§1. Матрицы и определители

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины (или n столбцов одинаковой длины). Матрица записывается в виде

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1.1)$$

или сокращенно $A=(a_{ij})$, где $i=\overline{1,m}$ – номер строки, $j=\overline{1,n}$ – номер столбца. Матрицу A называют матрицей размера $m\times n$ и пишут $A_{m\times n}$. Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются ее **элементами**.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется **квадратной**. Квадратную матрицу размера $n\times n$ называют матрицей n-го порядка.

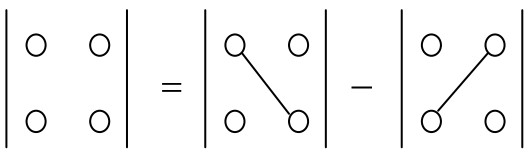
Определителем квадратной матрицы A называется число, которое обозначается $\det A$, Δ или $|A|$ и вычисляется следующим образом:

1. Определитель **1-го** порядка ($n=1$). $A=(a_1)$. $\det A=a_1$.

2. Определитель **2-го** порядка ($n=2$). $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}==a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Вычисление определителя второго порядка можно проиллюстрировать следующей схемой:



Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

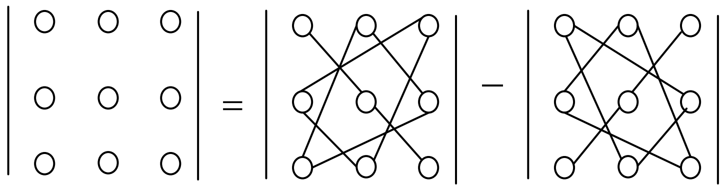
Решение: воспользовавшись схемой, найдем $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot 4-(-3)\cdot 5=23$.

Ответ: 23.

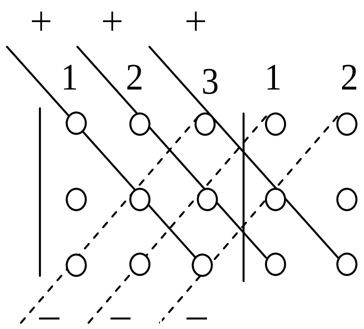
3. Определитель **3-го** порядка ($n = 3$). $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{32}a_{21}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \end{matrix}$$

При вычислении определителя **3-го** порядка удобно пользоваться правилом треугольников (или Саррюса), которое символически можно изобразить в виде:



Кроме того, определитель **3-го** порядка можно вычислить по схеме:



То есть, к элементам определителя приписываются справа два первых столбца и находится сумма произведений диагональных элементов.

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

Решение: воспользуемся правилом треугольников

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 1 \cdot 0 \cdot 3 -$$

$$-(1 \cdot 1 \cdot 6 + 3 \cdot (-2) \cdot (-3) + 5 \cdot (-4) \cdot 0)) = 33 - 24 = 9$$

Ответ: 9.

Вычисление определителей для матриц более высоких порядков ($n > 3$) будем реализовать на основе вычисления определителей низших порядков. Такой подход опирается на следующие свойства определителей.

Свойства определителей.

1. Равноправность строк и столбцов. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.
3. Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.
4. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.

Из свойств 3 и 4 следует, что если все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю.

5. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \dots & b_n + c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

6. Элементарные преобразования определителя. Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженного на любое число.

Прежде чем определить следующее свойство, введем понятия минора и алгебраического дополнения.

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка (обозначается m_{ij}) называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; m_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «+», если $i+j$ – четное число, и со знаком «–», если эта сумма нечетная. Обозначается $A_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; A_{12} = (-1)^{1+2} m_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7. Разложение определителя по элементам некоторого ряда. Определитель равен сумме произведений некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{k1} \cdot A_{k1} + a_{k2} A_{k2} + \dots + a_{kn} A_{kn}.$$

Таким образом, вычисление определителя $n-$го порядка сводится к вычислению нескольких определителей $(n-1)-$го порядка. Заметим, что если некоторые элементы $k-$той строки в примере равны нулю, то соответствующие им миноры можно не вычислять, что облегчает расчеты. Более того, свойство 5 позволяет в любом ряду заменить нулями все элементы, кроме одного и вычисление определителя $n-$го порядка можно свести к вычислению одного определителя $(n-1)-$го порядка.

8. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

Две **матрицы** $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ **равны** между собой, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т.е. $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$, где $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Наряду с матрицей A (1.1) часто приходится рассматривать матрицу, столбцами которой являются строки матрицы A. Эта матрица называется **транспонированной** к A и обозначается A^{T}: $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

То есть транспонированием матрицы называется такое преобразование матрицы, при котором ее строки становятся столбцами с тем же самым номером. Транспонированная матрица обладает следующим свойством: $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$.

Элементы квадратной матрицы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла в правый нижний, образуют **главную диагональ** (совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$). Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего правого угла в левый нижний, образуют **побочную диагональ**.

Квадратная матрица называется **треугольной**, если ее элементы, которые находятся над главной диагональю или под главной диагональю, равны нулю, т.е. матрицы вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ или } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

являются треугольными. Матрица A – **треугольная снизу**, а B – **треугольная сверху**.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**. Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется **единичной**. Обозначается через E.

$$E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$ – единичная матрица n-го порядка.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой**. Обозначается буквой O.

$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. В матричном исчислении матрицы E и O играют роль единицы и нуля в арифметике.

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется вектором.

$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$ – **вектор-столбец**, $B=(b_1, b_2, \dots, b_n)$ – **вектор-строка**.

Матрица, состоящая из одного числа (размера 1×1), отождествляется с этим числом.

Действия над матрицами.

1. Сложение. Складывать можно только матрицы с одинаковым числом строк и столбцов. Суммой двух матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ называется матрица $C=(c_{ij})$ такая, что $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$. Т.е. элементы матрицы C равны суммам соответствующих элементов матриц A и B. Запись: $A+B=C$.

Пример. Найти сумму матриц $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 15 \\ 12 & 3 & 59 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 10 & -2 & -40 \end{pmatrix}$.

Решение: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 15 \\ 12 & 3 & 59 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 10 & -2 & -40 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 22 \\ 22 & 1 & 19 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 22 \\ 22 & 1 & 19 \end{pmatrix}$.

2. Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ **на число** k называется матрица $B=(b_{ij})$ такая, что $b_{ij}=ka_{ij}$ $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$, т.е. каждый элемент матрицы B равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число k. Запись: $B=kA$.

Пример. $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $k=2$, $kA=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$.

Матрица $-A=(-1)\cdot A$ называется **противоположной** матрице A.

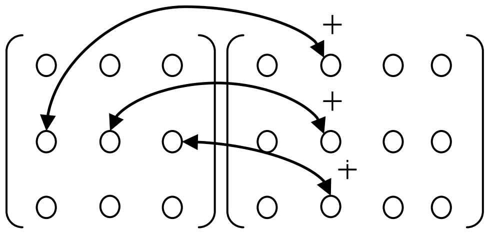
Разность матриц можно определить так: $A-B=A+(-B)$

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими **свойствами**:

а) $A+B=B+A$; **б)** $A+(B+C)=(A+B)+C$; **в)** $A+O=A$; **г)** $A-A=O$;
д) $1\cdot A=A$; **е)** $\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$; **ж)** $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$;
з) $\alpha\cdot(\beta\cdot A)=(\alpha\cdot\beta)\cdot A$.

3. Произведение матриц. Произведение матрицы A на матрицу B определено только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ на матрицу $B=(b_{jk})$ называется матрица $C=(c_{ik})$ такая, что $c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}$, где $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,p}$, т.е. элемент i-ой строки и k-го столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B.

i строка



k столбец

В результате умножения AB получается матрица, у которой столько же строк, сколько их в матрице A, и столько же столбцов, сколько их в матрице B.

Матрицы	A	B	$A\cdot B$
Число строк матрицы	m	n	m
Число столбцов матрицы	n	p	p

Если $AB=BA$, то матрицы A и B называются перестановочными.
Умножение матриц обладает следующими **свойствами**:

а) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$; **б)** $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$;
в) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$; **г)** $\alpha(AB)=(\alpha A)B$.

Пример. Найти произведение матриц $\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ 3 & 8 & -4\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}7 & -3\\ 5 & 4\\ 1 & 6\end{pmatrix}$.

Решение: $\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ 3 & 8 & -4\end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}7 & -3\\ 5 & 4\\ 1 & 6\end{pmatrix}_{3\times2}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}_{2\times2}$, где

$c_{11} = 5 \cdot 7 + (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 32$, $c_{12} = 5 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 7$,
$c_{21} = 3 \cdot 7 + 8 \cdot 5 + (-4) \cdot 1 = 57$, $c_{22} = 3 \cdot (-3) + 8 \cdot 4 + (-4) \cdot 6 = -1$.

Таким образом, в итоге $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & -4 \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 32 & 7 \\ 57 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 32 & 7 \\ 57 & -1 \end{pmatrix}$

После введения операций сложения и умножения матриц, заметим, что для операции транспонирования верны свойства:
1. $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$; 2. $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$.

4. Элементарные преобразования матриц. Две матрицы A и B называются **эквивалентными** (обозначается: $A \sim B$), если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Элементарными преобразованиями матриц являются:
а) перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;
б) умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
в) прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженного на одно и то же число.
Заметим, что здесь под **рядом** понимается или строка, или столбец.

Квадратная матрица A называется **невырожденной**, если определитель $\det A$ не равен нулю: $\det A \neq 0$. В противном случае матрица A называется **вырожденной**.

Матрицей, **присоединенной** к матрице A, называется матрица

$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы (вычисляется так же, как и алгебраическое дополнение элемента определителя). Присоединенную матрицу называют также **взаимной** или **союзной**.

Матрица A^{-1} называется **обратной** матрице A, если выполняется условие $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица A.

Теорема. Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

Алгоритм вычисления обратной матрицы:

1. Находим определитель исходной матрицы A. Если $\det A = 0$, то матрица A вырожденная и обратной матрицы не существует. Если $\det A \neq 0$, то матрица A невырожденная и обратная матрица существует.

2. Составляем матрицу $(A_{ij})_{n\times n}$,

A_{ij} – алгебраическое дополнение a_{ij}

3. Транспонируя полученную матрицу, получаем матрицу $\tilde{A}$

4. $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\tilde{A}$

Пример. Найти обратную матрицу A^{-1} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение: используем предложенный алгоритм. Найдем

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 34 \neq 0$

2. $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 6$, $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 8$,

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -1$, $A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$,

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 17$,

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$, $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6$,

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5$.

Получили матрицу $\begin{pmatrix} 6 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 17 \\ 4 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

3. $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 8 & 0 & -6 \\ -1 & 17 & 5 \end{pmatrix}$

4. $A^{-1} = \frac{1}{34} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 8 & 0 & -6 \\ -1 & 17 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{17} & 0 & \frac{2}{17} \\ \frac{4}{17} & 0 & -\frac{3}{17} \\ -\frac{1}{34} & \frac{1}{2} & \frac{5}{34} \end{pmatrix}$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{17} & 0 & \frac{2}{17} \\ \frac{4}{17} & 0 & -\frac{3}{17} \\ -\frac{1}{34} & \frac{1}{2} & \frac{5}{34} \end{pmatrix}$

Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Выделим в ней k строк и k столбцов ($k \leq \min(m, n)$). Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k-го порядка. Все такие определители называются минорами данной матрицы. Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется **рангом матрицы**. Обозначается: r, $r(A)$, $rangA$. Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется **базисным**. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Свойства ранга матрицы:

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.
3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Метод окаймления миноров нахождения ранга матрицы опирается на следующую теорему:

Теорема. Если у матрицы существует минор r-го порядка M_r, отличный от нуля, а все миноры $(r+1)$-го порядка M_{r+1}, содержащие M_r (окаймляющие миноры), равны нулю, то ранг матрицы равен r.

При использовании метода окаймления миноров сначала вычисляем минор второго порядка M_2, расположенный на пересечении первых двух строк и первых двух столбцов матрицы. Если он равен нулю, то переходим к вычислению других миноров второго порядка. Если все миноры второго прядка равны нулю, то ранг матрицы равен единице. Если найдется хотя бы один минор второго порядка не равный нулю, то составляем миноры третьего порядка, содержащие этот минор (окаймляющие миноры). Если все окаймляющие миноры третьего порядка равны нулю, то ранг матрицы равен двум. Если хотя бы один минор третьего порядка не равен нулю, то составляем миноры четвертого порядка, содержащие этот минор. Процесс нахождения ранга заканчивается тогда, когда найдется минор M_r не равный нулю, а все миноры M_{r+1} будут равны нулю. Тогда ранг матрицы равен r.

Пример. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ 2 & 10 & 3\\ 3 & 15 & 5\end{pmatrix}$ методом окаймления миноров.

Решение: вычислим минор второго порядка, расположенный на пересечении первых двух строк и первых двух столбцов $M_2=\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 10\end{vmatrix}=0$.

Так как он равен нулю, то переходим к вычислению следующего минора второго порядка, расположенного на пересечении первых двух строк и второго и третьего столбца $M_2'=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 10 & 3\end{vmatrix}=5$.

Так как существует $M_2'\neq 0$, то составляем миноры третьего порядка, включающие в себя M_2'. Окаймляющий минор третьего порядка только один и он равен нулю: $M_3'=\begin{vmatrix}1 & 5 & 1\\ 2 & 10 & 3\\ 3 & 15 & 5\end{vmatrix}=0$. Таким образом $r_A=2$. Заметим, что кроме базисного минора $M_2' = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = 5$ существуют и другие базисные миноры. Например, $M_2'' = \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 15 & 5 \end{vmatrix} = 5$ также является базисным.

Ответ: $r_A = 2$.

Так как определение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко, то для облегчения этой задачи используются элементарные преобразования матриц, сохраняющие ее ранг. **С помощью элементарных преобразований** матрицу можно привести к так называемому ступенчатому виду. Матрица A называется **ступенчатой**, если она имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix},$$ где $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, r}$, $r \leq k$. Условие $r \leq k$ всегда может быть достигнуто транспонированием матрицы.

Ранг ступенчатой матрицы равен r, так как существует минор порядка r, отличный от нуля.

Понятие ранга матрицы тесно связано с понятием линейной зависимости (независимости) ее строк или столбцов (рядов).

Пример. Решить предыдущий пример методом элементарных преобразований.

Решение: вначале из второй строчки вычтем первую, умноженную на два, а из третьей первую, умноженную на три. Затем из третьей вычтем вторую, умноженную на два. Получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 3 \\ 3 & 15 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Таким образом, $r_A = 2$.

Ответ: $r_A = 2$.