а ось Oy – вертикально через центр мотора в его начальном положении (считаем, что стержень в начальный момент горизонтален).

2) В произвольный момент времени t положение мотора определяется текущей координатой x а положение стержня текущим углом $\varphi = \omega t$ (вращение равномерное). Внешними силами, приложенными к точкам системы при предположении, что фундамент гладкий, будут силы тяжести $M_1 \bar{g}$, $M_2 \bar{g}$, $M_3 \bar{g}$ и нормальные реакции фундамента $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$.

3) Характер внешних сил таков, что сумма их проекций на ось Ox равна нулю, т.е. $R_x^e = 0$. Имеет место следствие 3) теоремы о движении центра масс

системы, т.е. во всё время движения, координата x_c её центра масс постоянна ($\dot{x}_c = 0$, так как система начинает двигаться из состояния покоя, а потому $x_{\tilde{H}} = \text{Const}$).

4) Реализуем найденное свойство системы. В начальный момент (см. первую формулу из (4.1) и рис. 4.3)

$$x_c = \frac{M_1 \cdot 0 + M_2 \ell + M_3 \cdot 2\ell}{M_1 + M_2 + M_3} = \frac{(M_2 + 2M_3)\ell}{M_1 + M_2 + M_3}.$$

В произвольный момент

$$\frac{M_1 x + M_2(x + \ell \cos \omega t) + M_3(x + 2\ell \cos \omega t)}{M_1 + M_2 + M_3} = x + \frac{(M_2 + 2M_3)\ell}{M_1 + M_2 + M_3} \cos \omega t$$

Далее, приравнявая выражения для x_c получим:

$$\frac{(M_2 + 2M_3)\ell}{M_1 + M_2 + M_3} = x + \frac{(M_2 + 2M_3)\ell}{M_1 + M_2 + M_3} \cos \omega t$$

откуда

$$x = \frac{(M_2 + 2M_3)\ell}{M_1 + M_2 + M_3} (1 - \cos \omega t) \quad (4.10)$$

Результат (4.10) показывает, что корпус мотора будет совершать гармонические колебания вдоль оси Ox с амплитудой

$$\frac{(M_2 + 2M_3)\ell}{M_1 + M_2 + M_3}$$

и периодом $\frac{2\pi}{\omega}$.

Закрепим теперь корпус мотора на фундаменте (рис. 4.4), тогда к внешним силам, приложенным к точкам системы добавятся горизонтальные реакции болтов $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$.

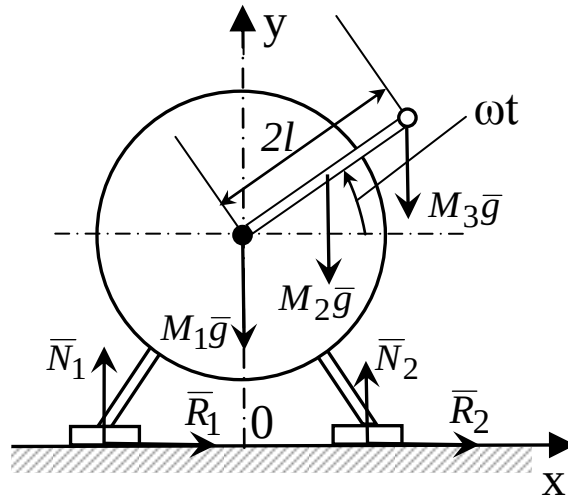


Рис. 4.4

Равнодействующая этих реакций $\bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2$ равна по величине, очевидно, горизонтальному усилию, действующему на болты со стороны мотора.

Применив к динамике нашей системы теорему о движении её центра масс в проекции на ось Ох (первое из выражений (4.9)) получим:

$$(M_1 + M_2 + M_3)\ddot{x}_c = R. \quad (4.11)$$

Из (4.11) ясно, что для нахождения усилия R, необходимо найти $x_c(t)$ и затем $\ddot{x}_c(t)$.

$$x_C = \frac{M_1 \cdot 0 + M_2 \ell \cos \omega t + M_3 2\ell \cos \omega t}{M_1 + M_2 + M_3} = \frac{(M_2 + 2M_3)\ell}{M_1 + M_2 + M_3} \cos \omega t \quad (4.12)$$

(см. (4.1) и рис. 4.4.)

$$\ddot{x}_C = -\frac{(M_2 + 2M_3)\ell \omega^2}{M_1 + M_2 + M_3} \cos \omega t. \quad (4.13)$$

Подставляя (4.13) в (4.11) получим:

$$R = -(M_2 + M_3)\ell \omega^2 \cos \omega t. \quad (4.14)$$

Результат (4.14) показывает, что на болты действует горизонтальное усилие переменное как по величине, так и по направлению. Наибольшее его значение будет:

$$R_{\max} = (M_2 + 2M_3)\ell \omega^2.$$

Предполагаемые задачи на дом: 35.17, 36.10.(И.В.Мещерский)

4.ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА(1 ЗАНЯТИЕ, 2 ЧАСА)

ЗАНЯТИЕ 5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Наряду с динамической характеристикой – количеством движения материальной точки $m_S \overline{V_S}$, вводятся понятия момента количества движения относительно неподвижной точки и оси по тем же правилам, что и, введенные ра-

нее, понятия момента силы относительно точки и оси. На основании этого, момент количества движения точки находится с помощью векторного произведения, а именно $\overline{M}_O(m_s \overline{V}_s) = (\overline{r}_s \times m_s \overline{V}_s)$ (Рис.5.1).

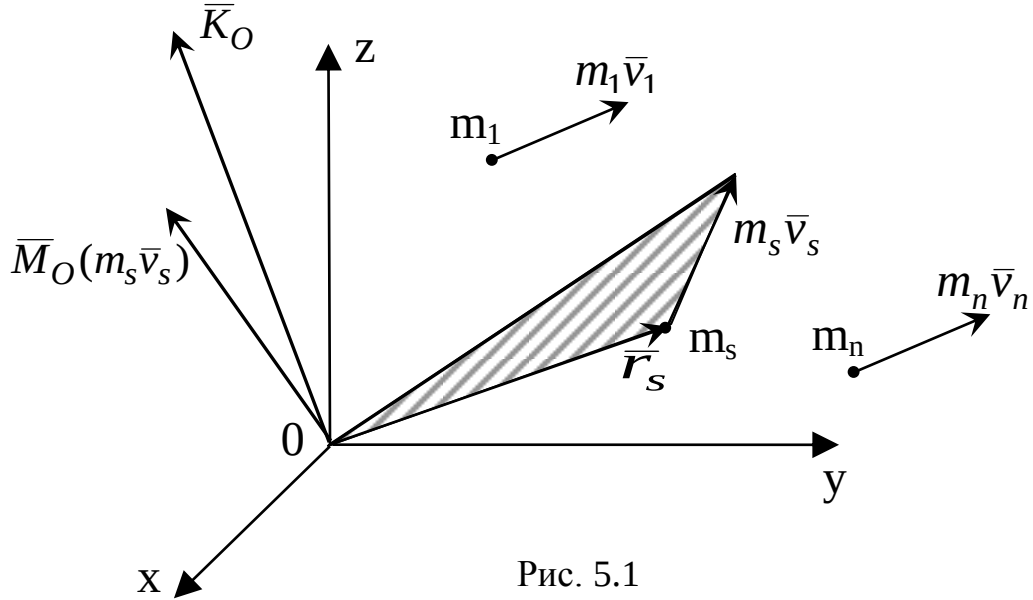


Рис. 5.1

Кинетическим моментом материальной системы относительно неподвижного центра О называется вектор $\overline{E}_O$, равный векторной сумме моментов количеств движения всех ее точек, вычисленных относительно того же центра О.

$$\overline{K}_O = \sum_{s=1}^n \overline{M}_O(m_s \overline{V}_s). \quad (5.1)$$

Проекции вектора (5.1) на оси координат есть, соответственно, кинетические моменты относительно этих осей и равны:

$$\begin{aligned} K_x &= \sum M_x(m_s \overline{V}_s), \\ K_y &= \sum M_y(m_s \overline{V}_s), \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$K_z = \sum M_z(m_s \bar{V}_s).$$

В частности, если система есть тело, вращающиеся вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью ω , то его кинетический момент относительно этой оси равен

$$K_z = J_z \omega \quad (5.3)$$

Здесь J_z - момент инерции тела относительно оси Oz .

Напомним, что под моментом инерции системы относительно оси понимается:

$$J_z = \sum_{s=1}^n m_s h_s^2, \quad (5.4)$$

где h_s - расстояние s -ой точки до оси Oz . Для твердого тела вычисление момента инерции сводится к интегрированию, а именно:

$$J_z = \int_{(V)} \rho h^2 dv, \quad (5.5)$$

где ρ - плотность.

Формулировка теоремы о кинетическом моменте системы относительно неподвижного центра: “производная на времени от кинетического момента системы, вычисленного относительно неподвижного центра, равна главному моменту внешних сил этой системы относительно того же центра”. Её математическое выражение:

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{M}_0^e = \sum_{s=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_s^e). \quad (5.6)$$

В проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} &= M_x^e = \sum M_x(\bar{F}_s^e), \\ \frac{dK_y}{dt} &= M_y^e = \sum M_y(\bar{F}_s^e), \\ \frac{dK_z}{dt} &= M_z^e = \sum M_z(\bar{F}_s^e). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Следствия:

1) внутренние силы непосредственно не влияют на изменение кинетического момента системы;

2) если $\bar{M}_0^e = 0$, то $\bar{K}_0 = \overline{const}$ (вектор кинетического момента системы сохраняется);

3) если, например, $M_z^e = 0$, то $K_z = const$ (вектор кинетического момента системы относительно оси Oz сохраняется).

4) если система есть тело, вращающиеся вокруг неподвижной оси Oz под действием внешних сил, то теорема о кинетическом моменте системы относительно этой оси (см. (5.7)) с учетом (5.3) приводит к дифференцированному уравнению

$$J_z \ddot{\varphi} = M_z^e(t, \varphi, \dot{\varphi}), \quad (5.8)$$

где φ - угол поворота тела.

Рассмотрим примеры и применения теоремы.

Задача 37.52 (И.В. Мещерский)

Круглая горизонтальная платформа может вращаться без трения вокруг неподвижной оси Oz , проходящей через её центр O_i по платформе на неизменном расстоянии от оси Oz , равном r , идёт с постоянной относительной скоростью U человек, масса которого, равна M_1 (Рис. 5.2).

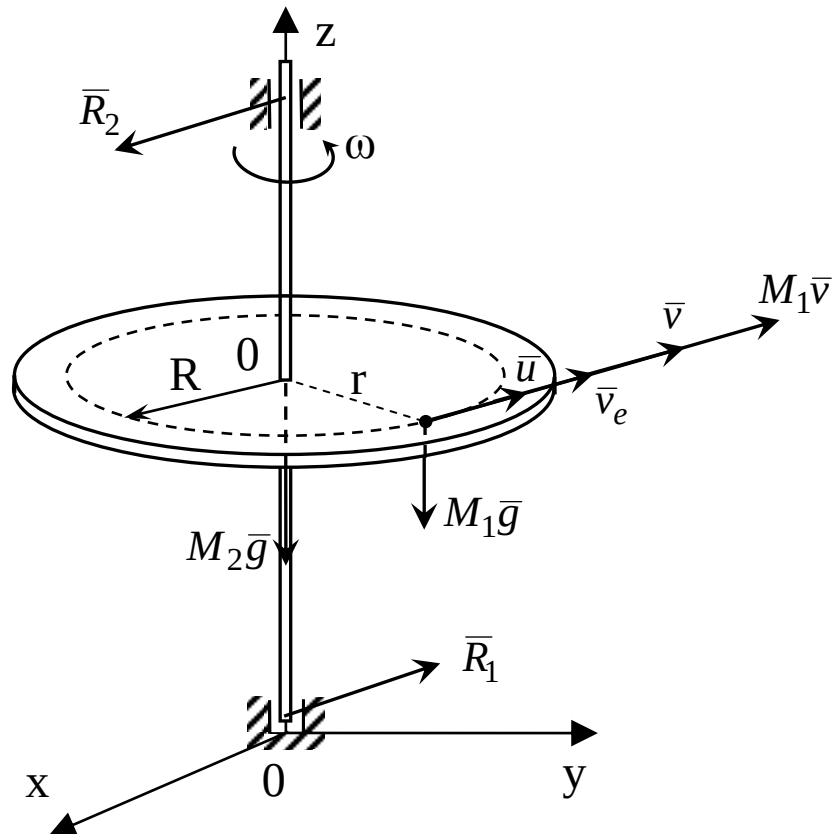


Рис. 5.2

С какой угловой скоростью ω будет при этом вращаться платформа вокруг оси, если массу её M_2 можно считать равномерно распределенной по площади круга радиуса R , а в начальный момент платформа и человек имели скорость, равную нулю.

Решение.

Рассмотрим систему, состоящую из платформы и человека, движущуюся в системе координат $x y z$. Внешние силы, приложенные к точкам системы: $M_1 \bar{g}$ и $M_2 \bar{g}$ - силы тяжести платформы и человека; $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$ - реакции подшипников.

Как видим (Рис. 5.2), внешние силы или параллельны оси $O z$, или её пересекают, а потому сумма их моментов относительно оси $O z$ равна нулю. Т.е. $M_z^e = 0$ и следствие 3) приводит к сохранению кинетического момента системы платформа – человек относительно оси $O z$. Поскольку система начинает движение из состояния покоя, то сохраняется нулевое значение её кинетического момента. А именно $K_z = 0 = const$.

Реализуем сохранение кинетического момента $K_z = 0$, предположив, что после начала движения человека по платформе с относительной скоростью U , сама платформа будет вращаться с некоторой угловой скоростью ω вокруг оси $O z$ (Рис. 5.2.).

$$0 = K_z = K_z^{(1)} + K_z^{(2)}, \quad (5.9)$$

где

$$K_z^{(1)} = J_z \omega \quad (5.10)$$

- кинетический момент платформы (см. (5.3)), при этом, $J_z = \frac{M_2 R^2}{2}$, так как платформа – однородный диск;

$K_z^{(2)} = M_z(M_1 \bar{V})$ - момент количества движения человека относительно оси Oz , при этом, $\bar{V}$ - вектор абсолютной скорости человека.

Кинематика сложного движения точки говорит о том, что $\bar{V} = \bar{V}_r + \bar{V}_e$, где $\bar{V}_r = \bar{U}$ - скорость человека относительно платформы, $V_e = \omega r$ - перенос-

ная скорость. Вектор $\bar{V}_e$ направлен, очевидно, по касательной к окружности радиуса r . Так как $\bar{V}_r$ и $\bar{V}_e$ коллинеарны, то абсолютная величина вектора $\bar{V}$ будет $V = U + \omega r$, а его направление показано на рис. 5.2, тогда $M_1 V = M_1(U + \omega r)$

$$\hat{E}_z^{(2)} = M_z(M_1 V) = M_1(U + \omega r)r. \quad (5.11)$$

Учитывая (5.9), (5.10) и (5.11), получим

$$0 = \frac{M_2 R^2}{2} \omega + M_1(U + \omega r)r. \quad (5.12)$$

Рассматривая (5.12) в качестве уравнения относительно ω и решая его, найдем

$$\omega = -\frac{2M_1 r}{2M_1 r^2 + M_2 R^2} U. \quad (5.13)$$

Результат (5.13) показывает, что платформа будет вращаться в сторону противоположную движению человека и при этом, её угловая скорость будет тем больше, чем больше относительная скорость U движения человека и тем меньше, чем больше масса платформы по сравнению с массой человека.

Задача 37.9(И.В. Мещерский)

Шарик А, находящийся в сосуде с жидкостью (рис. 5.3) и прикрепленный к концу стержня АВ длины l , приводится во вращение вокруг вертикальной оси $O_1 O_2$ с начальной угловой скоростью ω_0 . Сила сопротивления жидкости пропорциональна угловой скорости вращения: $R = \alpha m \omega$, где m - масса шарика, α – коэффициент пропорциональности. Определить, через какой промежуток

времени угловая скорость вращения станет в 2 раза меньше начальной, а также число оборотов n , которая сделает стержень с шариком за этот промежуток времени. Массу шарика считать сосредоточенной в его центре, массой стержня пренебречь.

Решение:

Система, состоящая из шарика, стержня и оси вращения, представляет собой тело, вращающееся вокруг неподвижной оси O_1O_2 (O_1z). Математической моделью движения такого тела является дифференциальное уравнение (5.8). При этом, его моментом инерции относительно оси O_1z будет:

$$J_z = m\ell^2 \quad (5.14)$$

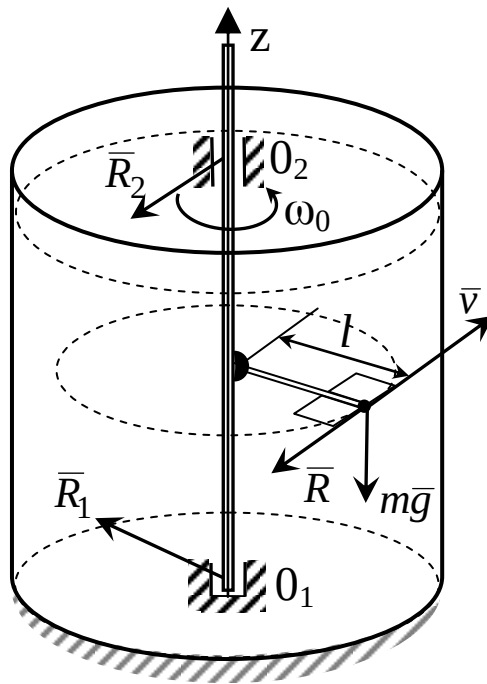


Рис. 5.3

Основанием для (5.14) служит определение (5.4) и тот факт, что вся масса сосредоточена в центре шарика А. Правая часть уравнения (5.8) для нашей задачи будет представлена лишь моментом силы сопротивления жидкости от-

носительно оси $O_1z(M_z(R) = -Rl)$; моменты же остальных внешних сил (mg, R_1, R_2) относительно этой оси равны нулю (см. рис. 5.3).

Таким образом, дифференциальное уравнение вращения тела с учетом, что $R = \alpha m \omega = \alpha m \dot{\varphi}$, будет:

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -\alpha m \dot{\varphi} l. \quad (5.15)$$

Уравнение (5.15), после соответствующих сокращений, примет вид:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\alpha}{l} \dot{\varphi}. \quad (5.16)$$

Для ответа на вопросы, поставленные в задаче, необходимо преобразовать уравнение (5.16), сделав замену $\dot{\varphi} = \omega$, после чего оно запишется в виде:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\alpha}{\ell} \omega \quad (5.17)$$

Для нахождения промежутка времени t_1 уменьшение угловой скорости в два раза по сравнению с начальной, решим уравнение (5.17), разделив переменные и интегрируя в соответствующих пределах.

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{\omega} &= -\frac{\alpha}{\ell} dt, & \int_{\omega_0}^{\omega_0/2} \frac{d\omega}{\omega} &= -\frac{\alpha}{\ell} \int_0^{t_1} dt, & \ln \frac{\omega_0}{2} - \ln \omega_0 &= -\frac{\alpha}{\ell} t_1, \\ \ln \frac{1}{2} &= -\frac{\alpha}{\ell} t_1, & -\ln 2 &= -\frac{\alpha}{\ell} t_1, & t_1 &= \frac{\ell \ln 2}{\alpha}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Для нахождения числа оборотов n , которое сделает шарик со стержнем за время t_1 , преобразуем уравнение (5.17) вводя новую независимую переменную φ (умножим обе части (5.17) на $d\varphi$) и интегрируя его:

$$\frac{d\omega}{dt}d\varphi = -\frac{\alpha}{\ell}\omega d\varphi, \quad \omega d\omega = -\frac{\alpha}{\ell}\omega d\varphi, \quad d\omega = -\frac{\alpha}{\ell}d\varphi, \quad (5.19)$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega_0/2} d\omega = -\frac{\alpha}{\ell} \int_0^{\varphi_1} d\varphi, \quad -\frac{\omega_0}{2} = -\frac{\alpha}{\ell} \varphi_1, \quad \varphi_1 = \frac{\ell \omega_0}{2\alpha}.$$

В (5.19) очевидно, φ_1 - угол поворота шарика со стержнем за время t_1 .
Далее учитывая, что один оборот соответствует углу 2π радиан, найдем

$$n = \frac{\ell \omega_0}{4\pi\alpha}. \quad (5.20)$$

Анализ результатов (5.18) и (5.20) показывает, что чем больше коэффициент α (чем больше сила сопротивления), тем меньше время t_1 и число оборотов n .

Рекомендуемые задачи на дом: 37.10 и 37.56 (И.В.Мещерский).

5. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ (2 ЗАНЯТИЯ, 4 ЧАСА).

ЗАНЯТИЕ 6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Положительная величина $\frac{m_s V_s^2}{2}$ ($s = 1, 2, \dots, n$) называется кинетической энергией материальной точки (V_s -величина скорости точки). Кинетической энергией материальной системы называется сумма кинетических энергий всех ее точек, т. е.

$$T = \sum_{s=1}^n \frac{m_s V_s^2}{2}. \quad (6.1)$$

Если система представляет собой твердое тело, то его кинетическая энергия в различных движениях будет:

1) $T = \frac{1}{2} M V_c^2$ при поступательном движении (M -масса тела, V_c - скорость его центра масс);

2) $T = \frac{1}{2} J_z \omega^2$ при вращательном движении (J_z - момент инерции тела относительно оси вращения, ω - угловая скорость тела);

3) $T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2$ при плоскопараллельном движении (J_z - момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс).

Элементарной работой силы $\bar{F}$ называется скалярная величина $\Delta A_i = F_i \cos \alpha_i \Delta S_i$, где F_i - величина силы на i - м элементарном участке конечного криволинейного перемещения $\overset{\cup}{M_1 M_2}$ точки ее приложения,

$\Delta S_i = \frac{\overset{\cup}{M_1 M_2}}{n}$ (n - число делений дуги $M_1 M_2$ на участке) - длина элементарного участка (Рис. 6.1).

Работой силы $\bar{F}$ на конечном перемещении точки ее приложения называется скалярная величина

$$A(\bar{F}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i \Delta S_i \quad (6.2)$$

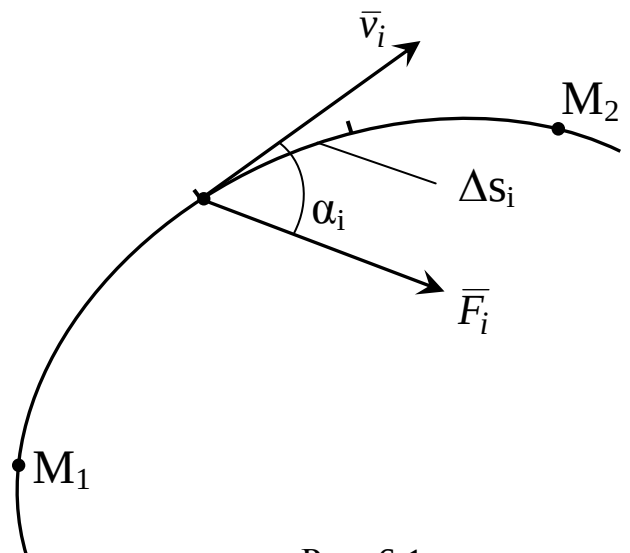


Рис. 6.1

На основании определения (6.2) вычисление работы сводится к вычислению криволинейного интеграла, а именно

$$A(\overline{F}) = \int\limits_{M_1 M_2} F \cos \alpha dS, \quad (6.3)$$

где F - текущее значение величины силы, α - текущее значение угла между векторами силы и скорости.

Формула (6.3) и другие формулы, полученные на основе (6.3), позволяют получить выражения для вычисления работы часто встречающихся сил:

1) работа силы тяжести точки

$$A(m\overline{g}) = \pm mgh. \quad (6.4)$$

Знак «+» выбирается, если точка массы m опускается по вертикали на высоту h и знак «-»- если поднимается;

2) работа силы тяжести тела

$$A(M\overline{g}) = \pm Mgh_c. \quad (6.5)$$

Знак «+» выбирается, если центр масс тела (масса тела равна M) опускается и знак «-»- если поднимается;

3) работа силы упругости

$$A(\overline{F_{\text{ої}}}) = \frac{c}{2} (\Delta l_0^2 - \Delta l_1^2), \quad (6.6)$$

где c - коэффициент упругости пружины, Δl_0 - начальная деформация, Δl_1 - конечная деформация;

4) работа сил, приложенных к вращающемуся телу

$$A(M_{\hat{\alpha}\delta}) = \int\limits_0^{\varphi} M_z^e d\varphi, \quad (6.7)$$

где M_Z^e - сумма моментов (главный момент) внешних сил относительно оси вращения Z , φ - угол поворота тела. В частности, если $M_Z^e = \text{const}$, то

$$A(M_{\hat{a}\delta}) = M_Z^e \varphi. \quad (6.8)$$

Кинетическая энергия системы (6.1) и работа сил, приложенных к точкам системы, связаны теоремой:

$$T - T_0 = \sum A(\overline{F_s^e}) + \sum A(\overline{F_s^i}). \quad (6.9)$$

Формулировка теоремы (6.9): «Изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ всех внешних и внутренних сил системы вычисленных на этом перемещении».

Рассмотрим примеры

Задача 38.44 (И.В.Мещерский)

К грузу А массы M_1 прикреплен нерастяжимая нить, переброшенная через блок Д массы M_2 и намотанная на боковую поверхность катка В массы M_3 (Рис. 6.2). При движении груза А вниз по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, вращается блок Д, а каток В катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол β (Рис. 6.2). Определить скорость груза А в зависимости от пройденного им пути S , если в начальный момент система находилась в покое. Блок Д и каток В считать однородными круглыми цилиндрами.

Дополнительно учтем трение скольжения тела А о наклонную плоскость с коэффициентом f и трение качения катка В радиуса r_3 , о наклонную плоскость с коэффициентом δ .

Решение.

Рассмотрим материальную систему, состоящую из груза, блока и катка соединенных нерастяжимой нитью. Для решения поставленной задачи, применим теорему об изменении кинетической энергии системы (6.9) при ее перемещении из состояния покоя в то положение, когда груз А пройдет путь S и приобретет скорость $\bar{V}$. При этом, блок Д повернется на угол φ_2 и приобретет угловую скорость ω_2 , центр масс катка пройдет путь S_3 и приобретет скорость $\bar{V}_3$, а сам каток повернется на угол φ_3 и приобретет угловую скорость ω_3 (Рис. 6.2).

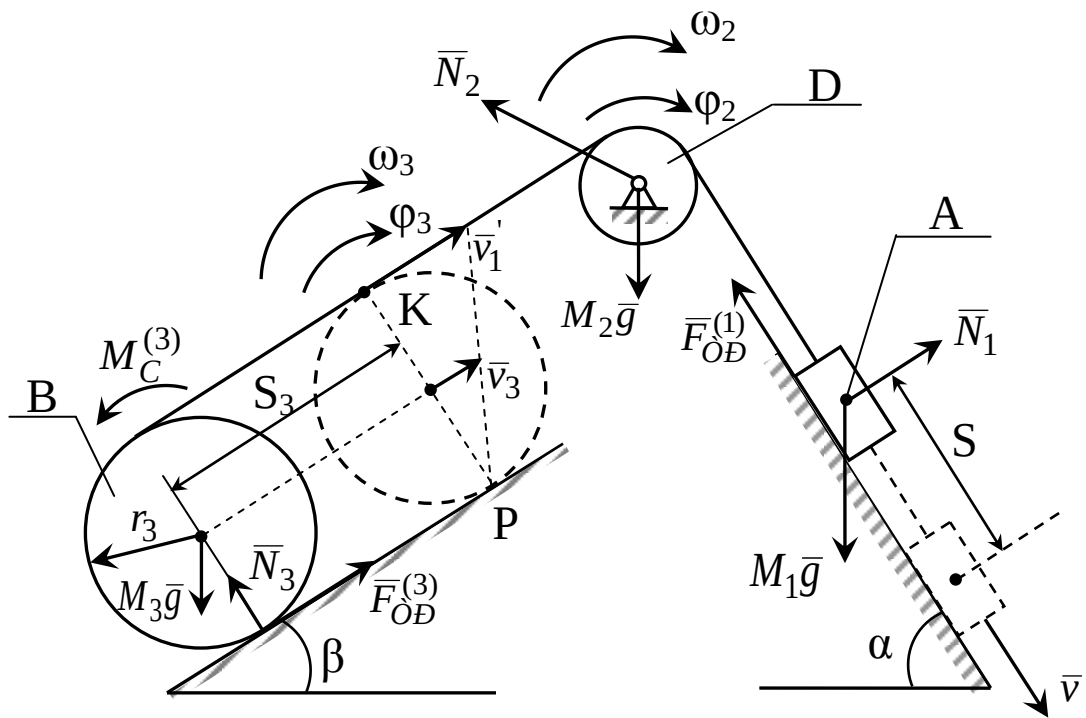


Рис. 6.2

Так как система начинает движение из состояния покоя, то, очевидно $T_0 = 0$. Вычислим ее кинетическую энергию T в новом положении (когда груз A пройдет путь S).

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \quad (6.10)$$

где T_1 , T_2 и T_3 - кинетические энергии груза, блока и катка соответственно. Вычисление их основано на формулах 1, 2, 3 из (6.1). Так как груз движется поступательно, блок вращается, каток движется плоскопараллельно

$$T_1 = \frac{1}{2} M_1 V^2, \quad (6.11)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{M_2 r_2^2}{2} \omega_2^2 \quad (6.12)$$

где $\frac{M_2 r_2^2}{2}$ - момент инерции блока, моделируемого однородным цилиндром, r_2 - радиус блока;

$$T_3 = \frac{1}{2} M_3 V_3^2 + \frac{1}{2} \frac{M_3 r_3^2}{2} \omega_3^2, \quad (6.13)$$

где $\frac{M_3 r_3^2}{2}$ - момент инерции катка, моделируемого однородным цилиндром.

В рассматриваемой системе кинематические характеристики связаны между собой. Выразим ω_2, ω_3 и V_3 через искомую скорость V .

Так как нить нерастяжима, то (см. Рис. 6.2) скорость любой точки на ободе блока равна по величине скорости груза, а потому

$$\omega_2 = \frac{V}{r_2}. \quad (6.14)$$

В силу той же причины скорость точки К схода нити с поверхности катка $\overline{V'}$ равна по величине скорости груза. При плоскопараллельном движении катка, его точка Р (точка касания катка наклонной поверхности) является мгновенным центром скоростей (качение происходит без проскальзывания).

Поэтому:

$$V_3 = \frac{V_1'}{2} = \frac{V}{2}, \quad (6.15)$$

$$\omega_3 = \frac{V_1'}{2r_3} = \frac{V}{2r_3}. \quad (6.16)$$

Кинетическая энергия системы (6.10) с учетом (6.11)-(6.16) будет:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M_1V^2 + \frac{1}{4}M_2V^2 + \frac{1}{8}M_3V^2 + \frac{1}{16}M_3V^2 = \\ &= \frac{1}{16}(8M_1 + 4M_2 + 3M_3)V^2. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Обозначим в (6.17)

$$L = \frac{1}{16}(8M_1 + 4M_2 + 3M_3), \quad (L = \text{const} > 0). \quad (6.18)$$

Тогда

$$T = LV^2. \quad (6.19)$$

Вычислим сумму работ всех внешних сил системы на рассматриваемом перемещении (работа внутренних сил равна нулю, так как система состоит из твёрдых тел и нерастяжимой нити). Внешними силами являются (Рис. 6.2): $M_1\overline{g}, M_2\overline{g}, M_3\overline{g}$ - силы тяжести тел; $\overline{N}_1, \overline{N}_3$ - нормальные реакции наклон-

ных плоскостей; $\bar{N}_2$ - реакция оси блока; $\bar{F}_{O\delta}^{(1)}$, $\bar{F}_{O\delta}$ - силы трения о наклонные плоскости; $M_C^{(3)}$ - момент пары сопротивления качению катка.

Работу сил тяжести вычисляем по формуле (6.5):

$$A(M_1 \bar{g}) = M_1 g S \sin \alpha, \quad (6.20)$$

$$A(M_2 \bar{g}) = M_2 g \cdot 0 = 0, \quad (6.21)$$

$$A(M_3 \bar{g}) = -M_3 g S_3 \sin \beta. \quad (6.22)$$

Работа нормальных реакций (см. (6.3)):

$$A(\bar{N}_1) = \int_0^S N_1 \cos 90^\circ ds = 0$$

$A(\bar{N}_2) = 0$ (точка приложения силы, $\bar{N}_2$ неподвижна), $A(\bar{N}_3) = 0$ (сила $\bar{N}_3$ приложена в каждый момент к точке с нулевой скоростью).

Работа сил трения:

$$A(\bar{F}_{O\delta}^{(1)}) = \int_0^S F_{O\delta}^{(1)} \cos \pi ds = - \int_0^S f N_1 ds = - \int_0^S f M_1 g \cos \alpha ds, \quad (6.23)$$

$$A(\bar{F}_{O\delta}^{(1)}) = -f M_1 g \cos \alpha \cdot S,$$

$A(\bar{F}_{O\delta}^{(3)}) = 0$ (сила $\bar{F}_{O\delta}^{(3)}$ приложена в каждый момент к точке с нулевой скоростью).

Работа момента пары сопротивления качению вычислим по формуле (6.7)

$$A(M_{\tilde{N}}^3) = - \int_0^{\varphi_3} d\varphi = - \int_0^{\varphi_3} \delta N_3 d\varphi = - \int_0^{\varphi_3} \delta M_3 g \cos \beta d\varphi,$$

$$A(M_{\tilde{N}}^3) = -\delta M_3 g \cos \beta \cdot \varphi_3. \quad (6.24)$$

Выразим S_3 и φ_3 через перемещение S с помощью кинематических связей (6.15) и (6.16):

$$V_3 = \frac{ds_3}{dt}, \quad V = \frac{ds}{dt}, \quad \frac{ds_3}{dt} = \frac{1}{2} \frac{ds}{dt}, \quad ds_3 = \frac{1}{2} ds,$$

$$S_3 = \frac{1}{2} S, \quad (6.25)$$

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt}, \quad \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{1}{2r_3} \cdot \frac{ds}{dt}, \quad d\varphi_3 = \frac{1}{2r_3} \cdot ds$$

$$\int_0^{\varphi_3} d\varphi_3 = \frac{1}{2r_3} \cdot \int_0^S ds, \quad \varphi_3 = \frac{S}{2r_3}. \quad (6.26)$$

Сумма работ всех внешних сил системы с учётом (6.20) – (6.25) будет:

$$\sum A(\bar{F}_S^e) = M_1 g S \sin \alpha - \frac{1}{2} M_3 g S \sin \beta - f M_1 g \cos \alpha - \frac{\delta}{2r_3} M_3 g S \cos \beta =$$

$$= \frac{1}{2} (2M_1 \sin \alpha - 2fM_1 \cos \alpha - M_3 \sin \beta - \frac{\delta}{r_3} M_3 \cos \beta) g S. \quad (6.27)$$

Обозначим в (6.27)

$$N = \frac{1}{2} [2M_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - M_3 (\sin \beta + \frac{\delta}{r_3} \cos \beta)] g \quad (6.28)$$

($N = \text{const}$, $N > 0$ - условие движения тела вниз), тогда

$$\sum A(\bar{F}_S^e) = NS. \quad (6.29)$$

Далее учитывая (6.9), (6.19) и (6.29) получим: $LV^2 = NS$, откуда

$$V = \sqrt{\frac{N}{L} \cdot S}, \quad (6.30)$$

где постоянные N и L определяются выражениями (6.18) и (6.28).

Задача 38.27 (И.В. Мещерский):

Эпициклический механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, приводится в движение из состояния покоя посредством вращающего момента L , приложенного к кривошипу OA . Определить угловую скорость кривошипа в зависимости от угла поворота, если неподвижное колесо I имеет радиус r_1 , подвижное колесо II - радиус r_2 и массу M_1 , а кривошип OA - массу M_2 . Колесо II считать однородным диском, а кривошип однородным стержнем (Рис. 6.3).

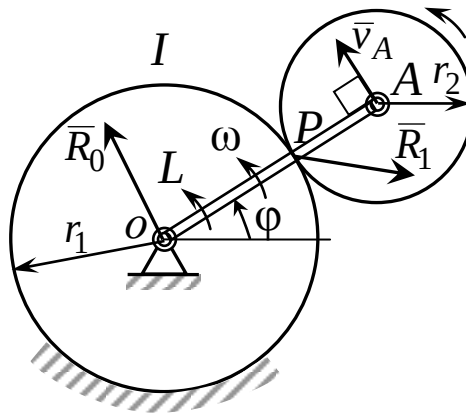


Рис. 6.3

Решение.

Рассмотрим систему, состоящую из кривошипа OA и колеса II .

Для решения поставленной задачи, применим теорему об изменении кинетической энергии системы при её перемещении из состояния покоя в то положение, когда кривошип повернётся на угол φ и приобретёт угловую скорость ω . При этом, центр масс колеса II (точка A) приобретёт скорость V_A , а само колесо приобретёт угловую скорость ω_2 (Рис. 6.3).

Так как система начинает движение из состояния покоя, то очевидно, $T_0 = 0$. Вычислим кинетическую энергию T в новом положении (когда кривошип повернётся на угол φ).

$$T = T_1 + T_2, \quad (6.31)$$

где T_1 и T_2 - кинетическая энергия кривошипа и колеса II соответственно. Вычисление их основано на формулах 2) и 3) из (6.1) так как кривошип вращается, а колесо II движется плоскопараллельно.

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_2(r_1 + r_2)^2}{3} \cdot \omega^2 \quad (6.32)$$

где $\frac{M_2(r_1 + r_2)^2}{3}$ - момент инерции кривошипа, моделируемого однородным стержнем, $r_1 + r_2$ - длина кривошипа.

$$T_2 = \frac{1}{2} M_1 V_A^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{M_1 r_2^2}{2} \cdot \omega_2^2, \quad (6.33)$$

где $\frac{M_1 r_2^2}{2}$ - момент инерции колеса II , моделируемого однородным диском.

Скорость V_A и угловую скорость ω_2 необходимо выразить через искомую угловую скорость ω . Так как точка A принадлежит вращающемуся кривошипу, то

$$V_A = \omega \cdot OA = \omega(r_1 + r_2). \quad (6.34)$$

Так как точка касания II с неподвижным колесом I (Точка P на Рис. 6.3) совпадает с его мгновенным центром скоростей, то

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A}{r_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_2} \cdot \omega. \quad (6.35)$$

Кинетическая энергия системы (6.31) с учётом (6.32) – (6.35) будет:

$$T = \frac{1}{6} \cdot M_1(r_1 + r_2)^2 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot M_1(r_1 + r_2)^2 \cdot \omega^2 + \frac{1}{4} \cdot M_1(r_1 + r_2)^2 \cdot \omega^2.$$
$$T = \frac{1}{12}(9M_1 + 2M_2) \cdot (r_1 + r_2)^2 \cdot \omega^2. \quad (6.36)$$

Вычислим сумму работ всех внешних сил на рассматриваемом перемещении.

Внешними силами являются (Рис. 6.3): $M_1\bar{g}$, $M_2\bar{g}$ - силы тяжести колеса II и кривошипа; $\bar{R}_0$ - реакция оси O ; $\bar{R}_1$ - реакция колеса I ; L - вращающий момент.

Работа сил тяжести равна нулю, так как точки их приложения двигаются в горизонтальной плоскости.

Работа реакций:

$A(\bar{R}_0) = 0$ (Точка O неподвижна), $A(\bar{R}_1) = 0$ (сила $\bar{R}_1$ приложена в каждый момент к точке с нулевой скоростью).

Работа вращающего момента L :

$$A(L) = L\varphi. \quad (6.37)$$

Приравняв (6.35) и (6.36), реализуем теорему об изменении кинетической энергии рассматриваемой системы:

$$\frac{1}{12}(9M_1 + 2M_2) \cdot (r_1 + r_2)^2 \cdot \omega^2 = L\varphi,$$

$$\omega = \frac{2}{(r_1 + r_2)} \cdot \sqrt{\frac{3L\varphi}{9M_1 + 2M_2}}.$$

Рекомендуемые задачи на дом: 38.28 и 38.38 (И.В. Мещерский).

ЗАНЯТИЕ 7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача 38.34 (И. В. Мещерский)

Стержень АВ длины $2a$ падает, скользя концом А по гладкому горизонтальному полу. В начальный момент стержень занимал вертикальное положение и находился в покое. Определить скорость центра масс стержня в зависимости от его высоты h над полом (рис. 7.1).

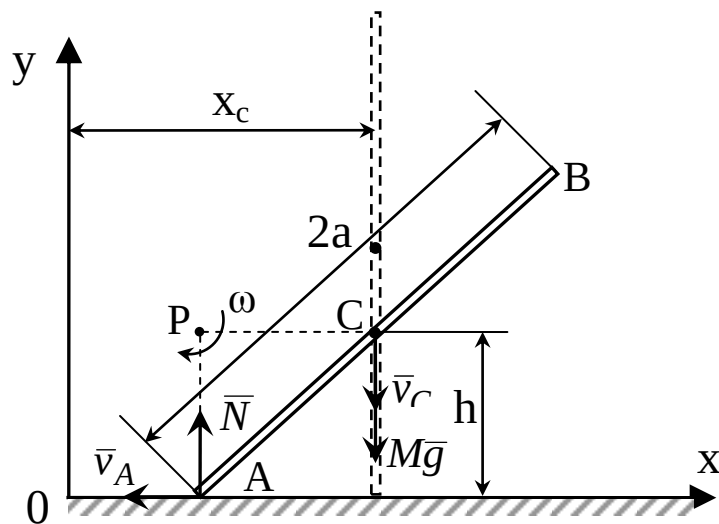


Рис. 7.1

Решение.

Рассмотрим динамику системы, представляющую собой твердое тело (стержень), в вертикальной плоскости xOy . Внешними силами, приложенными к стержню, будут: сила тяжести $M\bar{g}$ и нормальная реакция гладкого пола $\bar{N}$. Эти силы обладают очевидными свойствами, а именно, их проекции на ось ox равны нулю. Замеченное свойство внешних сил позволяет судить о характере движения стержня. Действительно, применение к нему теоремы о движении центра масс в проекции на ось ox (см. следствие 3) из (4.9)) приводит к тому, что $\ddot{x}_C = const$, т.е. центр масс движущегося плоскопараллельного стержня, падает по вертикали (рис. 7.1).

Применим теперь теорему об изменении кинетической энергии (см. 6.9) стержня при его перемещении из вертикального положения в текущее. При этом центр масс стержня переместится по вертикали вниз пройдя расстояние $a-h$, и приобретет скорость V_C , а сам стержень приобретет угловую скорость ω .

Так как система начинает движение из состояния покоя, то $T_0=0$. Вычислим кинетическую энергию стержня в текущем положении учитывая, что он движется плоскопараллельно (см. 3⁰ из (6.1)).

$$T = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} \frac{M(2a)^2}{12} \omega^2, \quad (7.1)$$

где $\frac{M(2a)^2}{12} = \frac{Ma^2}{3}$ - момент инерции стержня относительно его центра масс.

Угловая скорость стержня ω и скорость его центра масс V_C кинематически связаны. Эту связь позволяет установить знание картины распределения скоростей в теле совершающем плоскопараллельное движение (см. раздел «Кинематика»). А именно, так как известны линии действия скоростей центра масс и точки А стержня (рис. 7.1), то определяется положение его мгновенного центра скоростей (точка Р лежит на пересечении перпендикуляров к векторам

V_C и V_A). Таким образом, распределение скоростей в стержне будет как при вращательном движении вокруг точки P , откуда

$$\omega = \frac{V_C}{CP} = \frac{V_C}{\sqrt{a^2 - h^2}}. \quad (7.2)$$

Кинетическая энергия с учетом (7.1) с учетом (7.2) будет:

$$T = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{6} \frac{M V_C^2 a^2}{(a^2 - h^2)}. \quad (7.2)$$

После выполнения в (7.2) очевидных алгебраических преобразований получим

$$T = \frac{1}{6} \frac{4a^2 - 3h^2}{a^2 - h^2} M V_C^2. \quad (7.3)$$

Работа, которую совершает сила тяжести на рассматриваемом перемещении, будет:

$$A(\overline{Mg}) = Mg(a - h) \quad (7.4)$$

$A(\overline{N}) = 0$ (так как $\overline{N}$ перпендикулярен V_A).

Реализуем теорему об изменении кинетической энергии стержня, приравняв (7.3) к (7.4):

$$\frac{1}{6} \frac{4a^2 - 3h^2}{a^2 - h^2} M V_C^2 = Mg(a - h).$$

В итоге получим:

$$V_C = (a - h) \sqrt{\frac{6g(a + h)}{4a^2 - 3h^2}}.$$

Задача 38.31 (И. В. Мещерский).

К ведущему колесу – барабану A – снегоочистителя приложен постоянный вращающий момент L (рис. 7.2). Масса барабана A можно считать равномерно распределенной по его ободу. Суммарная масса снега D , щита B и всех прочих поступательно движущихся частей постоянна и равна M_2 . Коэффициент трения скольжения снега и щита о землю равен f , коэффициент трения качения барабана о землю равен f_k . Масса барабана равна M_1 его радиус r .

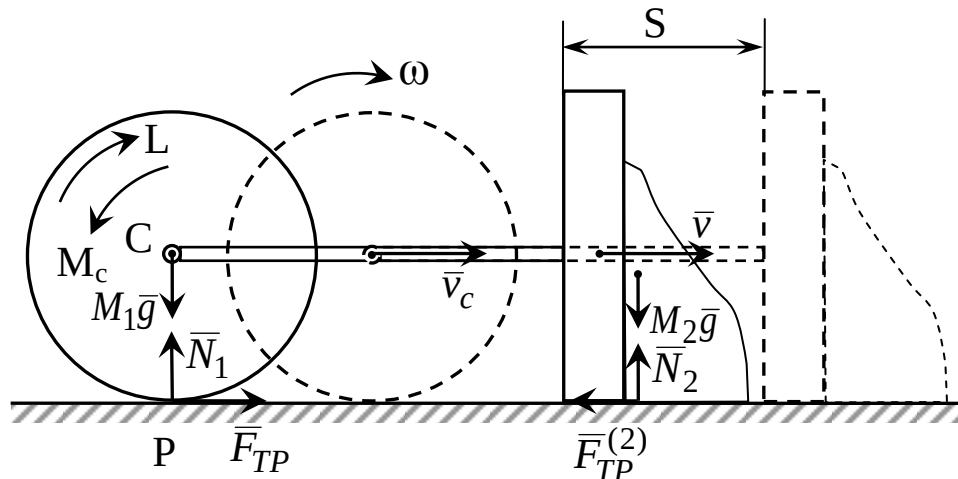


Рис. 7.2

Определить зависимость между путем S , пройденным щитом B снегоочистителя, и модулем его скорости V , если в начальный момент система находилась в покое.

Решение.

Рассмотрим движущийся снегоочиститель как систему, состоящую из нескольких тел. Для решения данной задачи применим теорему об изменении кинетической энергии этой системы при ее перемещении из состояния покоя в

то положение, когда щит снегоочистителя со снегом пройдет путь S , и приобретет скорость $\bar{V}$. При этом центр масс барабана пройдет тот же путь S и приобретет скорость $\bar{V}_C = \bar{V}$, а сам барабан за это время повернется на некоторый угол φ и приобретет угловую скорость ω .

Снегоочиститель начинает движение из состояния покоя, а потому $T_0 = 0$. Вычислим его кинетическую энергию в новом положении (когда щит со снегом пройдет путь S).

$$T = T_1 + T_2, \quad (7.5)$$

где T_1 и T_2 - кинетические энергии барабана и щита со снегом соответственно. Вычисление их основано на формулах 3) и 1) (см. 6.1), так как барабан движется плоскопараллельно, а щит со снегом – поступательно.

$$T_1 = \frac{1}{2} M_1 V^2 + \frac{1}{2} M_1 r^2 \omega^2, \quad (7.6)$$

где $M_1 r^2$ - момент инерции барабана, моделируемого однородным кольцом;

$$T_2 = \frac{1}{2} M_2 V^2. \quad (7.7)$$

Угловая скорость барабана кинематически связана со скоростью его центра масс (точка Р – мгновенный центр скоростей).

$$\omega = \frac{V}{r}, \quad (7.8)$$

кинетическая энергия системы (7.5) с учетом (7.6)-(7.8) будет:

$$T = \frac{1}{2} M_1 V^2 + \frac{1}{2} M_1 r^2 \frac{V^2}{r^2} + \frac{1}{2} M_2 V^2 = \frac{1}{2} (2M_1 + M_2) V^2. \quad (7.9)$$

Вычислим сумму работ всех внешних сил системы на рассматриваемом перемещении (работа внутренних сил равна нулю, так как система состоит из твердых тел). Внешними силами являются (рис.7.2): $M_1 \bar{g}, M_2 \bar{g}$ - силы тяжести тел; $\bar{N}_1, \bar{N}_2$ - нормальные реакции плоскости; $\bar{F}_{O\delta}^{(1)}, \bar{F}_{O\delta}^{(2)}$ - силы трения L - вращающий момент; M_c - момент пары сопротивления качению барабана.

Работа сил тяжести равна нулю, так как их точки приложения движутся горизонтально.

Работа нормальных реакций:

$A(\bar{N}_1) = 0$ (сила $\bar{N}_1$ приложена в каждый момент к точке с нулевой скоростью)

$A(\bar{N}_2) = 0 (\bar{N}_2 \perp \bar{V})$.

Работа сил трения:

$$A(\bar{F}_{O\delta}^{(1)}) = 0$$

(сила $(\bar{F}_{O\delta}^{(1)})$ приложена в каждый момент к точке с нулевой скоростью).

$$A(\bar{F}_{O\delta}^{(2)}) = \int_0^S \left| \bar{F}_{O\delta}^{(2)} \right| \cdot \cos \pi ds = - \int_0^S f M_2 g ds,$$

$$A(\bar{F}_{O\delta}^{(2)}) = - f M_2 g S, \quad (7.10)$$

$$A(L) = L \varphi, \quad (7.11)$$

$$A(M_c) = - \int_0^\varphi M_c d\varphi = - \int_0^\varphi f_k N d\varphi = - \int_0^\varphi f_k M_1 g d\varphi,$$

$$A(M_c) = -f_k M_1 g \varphi. \quad (7.12)$$

Выразим φ через S с помощью кинематической связи (7.8):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad V = \frac{ds}{dt}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r} \frac{ds}{dt}, \quad d\varphi = \frac{1}{r} ds, \quad \int_0^\varphi d\varphi = \frac{1}{r} \int_0^S ds.$$
$$\varphi = \frac{S}{r}. \quad (7.13)$$

Сумма работ всех внешних сил системы с учетом (7.10) – (7.13) будет:

$$\begin{aligned} \sum A(\bar{F}_s^e) &= \frac{L}{r} S - f M_2 g S - \frac{f_k}{r} M_1 g S; \\ \sum A(\bar{F}_s^e) &= \frac{1}{r} (L - f_k M_1 g - f M_2 r g) S; \\ \sum A(\bar{F}_s^e) &= \frac{1}{r} (L - (M_1 f_k + M_2 f r) g) S. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Реализуем теорему об изменении кинетической энергии системы, приравняв (7.9) к (7.14):

$$\frac{1}{2} (2M_1 + M_2) V^2 = \frac{1}{r} (L - (M_1 f_k + M_2 f r) g) S.$$

Откуда находим

$$S = \frac{r}{2} \frac{2M_1 + M_2}{L - (M_1 f_k + M_2 f r) g} V^2.$$

Рекомендуемые задачи на дом: 38.32, 38.33 (И. В. Мещерский).

6. ДИНАМКА ТВЕРДОГО ТЕЛА (1.5 ЗАНЯТИЯ .3 ЧАСА)

ЗАНЯТИЕ 8. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Решение задач на динамику твердого тела предполагает использование, прежде всего, математической модели плоскопараллельного движения тела в виде соответствующей системы дифференциальных уравнений. Как известно из теории, эти уравнения получаются в результате применения теоремы о движении центра масс системы и теоремы о кинетическом моменте системы относительно центра масс, и имеют вид:

$$\begin{cases} M\ddot{X}_C = R_x^e(x_C, \acute{o}_{\tilde{n}}, \varphi, \tilde{o}_{\tilde{n}}, \acute{o}_{\tilde{n}}, \dot{\varphi}, t), \\ M\ddot{Y}_C = R_y^e(x_C, \acute{o}_{\tilde{n}}, \varphi, \tilde{o}_{\tilde{n}}, \acute{o}_{\tilde{n}}, \dot{\varphi}, t), \\ J_C\ddot{\varphi} = M_C^e(x_C, \acute{o}_{\tilde{n}}, \varphi, \tilde{o}_{\tilde{n}}, \acute{o}_{\tilde{n}}, \dot{\varphi}, t), \end{cases} \quad (8.1)$$

где M - масса тела; J_C - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости $ХОУ$, а $\dot{\tilde{I}}_{\tilde{n}}^{\dot{\varphi}}$ - главный момент внешних сил (Рис. 8.1); $\tilde{o}_{\tilde{n}}$ и $\acute{o}_{\tilde{n}}$ - координаты центра масс; φ - угол поворота тела; R_x^e и R_y^e - проекции главного вектора внешних сил на оси. Ox , и. Oy соответственно. Рассмотрим примеры.

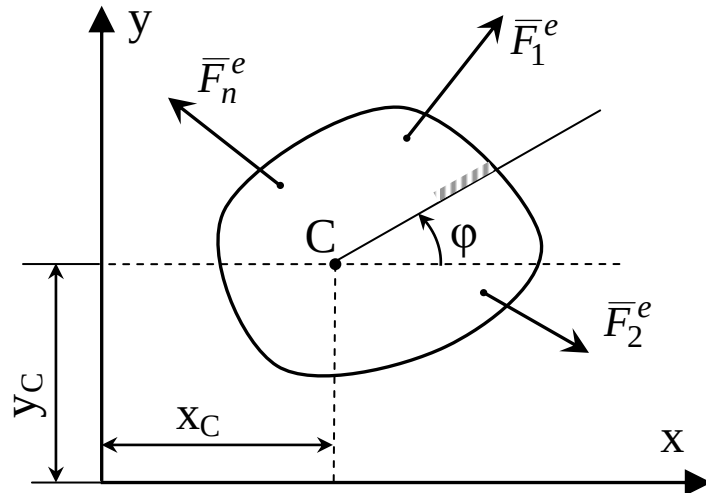


Рис. 8.1

Задача 39.4 (И.В. Мещерский)

Ведущее колесо автомашины радиуса r и массы M движется горизонтально и прямолинейно (Рис 8.2).

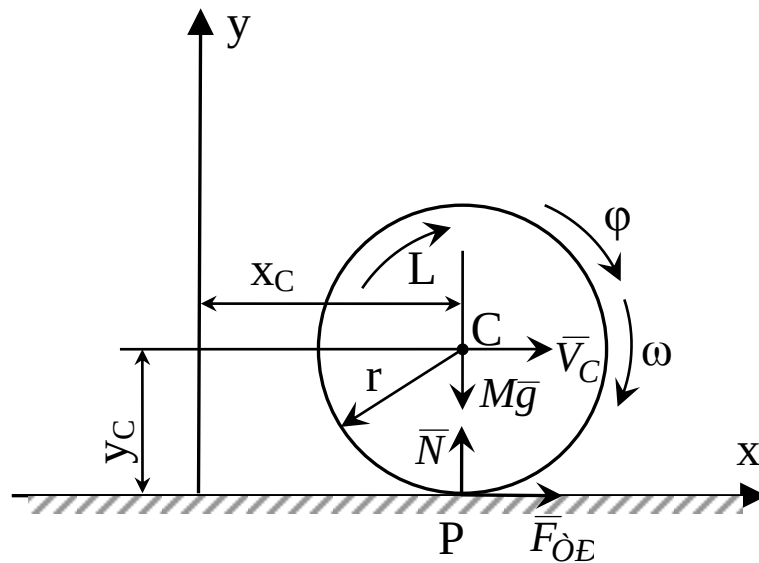


Рис. 8.2

К колесу приложен вращающий момент L . Радиус инерции колеса относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно его и плоскости, равен ρ . Коэффициент трения скольжения колеса о землю равен f . Какому

условию должен удовлетворять вращающий момент для того, чтобы колесо катилось без скольжения? Сопротивлением качения пренебречь.

Решение.

Пусть колесо катиться по прямолинейному пути, принятому за ось. Ох (Рис 8.2). Ось Оу направим по вертикали вверх. Внешние силы, приложенные к колесу: $M\bar{g}$ - сила тяжести, $\bar{N}$ - нормальная реакция плоскости, $\bar{F}_{TP}$ - сила трения (сцепления) о плоскость, L - внешний вращающий момент. Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения (8.1), применительно к колесу, будут иметь вид:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= F_{TP}, \\ 0 &= N - Mg, \\ M\rho^2\ddot{\phi} &= L - F_{TP}r. \end{aligned} \quad (8.2)$$

В левой части второго уравнения из (8.2) стоит 0, так как при движении колеса $y_{\tilde{n}} = R = Const$, а потому

$$N = Mg. \quad (8.3)$$

Первое и третье уравнения из (8.2) образуют систему

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= F_{TP}, \\ M\rho^2\ddot{\phi} &= L - F_{TP}r, \end{aligned} \quad (8.4)$$

в которой ускорение центра масс $\ddot{x}_{\tilde{n}}$ и угловое ускорение $\ddot{\phi}$ кинематически связаны (колесо должно катиться без проскальзывания, поэтому точка P есть его

мгновенный центр скоростей и $V_C = \omega r$ или, по-другому, $\dot{x}_C = \dot{\varphi} r$, откуда $\ddot{x}_C = \ddot{\varphi} r$).

С учетом найденной кинематической связи, система (8.4) запишется в виде:

$$\begin{aligned} Mr\ddot{\varphi} &= F_{TP}, \\ M\rho^2\ddot{\varphi} &= L - F_{TP}r. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Система (8.5) может рассматриваться как алгебраическая относительно неизвестных $\ddot{\varphi}$ и F_{TP} . Нас интересует сила трения, обеспечивающая качение колеса без проскальзывания, которая и находится из (8.5) исключением $\ddot{\varphi}$:

$$F_{TP} = \frac{Lr}{\rho^2 + r^2}. \quad (8.6)$$

С другой стороны, сила трения покоя должна удовлетворять известному закону

$$0 \leq F_{TP} \leq fN. \quad (8.7)$$

Таким образом, подставляя (8.6) в (8.7) и учитывая (8.3), получим

$$0 \leq \frac{Lr}{\rho^2 + r^2} \leq fMg. \quad (8.8)$$

Решая неравенство (8.8) относительно L , окончательно найдем нужное условие:

$$0 \leq L \leq \frac{fMg(\rho^2 + r^2)}{r}. \quad (8.9)$$

Анализ результата (8.9) показывает, что с увеличением коэффициента трения f и массы колес M , диапазон «безопасного» вращающего момента L возрастает.

Задача 43.11 (И.В. Мещерский).

Тяжелый однородный цилиндр, получив ничтожно малую начальную скорость, скатывается без скольжения с горизонтальной площадки АВ, край которой В заострен и параллелен образующей цилиндра. Радиус основания цилиндра r . В момент отделения цилиндра от площадки плоскость, проходящая через ось цилиндра и край В, отклонена от вертикального положения на некоторый угол $CB\tilde{N}_1 = \alpha$ (Рис 8.3). Определить угловую скорость цилиндра в момент отделения его от площадки, а также угол α . Трением качения и сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение.

Рассмотрим динамику вращательного движения цилиндра вокруг неподвижной оси, проходящей через край В площадки и параллельной его образующей (цилиндр по краю площадки не проскальзывает). Изобразив цилиндр в текущий до отделения момент времени (текущий угол поворота φ (рис.8.3)) и приложив внешние силы (Mg – силы тяжести, N и F_{TP} – реакции края площадки), запишем, применительно к нему, теорему о движении центра масс системы:

$$M\bar{a}_C = M\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}_{TP} \quad (8.10)$$

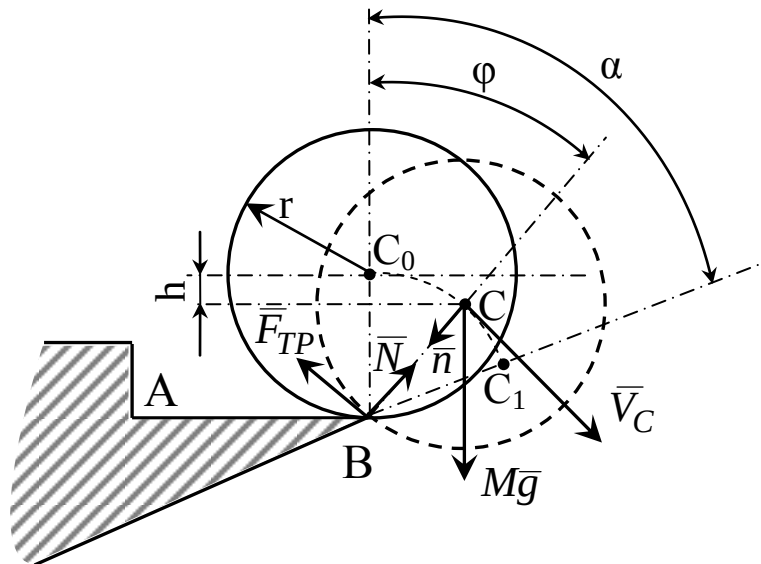


Рис. 8.3

Спроектировав (8.10) на главную нормаль траектории центра масс цилиндра (траектория – окружность радиуса r , $\bar{n}$ -орт главной нормали (рис 8.3), получим:

$$\frac{MV_C^2}{r} = Mg \cos \varphi - N, \quad (8.11)$$

где V_C -скорость центра масс цилиндра в текущий момент времени, $\frac{V_C^2}{r}$ – нормальное ускорение центра масс.

Из (8.11) величина нормальной реакции площадки будет :

$$N = Mg \cos \varphi - \frac{MV_C^2}{r}. \quad (8.12)$$

Для нахождения скорости V_C , применим теорему об изменении кинетической энергии цилиндра при его перемещении из начального состояния покоя в текущее ($\dot{O}_0 = 0$ см.(6.9)). Текущее значение кинетической энергии:

$$T = J_B \frac{\omega^2}{2}, \quad (8.13)$$

где J_B -момент инерции цилиндра относительно оси , приходящей через край площадки и параллельной его образующей, $\omega = \frac{V_{\tilde{n}}}{r}$ -угловая скорость цилиндра.

Момент инерции J_B найдем, учитывая, что ось вращения смещена относительно центра масс цилиндра (см. теорему Штейнера из раздела «динамика»).

$$J_b = J_c + Mr^2 = \frac{Mr^2}{2} + Mr^2 = \frac{3}{2}Mr^2. \quad (8.14)$$

Кинетическая энергия (8.13) с учетом (8.14) будет:

$$T = \frac{3}{4}MV_c^2. \quad (8.15)$$

Работу на рассматриваемом перемещении совершит лишь сила тяжести (силы $\vec{F}_{TP}$ и $\vec{N}$ приложены к точке с нулевой скоростью).

$$A(Mg) = Mgh, \quad (8.16)$$

где $h = r - r \cos \varphi = r(1 - \cos \varphi)$ - высота, на которую опустится центр масс цилиндра. Реализуя теорему об изменении кинетической энергии, приравняли (8.15) к (8.16) ,

$$\frac{3}{4}MV_c^2 = Mgr(1 - \cos \varphi). \quad (8.17)$$

Из (8.17) найдем:

$$MV_c^2 = \frac{4}{3} Mgr(1 - \cos \varphi). \quad (8.18)$$

Подставим теперь выражения для MV_c^2 из (8.18) в (8.12) и найдем зависимость нормальной реакции N от положения тела

$$N = \frac{1}{3} Mg(7 \cos \varphi - 4). \quad (8.19)$$

Формула (8.19) показывает, что с ростом угла φ , величина реакции N , а значит и давление цилиндра на опору убывает и при некотором $\varphi = \alpha$ обратится в нуль, т.е цилиндр отделится от опоры. Таким образом, из (8.19) получим:

$$0 = \frac{1}{3} Mg(7 \cos \alpha - 4),$$

откуда $\cos \alpha = \frac{4}{7}$ и $\alpha = \arccos \frac{4}{7} \approx 55.1^\circ$.

Из (8.18) при $\varphi = \alpha$ получим:

$$V_c^2 = \frac{4}{3} gr(1 - \frac{4}{7}) = \frac{4}{7} gr; \quad \omega^2 = \frac{V_c^2}{r^2} = \frac{4g}{7r}; \quad \omega = 2\sqrt{\frac{g}{7r}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов. М.: Высшая школа, 1998. 416 с.
2. *Мещерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике. М.: Высшая школа, 1986. 448 с.
3. *Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С.* Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. Статика и кинематика. М.: Наука, 1984. 504 с.

Оглавление

Раздел I. СТАТИКА	- 3 -
1. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ (2 ЗАНЯТИЯ, 6 ЧАСОВ)	- 3 -
ЗАНЯТИЕ 1. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ	- 3 -
ЗАНЯТИЕ 2. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ.....	- 13 -
ЗАНЯТИЕ 3. Самостоятельная работа	- 18 -
2. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ (2 ЗАНЯТИЯ, 4 ЧАСА)	- 18 -
ЗАНЯТИЕ 4. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ.....	- 18 -
ЗАНЯТИЕ 5. Самостоятельная работа	- 20 -
3. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ (2 занятия, 4 часа)	- 20 -
ЗАНЯТИЕ 6. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ	- 20 -
ЗАНЯТИЕ 7. Самостоятельная работа	- 24 -
Раздел II. КИНЕМАТИКА	- 25 -
1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ, ТРАЕКТОРИЯ, СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ (2 ЗАНЯТИЯ, 4 ЧАСА)	- 25 -
ЗАНЯТИЕ 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ТРАЕКТОРИЯ ТОЧКИ.....	- 25 -
ЗАНЯТИЕ 2. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ ТОЧКИ.....	- 30 -
2. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА (1 ЗАНЯТИЕ, 2 ЧАСА).	- 34 -
ЗАНЯТИЕ 3. Самостоятельная работа.....	- 34 -
3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ (3 ЗАНЯТИЯ, 6 ЧАСОВ).	- 38 -
ЗАНЯТИЕ 4. СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ В СЛОЖНОМ ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ.	- 38 -
ЗАНЯТИЕ 5. СЛОЖЕНИЕ УСКОРЕНИЙ В СЛОЖНОМ ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ (ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА).....	- 42 -
ЗАНЯТИЕ 6. Самостоятельная работа.....	- 47 -
РАЗДЕЛ III. ДИНАМИКА	- 61 -

1. СОСТАВЛЕНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ (2 ЗАНЯТИЯ, 4 ЧАСА).....	- 61 -
ЗАНЯТИЕ 1. СВОБОДНАЯ МАТЕРИАЛЬНАЯ ТОЧКА.	- 61 -
ЗАНЯТИЕ 2. НЕСВОБОДНАЯ ТОЧКА.	- 71 -
2.ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ(1 ЗАНЯТИЕ 2 ЧАСА).....	- 81 -
ЗАНЯТИЕ 3.СОСТАВЛЕНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.	- 81 -
3. ТЕОРЕМЫ О КОЛИЧЕСТВЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ И ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС СИСТЕМЫ.(1 ЗАНЯТИЕ, 2 ЧАСА)	- 89 -
ЗАНЯТИЕ 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ.....	- 89 -
4.ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА(1 ЗАНЯТИЕ, 2 ЧАСА).....	- 99 -
ЗАНЯТИЕ 5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ.....	- 99 -
5. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ (2 ЗАНЯТИЯ, 4 ЧАСА).....	- 108 -
ЗАНЯТИЕ 6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ.....	- 108 -
ЗАНЯТИЕ 7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ.....	- 120 -
6. ДИНАМКА ТВЕРДОГО ТЕЛА (1.5 ЗАНЯТИЯ .3 ЧАСА).....	- 127 -
ЗАНЯТИЕ 8. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ.....	- 127 -

СИДОРОВ Игорь Николаевич
БОРОДИН Владимир Михайлович
КРЕНЕВ Виталий Александрович
ЭНСКАЯ Анна Игоревна

СТАТИКА, КИНЕМАТИКА, ДИНАМИКА

Практические занятия по теоретической механике