А. Г. МОРДКОВИЧ

Алгебра и начала математического анализа

Часть 1

УЧЕБНИК

10-11

$y = \sin x$ $y = \cos x$ $y = \operatorname{tg} x$ $y = \operatorname{ctg} x$

$y = x^r$ $y = a^x$ $y = \log_a x$

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

$y = f(a) + f'(a)(x - a)$

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$\sin x = m$	$x = (-1)^n \arcsin m + \pi n$
$\cos x = m$	$x = \pm \arccos m + 2\pi n$
$\mathrm{tg}\, x = m$	$x = \mathrm{arctg}\, m + \pi n$

$\sin x = 0$ $\quad$ $\sin x = 1$ $\quad$ $\sin x = -1$

$x = \pi n$ $\quad$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $\quad$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\cos x = 0$ $\quad$ $\cos x = 1$ $\quad$ $\cos x = -1$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $\quad$ $x = 2\pi n$ $\quad$ $x = \pi + 2\pi n$

За разработку и внедрение
новой концепции изучения курсов алгебры
в общеобразовательных учреждениях
авторам учебно-методических комплектов
для 7 — 11 классов
(руководитель — А. Г. Мордкович)
присуждена премия
Президента Российской Федерации
в области образования за 2001 год

А. Г. МОРДКОВИЧ

Алгебра

и начала математического анализа

10-11 классы

В двух частях

Часть 1

УЧЕБНИК

для учащихся общеобразовательных учреждений

(базовый уровень)

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

14-е издание, стереотипное

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

Москва 2013

УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.141я721+22.161я721
М79

На учебник получены положительные заключения
Российской академии наук (№ 10106—5215/9 от 31.10.2007)
и Российской академии образования (№ 01—666/5/7д от 29.10.2007)

Мордкович А. Г.

М79 Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А. Г. Мордкович. — 14-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2013. — 400 с. : ил.

ISBN 978-5-346-02410-1

Учебник дает цельное и полное представление о школьном курсе алгебры и начал математического анализа. Отличительные особенности учебника — более доступное для школьников изложение материала по сравнению с традиционными учебными пособиями, наличие большого числа примеров с подробными решениями. Построение всего курса осуществляется на основе приоритетности функционально-графической линии.

УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.141я721+22.161я721

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич

АЛГЕБРА
И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

10—11 классы

В двух частях

Часть I

УЧЕБНИК

для учащихся общеобразовательных учреждений
(базовый уровень)

Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 25,0. Тираж 100 000 экз. Заказ № 2099

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 5627, 367 6781; факс: 8 (499) 165 9218.
E-mail: ioc@mnemozina.ru www.mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина»
(розничная и мелкооптовая продажа книг,
«КНИГА — ПОЧТОЙ», ИНТЕРНЕТ-магазин).
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел./факс: 8 (495) 783 8284; тел.: 8 (495) 783 8285.
E-mail: magazin@mnemozina.ru www.shop.mnemozina.ru

Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).
Тел./факс: 8 (495) 665 6031 (многоканальный). E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»,
филиал «Ульяновский Дом печати».
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14.

ISBN 978-5-346-02410-1 (ч. 1)
ISBN 978-5-346-02409-5 (общ.)

ПРЕДИСЛОВИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Издательство «Мнемозина» подготовило учебно-методический комплект* для изучения в 10—11-м классах общеобразовательной школы курса алгебры и начал математического анализа на базовом уровне, предусмотренном государственным стандартом:

Программы. Математика. 5—6 классы. Алгебра. 7—9 классы. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы / авт.-сост. И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович;

А. Г. Мордкович. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник;

А. Г. Мордкович и др. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы. В 2 ч. Ч. 2. Задачник;

А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы. Методическое пособие для учителя;

В. И. Глизбург. Алгебра и начала математического анализа. 10, 11 классы (базовый уровень). Контрольные работы / Под ред. А. Г. Мордковича;

Л. А. Александрова. Алгебра и начала математического анализа. 10, 11 классы. Самостоятельные работы / Под ред. А. Г. Мордковича.

У вас в руках первая книга комплекта — учебник.

Данным учебником можно пользоваться независимо от того, на какие учебные пособия по алгебре вы делали ставку со своими учениками в 7—9-х классах, — он в определенном смысле самодостаточен. Но все же наиболее комфортно будут чувствовать себя, работая с этой книгой, те учителя, которые используют в основной школе учебные пособия, созданные коллективом авторов под руководством А. Г. Мордковича. Эти учителя привыкли к особенностям стиля изложения, приоритету функционально-графической линии и реализации в нашем курсе алгебры концепции математического моделирования и математического языка; для них предлагаемый учебник — естественное продолжение курса алгебры основной школы.

---

* Более подробную информацию об УМК можно получить на сайтах www.mnemozina.ru и www.ziimag.narod.ru

Изложение материала в учебнике дается подробно и обстоятельно. Во многих случаях весь материал, который содержится в том или ином параграфе, вы не успеете рассмотреть на уроках, но это и не нужно, поскольку данная книга предназначена в первую очередь для неспешного домашнего чтения и изучения школьниками. Опираясь на учебник, учитель сам прекрасно разберется в том, что надо рассказать учащимся на уроке, что порекомендовать им запомнить, а что просто прочитать дома (и, возможно, обсудить на следующем уроке в классе — в жанре беседы).

В тексте приведено много примеров с подробными решениями. На окончание решения примера указывает либо слово «ответ», либо значок ◁■. На окончание доказательства того или иного утверждения в необходимых случаях указывает значок ●. Часть текста дана петитом: изучать этот материал или нет — дело учителя.

Если сравнить этот учебник с нашим ранее издававшимся учебником для общеобразовательной школы (речь идет о книге А. Г. Мордковича «Алгебра и начала анализа. 10—11». Часть 1. Учебник. — М. : Мнемозина, 2000—2006), то главы 2—8 и 10 настоящего учебника текстуально практически совпадают с главами 1—8 упомянутого учебника, но произошли некоторые редакционные правки и сокращения (из-за уменьшения количества часов в неделю на изучение курса на базовом уровне). Две главы настоящего учебника являются новыми. Глава 1 носит характер повторения и расширения известного из курса алгебры основной школы материала о числовых функциях, а глава 9, написанная П. В. Семеновым, посвящена элементам теории вероятностей.

Автор

ГЛАВА 1

Числовые функции

§ 1. Определение числовой функции и способы ее задания

Напомним общие сведения о функциях, известные вам из курса алгебры основной школы.

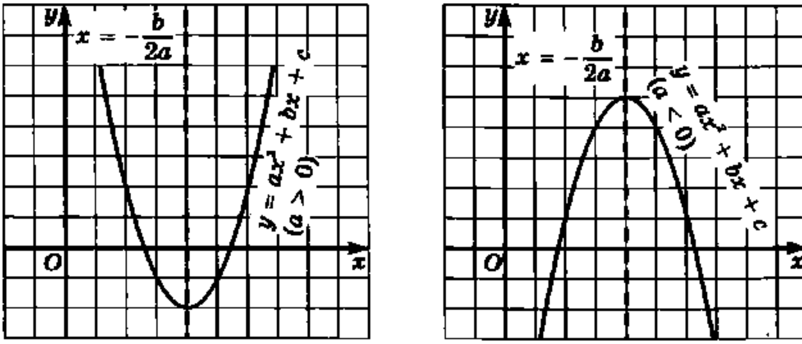
Определение 1. Если даны числовое множество X и правило f, позволяющее поставить в соответствие каждому элементу x из множества X определенное число y, то говорят, что задана **функция** $y = f(x)$ **с областью определения** X. Пишут: $y = f(x)$, $x \in X$. Для области определения функции используют обозначение $D(f)$. Переменную x называют **независимой переменной** или **аргументом**, а переменную y — **зависимой переменной**. Множество всех значений функции $y = f(x)$, $x \in X$ называют **областью значений функции** и обозначают $E(f)$.

Если $f(x)$ — алгебраическое выражение и область X определения функции $y = f(x)$ совпадает с областью определения этого выражения (такую область определения называют *естественной*), то вместо записи $y = f(x)$, $x \in X$ используют более короткую запись $y = f(x)$.

Определение 2. Если дана функция $y = f(x)$, $x \in X$ и на координатной плоскости xOy отмечены все точки вида $(x; y)$, где $x \in X$, а $y = f(x)$, то множество этих точек называют **графиком функции** $y = f(x)$, $x \in X$.

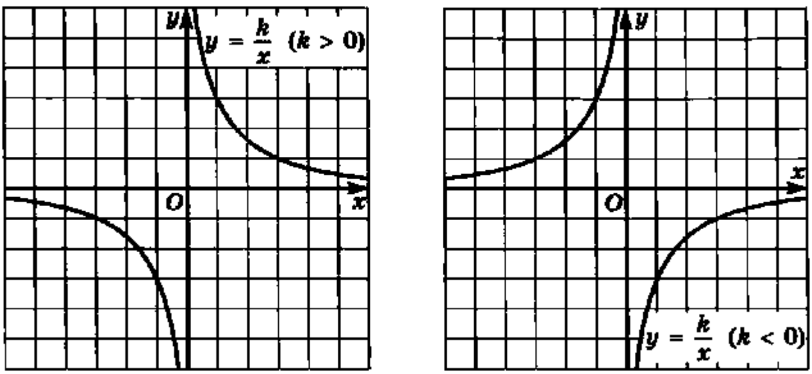
Если известен график функции $y = f(x)$, $x \in X$, то область значений функции можно найти, спроецировав график на ось ординат. То числовое множество, которое получится на оси ординат в результате указанного проецирования, и будет представлять собой $E(f)$.

Из курса алгебры основной школы вам известно, как выглядят графики некоторых функций: $y = kx + m$ — прямая, $y = ax^2 + bx + c$ — парабола (при $a \neq 0$, рис. 1), $y = \dfrac{k}{x}$ — гипербола (при $k \neq 0$, рис. 2); известны вам также графики функций $y = \sqrt{x}$ (рис. 3), $y = |x|$ (рис. 4).



а *б*

Рис. 1



а *б*

Рис. 2

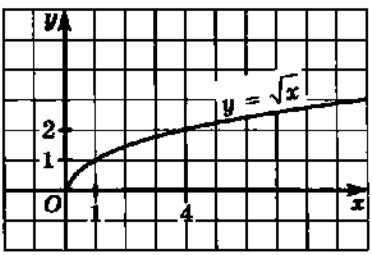


Рис. 3

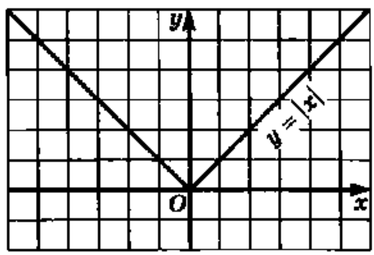


Рис. 4

Зная график функции $y = f(x)$, можно с помощью геометрических преобразований построить некоторые другие графики. Например, график функции $y = f(x + a) + b$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом на вектор $(-a; b)$, т. е. на $|a|$ вправо, если $a < 0$, и влево, если $a > 0$, на $|b|$ вверх, если

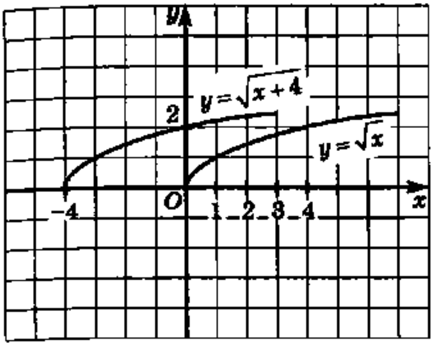


Рис. 5

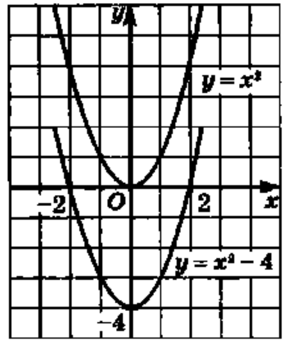


Рис. 6

$b > 0$, и вниз, если $b < 0$. Например, на рисунке 5 изображены графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{x+4}$, а на рисунке 6 изображены графики функций $y = x^2$ и $y = x^2 - 4$.

Иногда говорят так: чтобы, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(x + a) + b$, нужно перейти к новой системе координат, выбрав началом новой системы точку $(-a; b)$, и к новой системе «привязать» график функции $y = f(x)$. Например, на рисунке 7 изображен график функции $y = |x - 2| + 3$. Началом новой системы координат выбрана точка (2; 3), и к новой системе «привязан» график функции $y = |x|$.

Нетрудно, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = -f(x)$. Для этого достаточно осуществить симметрию графика функции $y = f(x)$ относительно оси абсцисс. Например, на рисунке 8 изображены графики функций $y = 2x + 6$ и $y = -(2x + 6)$.

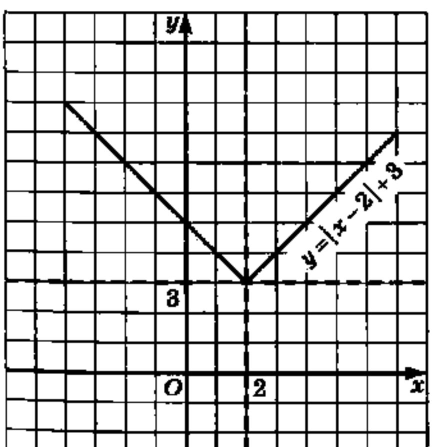


Рис. 7

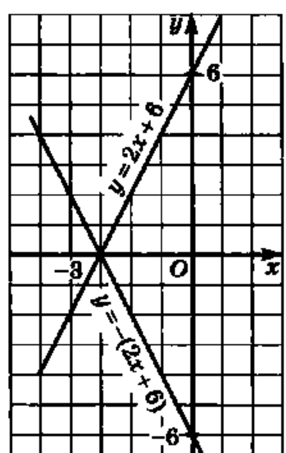


Рис. 8

Пример 1. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt{x+1}, \text{ если } 0 < x \leqslant 3, \\ \dfrac{3}{x} + 1, \text{ если } x > 3. \end{cases}$$

а) Вычислить $f(-2)$, $f(0)$, $f(1{,}25)$, $f(6)$, $f(-3)$.

б) Найти $D(f)$ и $E(f)$.

Решение.

а) Значение $x = -2$ удовлетворяет условию $-2 \leqslant x \leqslant 0$, следовательно, $f(-2)$ надо вычислять по формуле $f(x) = -x^2$; $f(-2) = -(-2)^2 = -4$.

Значение $x = 0$ удовлетворяет условию $-2 \leqslant x \leqslant 0$, следовательно, $f(0)$ надо вычислять по формуле $f(x) = -x^2$; $f(0) = -0^2 = 0$.

Значение $x = 1{,}25$ удовлетворяет условию $0 < x \leqslant 3$, следовательно, $f(1{,}25)$ надо вычислять по формуле $f(x) = \sqrt{x+1}$; $f(1{,}25) = \sqrt{1{,}25 + 1} = 1{,}5$.

Значение $x = 6$ удовлетворяет условию $x > 3$, следовательно, $f(6)$ надо вычислять по формуле $f(x) = \dfrac{3}{x} + 1$; $f(6) = \dfrac{3}{6} + 1 = 1{,}5$.

Значение $x = -3$ не принадлежит области определения функции, а потому требование вычислить $f(-3)$ в данном случае некорректно.

б) В этом примере речь идет о так называемой *кусочной функции* (или о кусочно-заданной функции). Область определения функции состоит из трех промежутков: $[-2; 0]$, $(0; 3]$, $(3; +\infty)$. Объединив их, получим луч $[-2; +\infty)$.

Чтобы найти область (впрочем, можно говорить и множество) значений функции, построим ее график. Он состоит из трех «кусочков» — части параболы $y = -x^2$, взятой на отрезке $[-2; 0]$ (рис. 9), части кривой $y = \sqrt{x+1}$, взятой на полуинтервале $(0; 3]$ (рис. 10), и части гиперболы $y = \dfrac{3}{x} + 1$, взятой на открытом луче $(3; +\infty)$ (рис. 11); заметим, что $y = 1$ — асимптота гиперболы. Объединив эти кусочки на одном чертеже, получим график функции $y = f(x)$ (рис. 12). Спроецировав этот график на ось y, получим область значений функции, которая состоит из отрезка $[-4; 0]$ и полуинтервала $(1; 2]$.

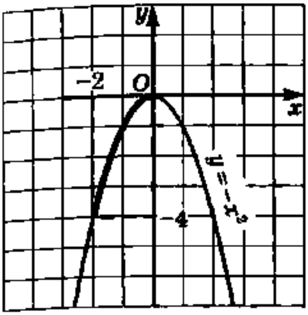


Рис. 9

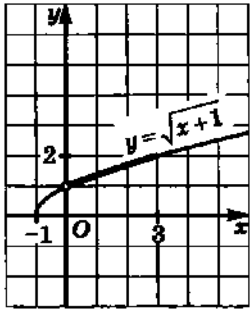


Рис. 10

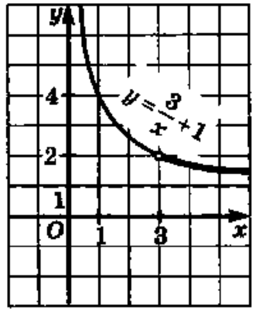


Рис. 11

Итак,

$$D(f) = [-2; +\infty),$$
$$E(f) = [-4; 0] \cup (1; 2].$$

Еще раз подчеркнем, что задать функцию — это значит указать п р а в и л о, которое позволяет по произвольно выбранному значению $x \in D(f)$ вычислить соответствующее значение y. Чаще всего это правило связано с формулой (например, $y = \sqrt{x}$) или с несколькими формулами, как было в примере 1. Такой способ задания функции обычно называют *аналитическим*. Есть и другие способы задания функции.

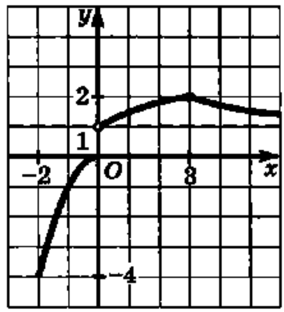


Рис. 12

Пусть F — некоторая линия на координатной плоскости и пусть, спроецировав эту линию на ось x, мы получим отрезок $[a; b]$ (рис. 13). Возьмем произвольную точку x из отрезка $[a; b]$ и проведем через нее прямую, параллельную оси ординат. Потребуем дополнительно, чтобы каждая такая прямая пересекала линию F только в одной точке — на рисунке 13 соответствующая точка обозначена буквой M. Ордината точки M — это число $f(x)$, соответствующее выбранному значению x. Тем самым на отрезке $[a; b]$ задана функция $y = f(x)$. Такой способ задания функции называют *графическим*.

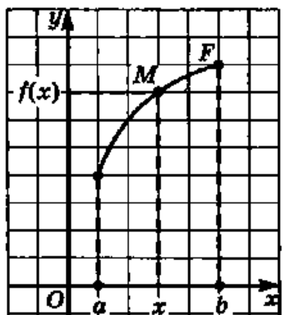


Рис. 13

Если функция была задана аналитически и нам удалось построить ее график, то тем самым мы фактически осуществили переход от аналитического способа задания функции к графическому. Обратный же переход удается осуществить далеко не всегда. Как правило, это довольно трудная задача.

Кроме аналитического и графического, на практике применяют *табличный* способ задания функции — с помощью таблицы, в которой указаны значения функции (иногда точные, иногда приближенные) для конечного множества значений аргумента. Примерами табличного задания функции могут служить таблицы квадратов чисел, кубов чисел, квадратных корней и т. д.

Во многих случаях табличное задание функции является удобным. Оно позволяет найти значения функции для имеющихся в таблице значений аргумента без всяких вычислений.

Аналитический, графический, табличный — наиболее популярные способы задания функции, для наших нужд этих способов вполне достаточно. На самом деле в математике имеется довольно много различных способов задания функции, но мы познакомим вас еще только с одним способом, который используется в весьма своеобразных ситуациях. Речь идет о *словесном* способе, когда правило задания функции описывается словами. Приведем пример.

Пример 2. Функция $y = f(x)$ задана на множестве всех неотрицательных чисел с помощью следующего правила: каждому числу x ставится в соответствие первая цифра после запятой в десятичной записи числа x. Если, скажем, $x = 2{,}534$, то $f(x) = 5$ (первый знак после запятой — цифра 5); если $x = 13{,}002$, то $f(x) = 0$; если $x = \frac{2}{3}$, то, записав $\frac{2}{3}$ в виде бесконечной периодической десятичной дроби $0{,}6666\ldots$, находим: $f(x) = 6$.

А чему равно значение $f(15)$? Оно равно 0, так как $15 = 15{,}000\ldots$, и мы видим, что первая цифра после запятой есть 0 (вообще-то верно и равенство $15 = 14{,}99\ldots$, но обычно не рассматривают бесконечные периодические десятичные дроби с периодом 9).

Любое неотрицательное число x можно записать в виде десятичной дроби (конечной или бесконечной), а потому каждому значению x можно поставить в соответствие значение первой цифры после запятой, так что мы можем говорить о функции, хотя и несколько необычной. У этой функции

$$D(f) = [0; +\infty),\ E(f) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}.$$

§ 2. Свойства функций

В этом параграфе мы вспомним и сформулируем все свойства функций, изученные вами в 7—9-м классах, напомним их геометрический смысл и договоримся, в каком порядке следует перечислять эти свойства при чтении графика функции. Обратите внимание, что во всех определениях фигурирует числовое множество X — подмножество области определения функции: $X \subset D(f)$. На практике чаще всего X — числовой промежуток (отрезок, интервал, луч и т. д.).

Определение 1. Функцию $y = f(x)$ называют **возрастающей на множестве** $X \subset D(f)$, если для любых точек x_1 и x_2 множества X таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение 2. Функцию $y = f(x)$ называют **убывающей на множестве** $X \subset D(f)$, если для любых точек x_1 и x_2 множества X таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

На практике удобнее пользоваться следующими формулировками: функция возрастает, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции; функция убывает, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Обычно термины «возрастающая функция», «убывающая функция» объединяют общим названием **монотонная функция**, а исследование функции на возрастание или убывание называют *исследованием функции на монотонность*.

Если функция возрастает (или убывает) на своей естественной области определения, то говорят, что функция возрастающая (или убывающая) — без указания числового множества X.

Пример 1. Исследовать на монотонность функцию:
а) $y = 5 - 2x$; б) $y = x^3 + 2$.

Решение. а) Введем обозначение: $f(x) = 5 - 2x$. Если $x_1 < x_2$, то, по свойствам числовых неравенств, $-2x_1 > -2x_2$, и, далее, $5 - 2x_1 > 5 - 2x_2$, т. е. $f(x_1) > f(x_2)$.

Итак, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, а это означает, что заданная функция убывает на всей числовой прямой.

б) Введем обозначение: $f(x) = x^3 + 2$. Возьмем произвольные значения аргумента x_1 и x_2, пусть $x_1 < x_2$. Тогда, по свойствам числовых неравенств, получим:

$$x_1^3 < x_2^3; \qquad x_1^3 + 2 < x_2^3 + 2.$$

Последнее неравенство означает, что $f(x_1) < f(x_2)$.

Итак, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, а это значит, что заданная функция возрастает на всей числовой прямой.

Определение 3. Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной снизу на множестве** $X \subset D(f)$, если все значения этой функции на множестве X *больше некоторого* числа; иными словами, если существует число m такое, что для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) > m$.

Определение 4. Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной сверху на множестве** $X \subset D(f)$, если все значения этой функции *меньше некоторого* числа; иными словами, если существует число M такое, что для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) < M$.

Если множество X не указано, то подразумевается, что речь идет об ограниченности функции снизу или сверху на всей области ее определения.

Если функция ограничена и снизу и сверху на всей области определения, то ее называют **ограниченной**.

Ограниченность функции легко читается по ее графику: если функция ограничена снизу, то ее график целиком расположен выше некоторой горизонтальной прямой $y = m$ (рис. 14); если функция ограничена сверху, то ее график целиком расположен ниже некоторой горизонтальной прямой $y = M$ (рис. 15).

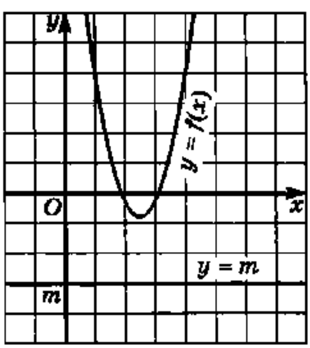


Рис. 14

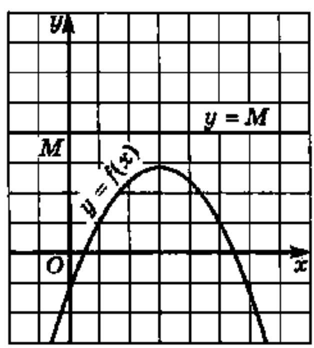


Рис. 15

Пример 2. Исследовать на ограниченность функцию

$$y = \sqrt{9 - x^2}.$$

Решение. С одной стороны, вполне очевидно неравенство

$$\sqrt{9 - x^2} \geqslant 0,$$

это означает, что функция ограничена снизу.

С другой стороны, $9 - x^2 \leqslant 9$, а потому

$$\sqrt{9 - x^2} \leqslant 3.$$

Это означает, что функция ограничена сверху. Итак, функция ограничена и сверху, и снизу; можно сказать короче: ограниченная функция.

Определение 5. Число m называют **наименьшим значением функции** $y = f(x)$ **на множестве** $X \subset D(f)$, если:

1) существует точка $x_0 \in X$ такая, что $f(x_0) = m$;

2) для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство

$$f(x) \geqslant f(x_0).$$

Определение 6. Число M называют **наибольшим значением функции** $y = f(x)$ **на множестве** $X \subset D(f)$, если:

1) существует точка $x_0 \in X$ такая, что $f(x_0) = M$;

2) для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant f(x_0).$$

Наименьшее значение функции обозначают символом $y_{\text{наим}}$, а наибольшее — символом $y_{\text{наиб}}$. Если множество X не указано, то подразумевается, что речь идет о поиске наименьшего или наибольшего значения функции на всей области определения.

Достаточно очевидны следующие полезные утверждения (в качестве легкого упражнения докажите эти утверждения).

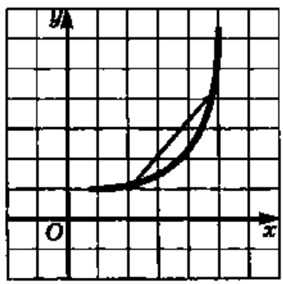


Рис. 16

1) *Если у функции существует* $y_{\text{наим}}$, *то она ограничена снизу.*

2) *Если у функции существует* $y_{\text{наиб}}$, *то она ограничена сверху.*

3) *Если функция не ограничена снизу, то у нее не существует* $y_{\text{наим}}$.

4) *Если функция не ограничена сверху, то у нее не существует* $y_{\text{наиб}}$.

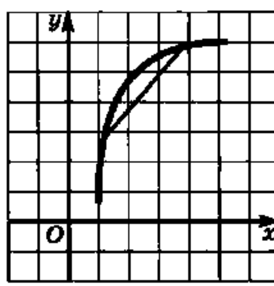


Рис. 17

Напомним еще два свойства функций. Первое — свойство выпуклости функции. Считается, что *функция выпукла вниз* на промежутке $X \subset D(f)$, если, соединив любые две точки ее графика с абсциссами из X отрезком, мы обнаружим, что соответствующая часть графика лежит ниже проведенного отрезка (рис. 16). *Функция выпукла вверх* на промежутке $X \subset D(f)$, если, соединив любые две точки ее графика с абсциссами из X отрезком, мы обнаружим, что соответствующая часть графика лежит выше проведенного отрезка (рис. 17).

Второе свойство — *непрерывность функции на промежутке X* — означает, что график функции на данном промежутке не имеет точек разрыва (т. е. представляет собой сплошную линию).

Замечание. На самом деле о непрерывности функции можно говорить только тогда, когда *доказано*, что функция является непрерывной. Но соответствующее определение сложное и нам пока не по силам (мы дадим его позднее, в § 26). То же самое можно сказать и о понятии выпуклости. Поэтому, обсуждая указанные два свойства функций, будем пока по-прежнему опираться на наглядно-интуитивные представления.

Пример 3. Прочитать график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt{x+1}, \text{ если } 0 < x \leqslant 3, \\ \dfrac{3}{x} + 1, \text{ если } x > 3. \end{cases}$$

Решение. Прочитать график — это значит перечислить свойства функции. Всю информацию снимем с чертежа, представленного в § 1 на рисунке 12.

1) $D(f) = [-2; +\infty)$.

2) Функция возрастает на отрезке $[-2; 0]$ и на полуинтервале $(0; 3]$; функция убывает на луче $[3; +\infty)$.

3) Функция ограничена и снизу, и сверху.

4) $y_{\text{наим}} = -4$ (достигается в точке $x = -2$), $y_{\text{наиб}} = 2$ (достигается в точке $x = 3$).

5) Функция непрерывна на отрезке $[-2; 0]$ и на открытом луче $(0; +\infty)$. В точке $x = 0$ функция претерпевает разрыв.

6) $E(f) = [-4; 0] \cup (1; 2]$.

Определение 7. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют четной, если для любого значения x из множества X выполняется равенство

$$f(-x) = f(x).$$

Определение 8. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют нечетной, если для любого значения x из множества X выполняется равенство

$$f(-x) = -f(x).$$

Пример 4. Доказать, что $y = x^4$ — четная функция.

Решение. Здесь $f(x) = x^4$, $f(-x) = (-x)^4 = x^4$. Значит, для любого значения x выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, т. е. функция является четной.

Аналогично можно доказать, что функции $y = x^2$, $y = x^6$, $y = x^8$ являются четными.

Пример 5. Доказать, что $y = x^3$ — нечетная функция.

Решение. Здесь $f(x) = x^3$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$. Значит, для любого значения x выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$, т. е. функция является нечетной.

Аналогично можно доказать, что функции $y = x$, $y = x^5$, $y = x^7$ являются нечетными.

Итак, $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$ — нечетные функции, $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$ — четные функции. И вообще для любой функции вида $y = x^n$, где n — натуральное число, можно сделать вывод: если n — нечетное число, то функция $y = x^n$ нечетная; если n — четное число, то функция $y = x^n$ четная.

Существуют функции, которые не являются ни четными, ни нечетными. Такова, например, функция $y = 2x + 3$. В самом деле, пусть $f(x) = 2x + 3$; тогда $f(1) = 5$, а $f(-1) = 1$, т. е. $f(-1) \neq f(1)$ и $f(-1) \neq -f(1)$. Значит, не выполняется ни тождество $f(-x) = f(x)$, ни тождество $f(-x) = -f(x)$.

Итак, функция может быть четной, нечетной, а также ни той ни другой.

Изучение вопроса, является ли заданная функция четной или нечетной, называют *исследованием функции на четность*.

В определениях 7 и 8 речь идет о значениях функции в точках x и $-x$. Тем самым предполагается, что функция определена и в точке x, и в точке $-x$. Это значит, что точки x и $-x$ одновременно принадлежат области определения функции. Если числовое множество X вместе с каждым своим элементом x содержит и противоположный элемент $-x$, то такое множество называют *симметричным множеством*.

Скажем, $(-2; 2)$, $[-5; 5]$, $(-\infty; +\infty)$ — симметричные множества, в то время как $[0; +\infty)$, $(-2; 3)$, $[-5; 4]$ — несимметричные множества.

Если функция $y = f(x)$, $x \in X$ четная или нечетная, то ее область определения X — симметричное множество. Если же X — несимметричное множество, то функция $y = f(x)$, $x \in X$ не может быть ни четной, ни нечетной.

Учитывая сказанное выше, рекомендуем при исследовании функции на четность использовать следующий алгоритм.

Алгоритм исследования функции $y = f(x)$, $x \in X$ на четность

1. Установить, симметрична ли область определения функции. Если нет, то объявить, что функция не является ни четной, ни нечетной. Если да, то перейти ко второму шагу алгоритма.
2. Составить выражение $f(-x)$.
3. Сравнить $f(-x)$ и $f(x)$:
   а) если имеет место тождество $f(-x) = f(x)$, то функция четная;
   б) если имеет место тождество $f(-x) = -f(x)$, то функция нечетная;
   в) если хотя бы в одной точке $x \in X$ выполняется соотношение $f(-x) \neq f(x)$ и хотя бы в одной точке $x \in X$ выполняется соотношение $f(-x) \neq -f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

Пример 6. Исследовать на четность функцию:

а) $y = x^4 + \frac{2}{x^6}$; в) $y = \frac{x-4}{x^2-9}$;

б) $y = x^5 - \frac{3}{x^3}$; г) $y = \sqrt{x-3}$.

Решение. а) $y = f(x)$, где $f(x) = x^4 + \frac{2}{x^6}$.

1) Функция определена при всех значениях x, кроме 0. Следовательно, $D(f)$ — симметричное множество.

2) $f(-x) = (-x)^4 + \frac{2}{(-x)^6} = x^4 + \frac{2}{x^6}$.

3) Для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Таким образом, $y = x^4 + \frac{2}{x^6}$ — четная функция.

б) $y = f(x)$, где $f(x) = x^5 - \frac{3}{x^3}$.

1) Функция определена при всех значениях x, кроме 0. Следовательно, $D(f)$ — симметричное множество.

2) $f(-x) = (-x)^5 - \frac{3}{(-x)^3} = -x^5 - \frac{3}{-x^3} = -\left(x^5 - \frac{3}{x^3}\right)$.

3) Для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Таким образом, $y = x^5 - \frac{3}{x^3}$ — нечетная функция.

в) $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{x-4}{x^2-9}$.

1) Функция определена при всех значениях x, кроме 3 и -3. Значит, область определения функции — числовая прямая, из которой удалены две точки: 3 и -3. Это симметричное множество.

2) $f(-x) = \dfrac{(-x) - 4}{(-x)^2 - 9} = -\dfrac{x + 4}{x^2 - 9}$.

3) Сравнив $f(-x)$ и $f(x)$, замечаем, что, скорее всего, не выполняются ни тождество $f(-x) = f(x)$, ни тождество $f(-x) = -f(x)$. Чтобы в этом убедиться, возьмем конкретное значение x, например $x = 4$; имеем: $f(4) = 0$, а $f(-4) = -\dfrac{8}{7}$, т. е. $f(-4) \neq f(4)$ и $f(-4) \neq -f(4)$.

Таким образом, функция не является ни четной, ни нечетной.

г) Функция $y = \sqrt{x - 3}$ определена на луче $[3; +\infty)$. Этот луч — несимметричное множество, значит, функция не является ни четной, ни нечетной.

Пример 7. Исследовать на четность функцию:

а) $y = |x|$, $x \in [-2; 2]$;
в) $y = x^3$, $x \in (-5; 5)$;
б) $y = |x|$, $x \in [-3; 3)$;
г) $y = x^3$, $x \in (-5; 5]$.

Решение. а) $D(f) = [-2; 2]$ — симметричное множество, и для любого значения x выполняется равенство $|-x| = |x|$. Значит, заданная функция — четная.

б) $D(f) = [-3; 3)$ — несимметричное множество. В самом деле, точка -3 принадлежит полуинтервалу $[-3; 3)$, а противоположная точка 3 не принадлежит этому полуинтервалу. Значит, функция не является ни четной, ни нечетной.

в) $D(f) = (-5; 5)$ — симметричное множество, и $(-x)^3 = -x^3$ для любого значения x из области определения функции. Значит, заданная функция — нечетная.

г) Функция задана на полуинтервале, который не является симметричным множеством. Значит, функция ни четная, ни нечетная.

Теперь напомним геометрический смысл свойства четности и свойства нечетности функции.

Пусть $y = f(x)$, $x \in X$ — четная функция, т. е. $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in X$. Рассмотрим две точки графика функции: $A(x; f(x))$ и $B(-x; f(-x))$. Так как $f(-x) = f(x)$, то у точек A и B абсциссы являются противоположными числами, а ординаты одинаковы,

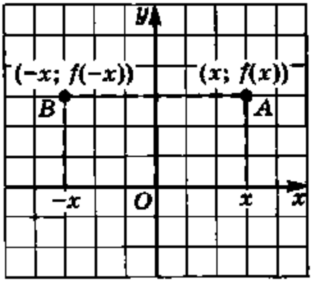


Рис. 18

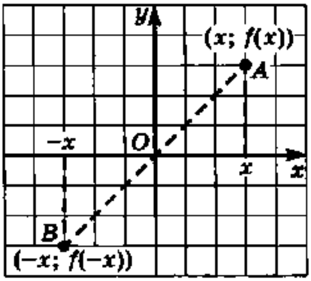


Рис. 19

т. е. эти точки симметричны относительно оси y (рис. 18). Таким образом, для каждой точки A графика четной функции существует симметричная ей относительно оси y точка B того же графика. Это означает, что ***график четной функции симметричен относительно оси y.***

Пусть $y = f(x)$, $x \in X$ — нечетная функция, т. е. $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in X$. Рассмотрим две точки графика функции: $A(x; f(x))$ и $B(-x; f(-x))$. Так как $f(-x) = -f(x)$, то у точек A и B абсциссы являются противоположными числами и ординаты являются противоположными числами, т. е. эти точки симметричны относительно начала координат (рис. 19). Таким образом, для каждой точки A графика нечетной функции существует симметричная ей относительно начала координат точка B того же графика. Это означает, что ***график нечетной функции симметричен относительно начала координат.***

Верны и обратные утверждения.

Если график функции $y = f(x)$, $x \in X$ симметричен относительно оси ординат, то $y = f(x)$, $x \in X$ — четная функция.

В самом деле, симметрия графика функции $y = f(x)$ относительно оси y означает, что для любого значения x из области определения функции справедливо равенство $f(-x) = f(x)$, т. е. $y = f(x)$ — четная функция.

Если график функции $y = f(x)$, $x \in X$ симметричен относительно начала координат, то $y = f(x)$, $x \in X$ — нечетная функция.

Симметрия графика функции $y = f(x)$ относительно начала координат означает, что для любого значения x из области определения функции справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$, т. е. $y = f(x)$ — нечетная функция.

§ 3. Обратная функция

Сравним функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, графики которых изображены на рисунках 20 и 21. Обе они определены на отрезке $[a; b]$ и имеют множеством своих значений отрезок $[c; d]$. Функция $y = f(x)$

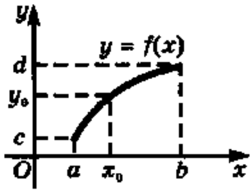


Рис. 20

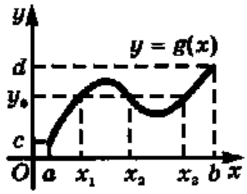


Рис. 21

обладает следующим свойством: какое бы число y_0 из множества значений функции ни взять, оно является значением функции **только в одной точке** x_0: $y_0 = f(x_0)$. Функция $y = g(x)$ этим свойством не обладает; например, для выбранного на рисунке 21 значения y_0 имеем: $y_0 = g(x_1)$, $y_0 = g(x_2)$ и $y_0 = g(x_3)$. Иными словами, среди множества значений функции $y = g(x)$ есть такие, которые функция принимает более чем в одной точке области определения. Говорят, что функция $y = f(x)$ *обратима*, а функция $y = g(x)$ — *необратима*. Дадим точное определение.

Определение 1. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют **обратимой**, если любое свое значение она принимает только в одной точке множества X (иными словами, если разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции).

Теорема 1. **Если функция $y = f(x)$ $x \in X$ монотонна на множестве X, то она обратима.**

Доказательство. Пусть для определенности функция $y = f(x)$ возрастает на X и $x_1 \neq x_2$ — две точки из X; пусть, например, $x_1 < x_2$. Поскольку функция возрастает, из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$. Таким образом, разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции, т. е. функция обратима. ●

Наглядную иллюстрацию этой теоремы дают рисунки 20 и 21; функция $y = f(x)$ монотонна и обратима, тогда как функция $y = g(x)$ немонотонна и необратима.

Определение 2. Пусть $y = f(x)$, $x \in X$ — обратимая функция и $E(f) = Y$. Поставим в соответствие каждому y из Y то единственное значение x, при котором $f(x) = y$ (т. е. единственный корень уравнения $f(x) = y$ относительно переменной x). Тогда получим функцию, которая определена на Y, а X — ее область значений. Эту функцию обозначают $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$ и называют **обратной** по отношению к функции $y = f(x)$, $x \in X$.

Из теоремы 1 следует, что для любой монотонной на X функции $y = f(x)$ существует обратная функция. Чтобы ее найти, надо из уравнения $y = f(x)$ выразить x через y.

Теорема 2. **Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на множестве X, а Y — область значений функции, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ возрастает (убывает) на Y.**

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ — возрастающая функция, y_1 и y_2 — два ее значения, причем $y_1 < y_2$. Так как функция обратима, то каждое из этих значений достигается в одной точке: $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. Значения x_1 и x_2 связаны неравенством $x_1 < x_2$. В самом деле, если предположить, что $x_1 \geqslant x_2$, то из возрастания функции $y = f(x)$ следовало бы $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, т. е. $y_1 \geqslant y_2$, что противоречит условию. Значит, из $y_1 < y_2$ следует $x_1 < x_2$, т. е. $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, а это означает, что обратная функция $x = f^{-1}(y)$ возрастает на Y. ●

Пример 1. Показать, что для функции $y = 5x - 3$ существует обратная функция, и найти ее аналитическое выражение.

Решение. Линейная функция $y = 5x - 3$ определена на множестве $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел, возрастает на $\boldsymbol{R}$, область ее значений есть $\boldsymbol{R}$. Значит, обратная функция существует на $\boldsymbol{R}$. Чтобы найти ее аналитическое выражение, решим уравнение $y = 5x - 3$ относительно x; получим: $x = \frac{y+3}{5}$. Это и есть искомая обратная функция. Она определена и возрастает на $\boldsymbol{R}$. ◁

Пример 2. Показать, что для функции $y = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$ существует обратная функция, и найти ее аналитическое выражение.

Решение. Функция $y = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$ убывает, и область ее значений — луч $[0; +\infty)$ (рис. 22). Значит, обратная функция существует на $[0; +\infty)$.

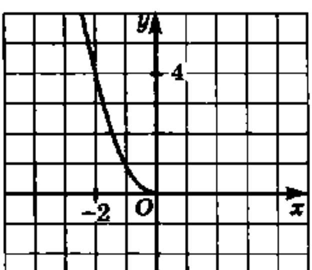


Рис. 22

Из уравнения $y = x^2$ находим: $x = \sqrt{y}$ или $x = -\sqrt{y}$. По условию, $x \in (-\infty; 0]$. Этому промежутку принадлежат значения функции $x = -\sqrt{y}$ и не принадлежат значения функции $x = \sqrt{y}$. Таким образом, искомая обратная функция такова: $x = -\sqrt{y}$, $y \in [0; +\infty)$. Эта функция, как и исходная функция $y = x^2$, $x \in (-\infty; 0]$, является убывающей. ◁

Замечание. Монотонность функции, как мы видели, является достаточным условием существования обратной функции (т. е. из монотонности следует обратимость). Но монотонность не является необходимым условием (т. е. из обратимости необязательно должна следовать монотонность). Так, на рисунке 23 изображен график немонотонной, но обратимой функции.

Переход от функции $y = f(x)$, $x \in X$ к обратной функции $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$ сводится лишь к изменению ролей множеств X и Y: в первом случае осуществляется переход от X к Y, во втором — от Y к X, тогда как зависимость между X и Y одна и та же в обоих случаях. Поэтому *графики функций $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ представляют собой одно и то же множество точек координатной плоскости xOy.*

Но на практике аргумент обратной функции обозначают более привычной буквой x, а значение функции — буквой y, т. е. вместо $x = f^{-1}(y)$ пишут $y = f^{-1}(x)$. Но если пара чисел $(x; y)$ удовлетворяет уравнению $y = f(x)$ или эквивалентному уравнению $x = f^{-1}(y)$, то уравнению $y = f^{-1}(x)$ удовлетворяет пара чисел $(y; x)$. Поэтому график функции $y = f^{-1}(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования плоскости xOy, переводящего точку $(x; y)$ в точку $(y; x)$. Этим преобразованием, как мы сейчас докажем, является симметрия относительно прямой $y = x$ (биссектрисы I и III координатных углов).

Теорема. **Точки $M(a; b)$ и $P(b; a)$ симметричны относительно прямой $y = x$.**

Доказательство. Будем считать для определенности, что a и b — положительные числа. Рассмотрим треугольники OAM и OBP (рис. 24). Они равны, значит, $OP = OM$ и $\angle MOA = \angle BOP$. Но тогда и $\angle POH = \angle HOM$, поскольку прямая $y = x$ — биссектриса

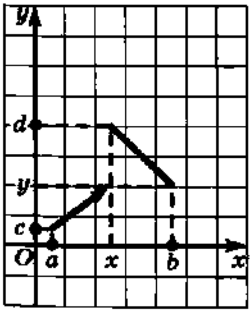


Рис. 23

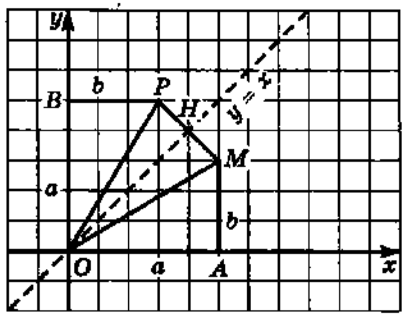


Рис. 24

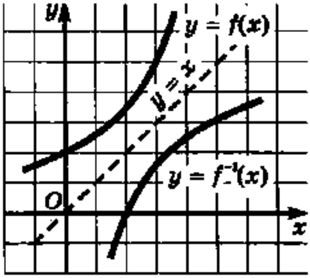


Рис. 25

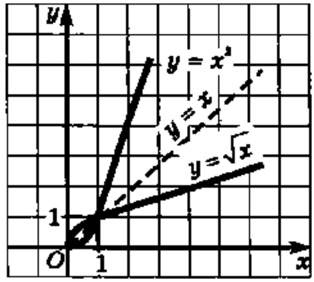


Рис. 26

угла AOB. Итак, треугольник POM равнобедренный, OH — его биссектриса, а значит, и ось симметрии. Точки M и P симметричны относительно прямой OH, что и требовалось доказать. ●

Значит, *чтобы получить график функции* $y = f^{-1}(x)$, *обратной по отношению к функции* $y = f(x)$, *надо график функции* $y = f(x)$ *преобразовать симметрично относительно прямой* $y = x$ (рис. 25).

Пример 3. Дана функция $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$. Доказать, что для нее существует обратная функция, записать аналитическое выражение обратной функции в виде $y = f^{-1}(x)$ и построить график обратной функции.

Решение. Заданная функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, значит, она имеет обратную функцию. Из уравнения $y = x^2$ находим: $x = \sqrt{y}$ или $x = -\sqrt{y}$. Промежутку $[0; +\infty)$ принадлежат лишь значения функции $x = \sqrt{y}$. Это и есть обратная функция, которая определена на промежутке $[0; +\infty)$.

Поменяв местами x и y, получим: $y = \sqrt{x}$, $x \in [0; +\infty)$. График этой функции получается из графика функции $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$ с помощью симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 26). ◁

ГЛАВА 2

Тригонометрические функции

§ 4. Числовая окружность

В курсе алгебры 7—9-го классов вы изучали алгебраические функции, т. е. функции, заданные аналитическими выражениями, в записи которых использовались алгебраические операции над числами и переменной (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение квадратного и кубического корней). Но математические модели реальных ситуаций часто бывают связаны с функциями других классов — не алгебраическими. В школьном курсе математики рассматриваются показательные, логарифмические и тригонометрические функции. Мы приступаем сейчас к изучению тригонометрических функций.

Для введения тригонометрических функций нам понадобится новая математическая модель — *числовая окружность*.

С числовой окружностью вы до сих пор не встречались, зато хорошо знакомы с числовой прямой. Что такое числовая прямая? Это прямая, на которой заданы начальная точка O, масштаб (единичный отрезок) и положительное направление. Любому действительному числу мы можем сопоставить единственную точку на прямой, и обратно: любая точка прямой соответствует единственному числу.

Как по числу x найти на прямой соответствующую точку M? Числу 0 соответствует начальная точка O. Если $x > 0$, то, двигаясь по прямой из точки O в положительном направлении, нужно пройти путь длиной x. Конец этого пути и будет искомой точкой $M(x)$. Если $x < 0$, то, двигаясь по прямой из точки O в отрицательном направлении, нужно пройти путь длиной $|x|$. Конец этого пути и будет искомой точкой $M(x)$. Число x — координата точки M.

А как решается обратная задача, как найти координату x заданной точки M на числовой прямой? Надо найти длину отрезка OM и взять ее со знаком + или − в зависимости от того, с какой стороны от точки O расположена на прямой точка M.

Но в реальной жизни приходится двигаться не только по прямой. Довольно часто рассматривается движение по окружности. Вот конкретный пример. Будем считать беговую дорожку стадиона окружностью (на самом деле это, конечно, не окружность

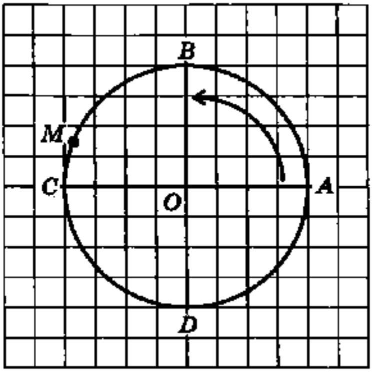


Рис. 27

и тем более не круг, но вспомните, как обычно говорят спортивные комментаторы: «бегун пробежал круг», «до финиша осталось пробежать полкруга» и т. д.), и пусть ее длина равна 400 м. Отмечаем старт — точку A (рис. 27). Бегун из точки A движется по окружности против часовой стрелки. Где он будет через 200 м? через 400 м? через 800 м? через 1500 м? А где провести финишную черту, если он бежит марафонскую дистанцию 42 км 195 м?

Через 200 м он будет находиться в точке C, диаметрально противоположной точке A (200 м — это длина половины беговой дорожки, т. е. длина половины окружности). Пробежав 400 м («один круг»), он вернется в точку A. Пробежав 800 м («два круга»), он вновь окажется в точке A. А что такое 1500 м? Это «три круга» (1200 м) плюс еще 300 м, т. е. $\frac{3}{4}$ беговой дорожки, финиш этой дистанции будет в точке D.

Нам осталось разобраться с марафоном. Пробежав 105 кругов, спортсмен преодолеет путь $105 \cdot 400 = 42\,000$ м, т. е. 42 км. До финиша остается 195 м, это на 5 м меньше половины длины окружности. Значит, финиш марафонской дистанции будет в точке M, расположенной около точки C (см. рис. 27).

Замечание 1. Вы, разумеется, понимаете условность последнего примера. Марафонскую дистанцию по кругу стадиона никто не бегает, максимальная дистанция для стайеров (бегунов на длинные дистанции) на стадионе составляет 10 000 м, т. е. 25 кругов.

По беговой дорожке стадиона можно пробежать или пройти путь любой длины. Значит, любому положительному числу соответствует какая-то точка — «финиш дистанции». Более того, и любому отрицательному числу можно поставить в соответствие точку беговой дорожки стадиона, просто спортсмен должен бежать в противоположном направлении (т. е. стартовать из A не в направлении против, а в направлении по часовой стрелке). Тогда беговую дорожку стадиона можно рассматривать как *числовую окружность*.

В принципе любую окружность можно рассматривать как числовую, но удобнее всего использовать для этой цели единичную окружность — окружность, радиус которой принимается за единицу измерения. Это будет наша «беговая дорожка», ее длина l равна 2π ($l = 2\pi R$; здесь $R = 1$), что составляет примерно 6,28.

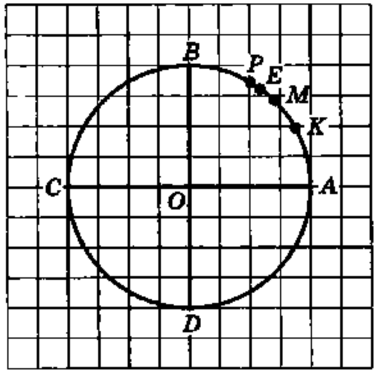


Рис. 28

Мы все время будем пользоваться единичной окружностью, в которой проведены горизонтальный и вертикальный диаметры CA и DB. Условимся называть дугу AB (рис. 28) *первой четвертью*, дугу BC — *второй четвертью*, дугу CD — *третьей четвертью*, дугу DA — *четвертой четвертью*. При этом, как правило, речь будет идти об *открытых дугах*, т. е. о дугах без их концов: например, первая четверть — это дуга AB без точек A и B. Длина каждой четверти единичной окружности равна $\frac{1}{4} \cdot 2\pi$, т. е. $\frac{\pi}{2}$.

Сколько существует дуг единичной окружности, соединяющих точки A и B? Две: поменьше, если идти от точки A к точке B по первой четверти, и побольше, если идти от точки B к точке A по второй, третьей и четвертой четвертям. Как отличить эти дуги друг от друга, используя символы математического языка? Условимся в двухбуквенном обозначении дуги на первом месте писать букву, соответствующую началу дуги, а на втором — букву, соответствующую концу дуги, причем движение по окружности от начала дуги к ее концу будем осуществлять в направлении *против часовой стрелки*. Тогда меньшая из двух дуг, соединяющих точки A и B, о которых мы говорили выше, — это дуга AB, а бóльшая — это дуга BA.

Пример 1. В единичной окружности проведены два взаимно перпендикулярных диаметра: горизонтальный CA и вертикальный DB. Дуга AB разделена точкой M на две равные части, а точками K и P — на три равные части (рис. 28). Чему равна длина дуги: AM, MB, AK, KP, PB, AP, KM?

Решение. Так как длина дуги AB равна $\frac{\pi}{2}$ (будем писать кратко: $AB = \frac{\pi}{2}$), то, разделив ее на две равные части точкой M, получим две дуги, длиной $\frac{\pi}{4}$ каждая. Значит, $AM = MB = \frac{\pi}{4}$.

Если дуга AB разбита на три равные части точками K и P, то длина каждой полученной части равна $\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2}$, т. е. $\frac{\pi}{6}$. Значит, $AK = KP = PB = \frac{\pi}{6}$.

Дуга AP состоит из двух дуг AK и KP длиной $\frac{\pi}{6}$. Значит, $AP = 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Осталось вычислить длину дуги KM. Эта дуга получается из дуги AM исключением дуги AK. Значит, длина дуги KM равна разности длин дуг AM и AK. Таким образом,

$$KM = AM - AK = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

З а м е ч а н и е 2. Обратите внимание на некоторую вольность, которую мы позволяем себе в использовании математического языка. Ясно, что д у г а KM и д л и н а д у г и KM — разные вещи (первое понятие — геометрическая фигура, а второе понятие — число). А обозначается и то и другое одинаково: KM. Более того, если точки K и M соединить отрезком, то и полученный отрезок, и его длина обозначаются так же: KM. Обычно из контекста бывает ясно, какой смысл вкладывается в обозначение (дуга, длина дуги, отрезок или длина отрезка).

Пример 2. Вторая четверть единичной окружности разделена пополам точкой M (рис. 29), а четвертая четверть разделена на три равные части точками K и P. Чему равна длина дуги: AM, AK, AP, PB, MK, KM?

Р е ш е н и е. Прежде чем переходить к требуемым вычислениям, заметим, что $AB = BC = CD = DA = \frac{\pi}{2}$, $BM = MC = \frac{\pi}{4}$,

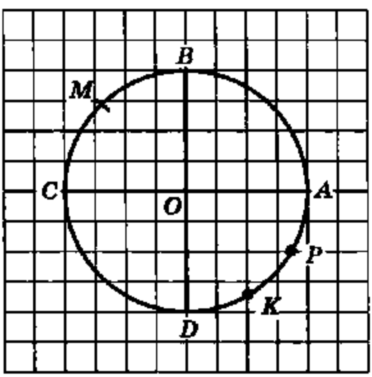


Рис. 29

$$DK = KP = PA = \frac{\pi}{6}.$$

Значит,

$$AM = AB + BM = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4};$$

$$AK = AB + BC + CD + DK =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3};$$

$$AP = AD + DP = \frac{3\pi}{2} + 2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6};$$

$$PB = PA + AB = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3};$$

$$MK = MC + CD + DK = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{12};$$

$$KM = KP + PA + AB + BM = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}.$$ ◁■

Заметили ли вы, что во всех разобранных примерах длины дуг выражались некоторыми долями числа π? Это неудивительно: ведь длина единичной окружности равна 2π, и если мы окружность или ее четверть делим на равные части, то получаются дуги, длина каждой из которых выражается долями числа π. А как вы думаете, можно ли найти на единичной окружности такую точку E, что длина дуги AE будет равна 1? Давайте прикинем:

$$\pi \approx 3{,}14;\ \frac{\pi}{3} \approx \frac{3{,}14}{3} \approx 1{,}047;\ \frac{\pi}{4} \approx \frac{3{,}14}{4} \approx 0{,}785.$$

Таким образом, $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3}$. Обратимся снова к рисунку 28. Если $AE = 1$, то точка E находится между точками M и P, ближе к точке P. Разумеется, точно (а не приблизительно) указать положение точки E на окружности мы не сумеем, но это, впрочем, не так уж важно.

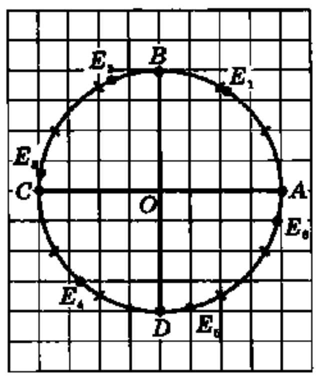


Рис. 30

На единичной окружности можно найти и точку E_1, для которой $AE_1 = 1$, и точку E_2, для которой $AE_2 = 2$, и точку E_3, для которой $AE_3 = 3$, и точку E_4, для которой $AE_4 = 4$, и точку E_5, для которой $AE_5 = 5$, и точку E_6, для которой $AE_6 = 6$. На рисунке 30 отмечены (приблизительно) соответствующие точки, причем для ориентировки каждая из четвертей единичной окружности разделена (черточками) на три равные части. Заметим, что $E_1E_2E_3E_4E_5E_6$ — правильный шестиугольник, вписанный в окружность.

Определение. Дана единичная окружность, на ней отмечена начальная точка A — правый конец горизонтального диаметра. Поставим в соответствие каждому действительному числу t точку окружности по следующему правилу:

1) Если $t > 0$, то, двигаясь из точки A в направлении против часовой стрелки (положительное направление обхода окружности), опишем по окружности путь AM длиной t. Точка M и будет искомой точкой $M(t)$.

2) Если $t < 0$, то, двигаясь из точки A в направлении по часовой стрелке (отрицательное направление обхода окружности), опишем по окружности путь AM длиной $|t|$. Точка M и будет искомой точкой $M(t)$.

3) Числу $t = 0$ поставим в соответствие точку A; $A = A(0)$.

Единичную окружность с установленным соответствием (между действительными числами и точками окружности) будем называть **числовой окружностью**.

Пример 3. Найти на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу: $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{7\pi}{2}$, 9π, $-\frac{3\pi}{2}$.

Решение. Так как первые шесть из заданных семи чисел положительны, то для нахождения соответствующих им точек окружности нужно пройти по окружности путь заданной длины, двигаясь из точки A в положительном направлении. Учтем при этом, что длина каждой четверти единичной окружности равна $\frac{\pi}{2}$.

Имеем (см. рис. 31): $AB = \frac{\pi}{2}$, значит, числу $\frac{\pi}{2}$ соответствует точка B; $B = B\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Далее, $AC = \pi$, значит, числу π соответствует точка C, т. е. $C = C(\pi)$.

$AD = \frac{3\pi}{2}$, значит, числу $\frac{3\pi}{2}$ соответствует точка D, т. е. $D = D\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Числу 2π соответствует точка A, так как, пройдя по окружности путь длиной 2π, т. е. ровно одну окружность, мы снова попадем в начальную точку A. Итак, $A = A(2\pi)$.

Что такое $\frac{7\pi}{2}$? Это $2\pi + \frac{3\pi}{2}$. Значит, двигаясь из точки A в положительном направлении, нужно пройти целую окружность (путь длиной 2π) и дополнительно путь длиной $\frac{3\pi}{2}$, который закончится в точке D. Итак, $D = D\left(\frac{7\pi}{2}\right)$.

Что такое 9π? Это $4 \cdot 2\pi + \pi$. Значит, двигаясь из точки A в положительном направлении, нужно четыре раза пройти целую окружность (путь длиной $4 \cdot 2\pi$) и дополнительно еще путь длиной π, который закончится в точке C. Итак, $C = C(9\pi)$.

Осталось найти на числовой окружности точку, соответствующую заданному отрицательному числу $-\frac{3\pi}{2}$. Для этого нужно из точки A пройти по окружности в отрицательном направлении (по часовой стрелке) путь длиной $\frac{3\pi}{2}$. Этот путь завершится в точке B, т. е. $B = B\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$. ◄

Замечание 3. При работе с числовой прямой обычно условливаются для краткости не говорить «точка прямой, соответствующая числу x», а говорить «точка x». Точно такой же договоренности будем придерживаться и при работе с числовой окружностью: «точка t» — это значит, что речь идет о точке окружности, которая соответствует числу t.

Пример 4. Найти на числовой окружности точки $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$.

Решение. Разделив первую четверть AB на три равные части точками K и P (рис. 31), получим: $K = K\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $P = P\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Разделив дугу AB пополам точкой M, получим: $M = M\left(\frac{\pi}{4}\right)$. ◄

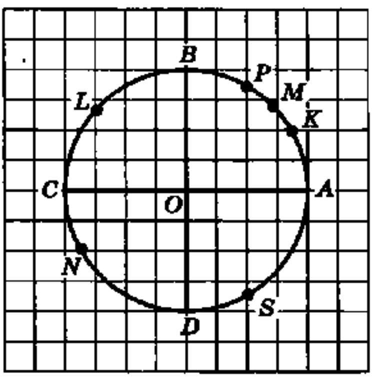


Рис. 31

Пример 5. Найти на числовой окружности точки $-\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{3}$.

Решение. Построения будем проводить, используя рисунок 31. Отложив дугу AM (ее длина равна $\frac{\pi}{4}$)

от точки A в отрицательном направлении пять раз, получим точку L — середину дуги BC. Итак, $L = L\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

Отложив дугу AK (ее длина равна $\frac{\pi}{6}$) от точки A в положительном направлении семь раз, попадем в точку N, которая принадлежит третьей четверти — дуге CD, причем $CN = \frac{\pi}{6}$ (третья часть дуги CD). Итак, $N = N\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

Отложив дугу AK (ее длина равна $\frac{\pi}{6}$) от точки A в положительном направлении десять раз, попадем в точку S, которая принадлежит четвертой четверти — дуге DA, причем $DS = \frac{\pi}{6}$ (третья часть дуги DA). Итак, $S = S\left(\frac{10\pi}{6}\right) = S\left(\frac{5\pi}{3}\right)$. ◀■

Особенно часто приходится искать на числовой окружности точки, соответствующие числам $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ и кратным им, т. е. $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{9\pi}{2}$ и т. д. Поэтому нам очень пригодятся два макета числовой окружности.

ПЕРВЫЙ МАКЕТ. Каждая из четырех четвертей числовой окружности разделена на две равные части, и около каждой из имеющихся восьми точек записано ее «имя» (рис. 32).

ВТОРОЙ МАКЕТ. Каждая из четырех четвертей числовой окружности разделена на три равные части, и около каждой из имеющихся двенадцати точек записано ее «имя» (рис. 33).

Учтите, что на обоих макетах мы могли бы заданным точкам присвоить другие «имена»*. Так, числу $-\frac{\pi}{4}$ соответствует середина четвертой четверти. Этой точке на первом макете присвоено имя $\frac{7\pi}{4}$, но, как видите, мы могли присвоить ей и имя $-\frac{\pi}{4}$. Вообще, если двигаться по первому макету из точки 0 по часовой стрелке, получим для имеющихся на чертеже восьми точек соответственно 0,

---

* Далее условный термин «имя» будем использовать без кавычек.

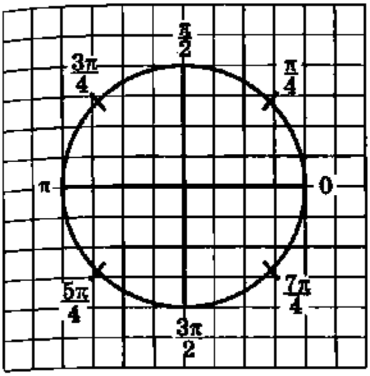


Рис. 32

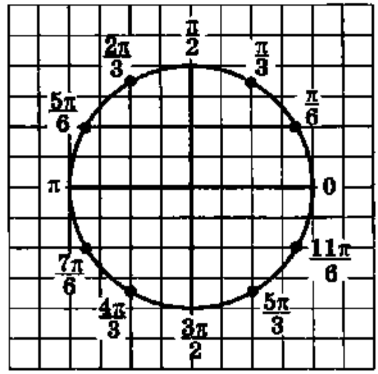


Рис. 33

$-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}, -\pi, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}$. Аналогично, если двигаться по второму макету из точки 0 по часовой стрелке, получим для имеющихся на чертеже двенадцати точек соответственно $0, -\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{5\pi}{6}, \ldots, -\frac{11\pi}{6}$.

Пример 6. Найти на числовой окружности точки 1, 2, 3, 4, 5, 6, −7.

Р е ш е н и е. Точки, соответствующие числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, — это точки $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ на рисунке 30. О точке −7 поговорим подробнее.

Нам нужно, двигаясь из точки A в отрицательном направлении (по часовой стрелке), пройти по окружности путь длиной 7. Если пройти одну окружность, то получим (приближенно) 6,28, значит, нужно еще пройти (в том же направлении) путь длиной 0,72. Что же это за дуга, длина которой равна 0,72? Она немного меньше половины четверти окружности: ее длина меньше числа $\frac{\pi}{4}$, потому что $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$, а $0{,}72 < 0{,}785$. Точка $M = M(-7)$ отмечена на рисунке 34 (мы немного не дошли до середины четвертой четверти). ◄

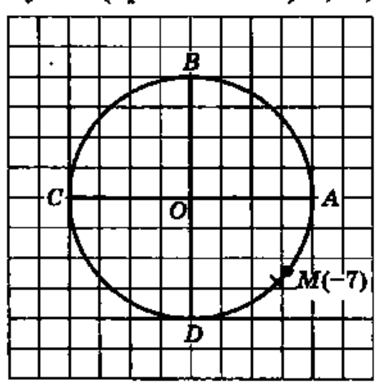


Рис. 34

Итак, на числовой окружности, как и на числовой прямой, каждому действительному числу соответствует одна точка (только, разумеется, на прямой ее найти легче, чем на окружности). Для числовой прямой верно и обратное: каждая точка соответствует единственному числу. Для числовой окружности такое утверждение неверно: выше мы неоднократно убеждались в этом.

Для числовой окружности справедливо следующее утверждение.

Если точка M числовой окружности соответствует числу t, то она соответствует и числу вида $t + 2\pi k$, где k — любое целое число ($k \in Z$).

В самом деле, 2π — длина числовой (единичной) окружности, а целое число $|k|$ можно рассматривать как количество полных обходов окружности в ту или иную сторону. Например, если $k = 3$, то это значит, что мы делаем три обхода окружности в положительном направлении; если $k = -7$, то это значит, что мы делаем семь ($|k| = |-7| = 7$) обходов окружности в отрицательном направлении. Но если мы находимся в точке $M(t)$, то, выполнив еще k полных обходов окружности, мы снова окажемся в точке M. Итак,

$$\boxed{M(t) = M(t + 2\pi k), \quad \text{где } k \in Z.}$$

На двух макетах (см. рис. 32, 33) указаны лишь главные имена точек — числа, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$, т. е. числа, соответствующие точкам числовой окружности при первом ее обходе в положительном направлении. На самом деле у точки $\frac{\pi}{4}$ бесконечно много имен: $t = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, где $k \in Z$; у точки $\frac{5\pi}{6}$ тоже бесконечно много имен: $t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in Z$, и т. д.

Число k иногда называют *параметром*. Впрочем, параметр можно обозначить и другой буквой, например n или m.

Пример 7. Найти на числовой окружности точку:

а) $\frac{21\pi}{4}$; б) $-\frac{37\pi}{6}$.

Решение.

а) $\frac{21\pi}{4} = \frac{21}{4}\pi = \left(4 + \frac{5}{4}\right) \cdot \pi = 4\pi + \frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi \cdot 2.$

Значит, числу $\frac{21\pi}{4}$ соответствует на числовой окружности та же точка, что и числу $\frac{5\pi}{4}$, — это середина третьей четверти (см. рис. 32).

б) $-\frac{37\pi}{6} = -\frac{37}{6}\pi = -\left(6 + \frac{1}{6}\right)\cdot\pi = -6\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot(-3)$.

Значит, числу $-\frac{37\pi}{6}$ соответствует на числовой окружности та же точка, что и числу $-\frac{\pi}{6}$, — это точка с именем $-\frac{\pi}{6}$, или, что то же самое, $\frac{11\pi}{6}$ (см. рис. 33). ◁■

Вы знаете, что промежутки на числовой прямой можно записывать аналитически с помощью двойных неравенств. Так, аналитической записью отрезка [3; 5] (рис. 35) служит двойное неравенство $3 \leqslant x \leqslant 5$; аналитической записью интервала (−4; 0) (рис. 35) служит двойное неравенство $-4 < x < 0$. На окружности роль отрезков или интервалов играют дуги. Их тоже можно записывать аналитически с помощью двойных неравенств, но при этом, естественно, следует учитывать, что, в отличие от числовой прямой, где каждая точка имеет одно числовое имя, на числовой окружности у точки бесконечно много имен. В следующем примере мы покажем, как составляется аналитическая запись дуги числовой окружности.

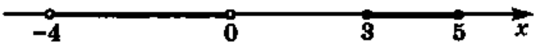


Рис. 35

Пример 8. Найти все числа t, которым на числовой окружности соответствуют точки, принадлежащие заданной дуге:

а) AB; б) BA; в) DB; г) KM; д) MK

(здесь K и M — соответственно середина первой и третьей четверти числовой окружности).

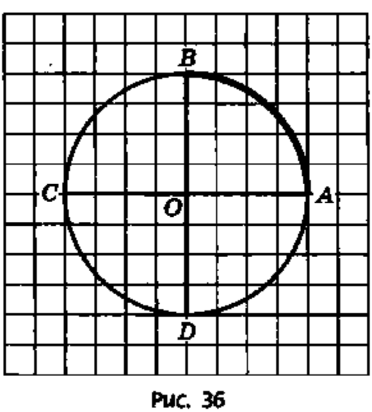


Рис. 36

Решение. а) Дуга AB — это дуга с началом в точке A и концом в точке B при движении по окружности против часовой стрелки (рис. 36). Главные имена точек A и B — соответственно $t = 0$ и $t = \frac{\pi}{2}$. Значит, для точек t дуги AB имеем:

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Как мы видели ранее, точка A соответствует не только числу 0, но и всем числам вида $0 + 2\pi k$, т. е. $2\pi k$; точка B соответствует не только числу $\frac{\pi}{2}$, но и всем числам вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Значит, если мы хотим охарактеризовать все числа t, которым на числовой окружности соответствуют точки дуги AB, то придется использовать такую запись:

$$2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z. \tag{2}$$

Для удобства на первых порах будем пользоваться следующей (не общепринятой) терминологией: неравенство (1) — *ядро аналитической записи дуги AB*, неравенство (2) — *аналитическая запись дуги AB*.

б) Для дуги BA (рис. 37) главные имена точек B и A — соответственно $\frac{\pi}{2}$ и 2π. Значит, ядром аналитической записи дуги BA является неравенство $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant 2\pi$, а сама аналитическая запись дуги BA имеет вид

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant t \leqslant 2\pi + 2\pi k^{1}.$$

в) Для дуги DB (рис. 38) главные имена точек D и B соответственно $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$; при записи ядра нужно следить за тем, чтобы число в левой части неравенства было меньше числа в правой части (поэтому для точки D выбрано имя $-\frac{\pi}{2}$, а не $\frac{3\pi}{2}$). Значит, ядром аналитической записи дуги DB является неравенство

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},$$

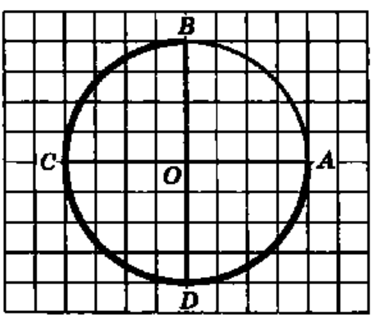


Рис. 37

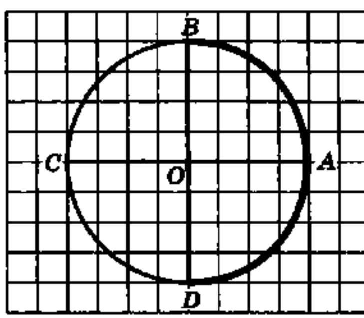


Рис. 38

[1] Условимся в дальнейшем не писать каждый раз $k \in Z$ или $n \in Z$ (но, естественно, мы все время будем это подразумевать).

а сама аналитическая запись дуги DB имеет вид

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}+2\pi k.$$

г) Дуга KM — это дуга с началом в точке K и концом в точке M при движении по окружности против часовой стрелки (рис. 39). Главные имена точек K и M — соответственно $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$. Значит, ядром аналитической записи дуги KM является неравенство

$$\frac{\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{4},$$

а сама аналитическая запись дуги KM имеет вид

$$\frac{\pi}{4}+2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{4}+2\pi k.$$

д) Для дуги MK (рис. 40) главные имена точек M и K — соответственно $-\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$. Значит, ядром аналитической записи дуги MK является неравенство

$$-\frac{3\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4},$$

а сама аналитическая запись дуги MK имеет вид

$$-\frac{3\pi}{4}+2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4}+2\pi k, \quad k \in Z.$$

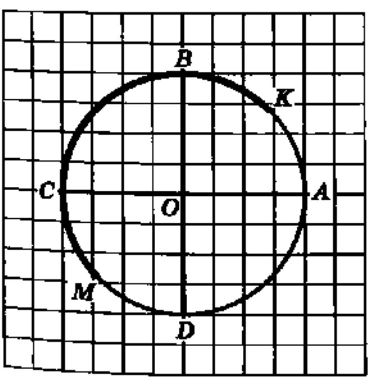


Рис. 39

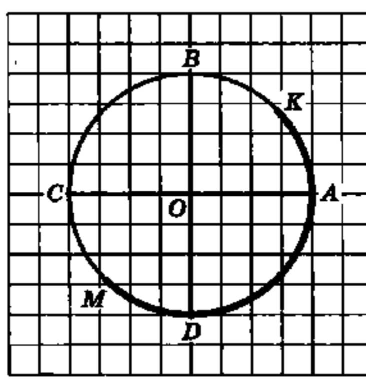


Рис. 40

§ 5. Числовая окружность на координатной плоскости

Расположим числовую окружность в декартовой прямоугольной системе координат xOy так, как показано на рисунке 41: центр окружности совмещен с началом координат, а ее радиус принимается за единичный отрезок. Начальная точка A числовой окружности совмещена с точкой (1; 0) на оси x. При этом $B = B(0; 1)$, $C = C(-1; 0)$, $D = D(0; -1)$. Каждая точка числовой окружности имеет в системе xOy свои координаты, причем (см. рис. 41):

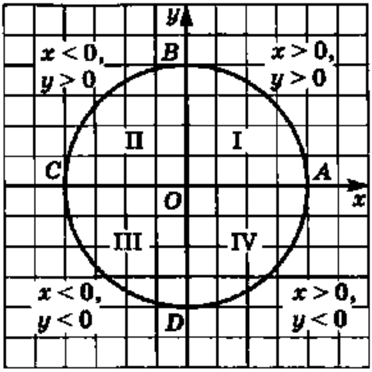


Рис. 41

$x > 0$, $y > 0$ в первой четверти;

$x < 0$, $y > 0$ во второй четверти;

$x < 0$, $y < 0$ в третьей четверти;

$x > 0$, $y < 0$ в четвертой четверти.

Для любой точки $M(x; y)$ числовой окружности выполняются неравенства

$$-1 \leqslant x \leqslant 1; \ -1 \leqslant y \leqslant 1.$$

Нетрудно составить уравнение числовой окружности. Для этого заметим, что, во-первых, центром окружности служит начало координат, а уравнение окружности радиусом R с центром в начале координат имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$; во-вторых, $R = 1$, значит, уравнение числовой окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Нам важно научиться находить координаты точек числовой окружности, прежде всего тех, которые представлены на двух макетах (см. рис. 32, 33). Начнем с точек первого макета: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$.

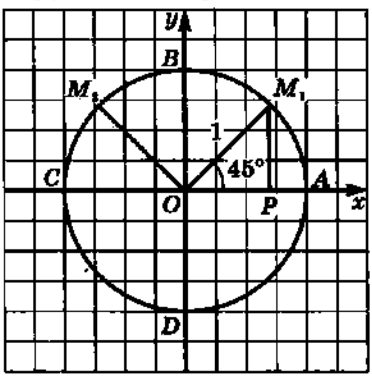


Рис. 42

Точка $M_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$ — середина первой четверти. Опустим из точки M_1 перпендикуляр M_1P на прямую OA и рассмотрим треугольник OM_1P (рис. 42). Так как дуга AM_1 составляет половину дуги AB, то

$\angle AOM_1 = 45°$. Значит, OM_1P — равнобедренный прямоугольный треугольник; $OP = M_1P$, т. е. у точки M_1 абсцисса и ордината равны: $x = y$. Кроме того, координаты точки $M_1(x; y)$ удовлетворяют уравнению числовой окружности $x^2 + y^2 = 1$. Таким образом, для нахождения координат точки M_1 нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} x = y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Подставив x вместо y во второе уравнение системы, получим: $x^2 + x^2 = 1$; $x^2 = \frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (мы учли, что абсцисса точки M_1 положительна). А так как $y = x$, то и $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Итак,

$$M_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Проанализируем полученное равенство. Что означает запись $M_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$? Она означает, что точка M_1 числовой окружности соответствует числу $\frac{\pi}{4}$. А запись $M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ означает, что точка M_1 имеет соответствующие координаты в прямоугольной системе координат xOy. И в дальнейшем будем придерживаться подобного способа записи: если написано $M(t)$, то это значит, что точка M числовой окружности соответствует числу t; если написано $M(x; y)$, то это значит, что числа x и y являются соответственно абсциссой и ординатой точки M. Таким образом, $(x; y)$ — декартовы координаты точки M, а t — «криволинейная» координата точки M на числовой окружности.

Рассмотрим точку $M_2\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ — середину второй четверти (рис. 42). Рассуждая, как и выше (для точки M_1), получим для модуля абсциссы и модуля ординаты этой точки те же значения $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}$, что и для точки $M_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Поскольку во второй четверти $x < 0$, а $y > 0$, делаем вывод:

$$M_2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Для точки $M_3\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ — середины третьей четверти — имеем:

$$M_3\left(\frac{5\pi}{4}\right) = M_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Для точки $M_4\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ — середины четвертой четверти — имеем:

$$M_4\left(\frac{7\pi}{4}\right) = M_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Сведем полученные результаты в таблицу.

Таблица 1

	Точка окружности								
	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
Абсцисса x	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
Ордината y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Теперь найдем координаты точек, изображенных на втором макете (см. рис. 33). Возьмем точку $M_1\left(\frac{\pi}{6}\right)$, опустим из нее перпендикуляр M_1P на прямую OA и рассмотрим прямоугольный треугольник OM_1P (рис. 43). Гипотенузой этого треугольника является отрезок OM_1, причем $OM_1 = 1$. Угол M_1OP равен $30°$, поскольку дуга AM_1 составляет треть дуги AB, а дуга AB содержит $90°$. Из геометрии известно, что катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла $30°$, равен половине гипотенузы. Значит, $M_1P = \frac{1}{2}$ — это ордината точки M_1, т. е. $y = \frac{1}{2}$.

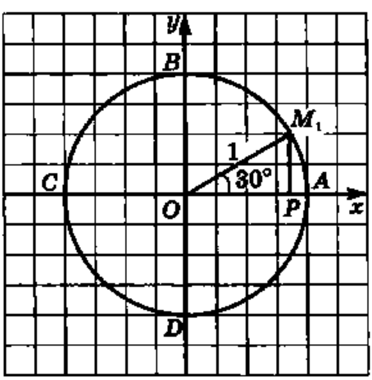


Рис. 43

По теореме Пифагора,

$$OP^2 = OM_1^2 - M_1P^2.$$

Значит,

$$x^2 = OP^2 = OM_1^2 - M_1P^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

т. е. $x^2 = \frac{3}{4}$, а потому $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (мы учли, что точка $\frac{\pi}{6}$ принадлежит первой четверти, обе ее координаты — положительные числа).

Итак,

$$M_1\left(\frac{\pi}{6}\right) = M_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

С точкой $M_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ связан такой же прямоугольный треугольник, как и с точкой M_1, только расположенный по-другому (рис. 44). Получаем:

$$M_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = M_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Те же самые значения (с точностью до знака) будут координатами остальных точек второго макета, исключая, разумеется, точки $A(0)$, $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $C(\pi)$, $D\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, причем по чертежу нетрудно определить, какая координата равна по модулю числу $\frac{1}{2}$, а какая — числу $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Возьмем для примера точку $M_3\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ (см. рис. 44). Опустим перпендикуляр M_3L на ось x. Во-первых, $M_3L < LO$, т. е. $|y| < |x|$. Значит, из двух чисел $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ в качестве модуля ординаты точки M_3 нужно взять меньшее, т. е. $\frac{1}{2}$, а в качестве модуля абсциссы — большее, т. е. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Во-вторых, $\frac{7\pi}{6}$ — точка третьей четверти, а потому $x < 0$ и $y < 0$.

В итоге получаем:

$$M_3\left(\frac{7\pi}{6}\right) = M_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

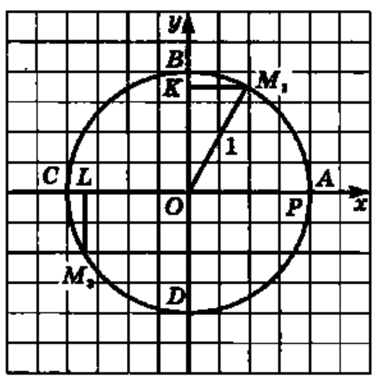


Рис. 44

А теперь возьмите точку $M_4\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ и попробуйте, проведя аналогичные рассуждения, найти ее координаты. Мы же пока приведем таблицу для точек второго макета, с помощью которой вы сможете проверить правильность своего вывода.

Таблица 2

	Точка окружности							
	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
Абсцисса x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Ордината y	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Теперь проверьте себя по таблице 2: $M_4\left(\frac{5\pi}{3}\right) = M_4\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Пример 1. Найти координаты точек числовой окружности:

а) $P_1\left(\frac{45\pi}{4}\right)$; б) $P_2\left(-\frac{37\pi}{3}\right)$; в) $P_3(45\pi)$; г) $P_4(-18\pi)$.

Решение. Во всех четырех случаях воспользуемся утверждением, полученным в § 4: числам t и $t + 2\pi k$ ($k \in Z$) соответствует одна и та же точка числовой окружности.

а) $\frac{45\pi}{4} = \frac{45}{4} \cdot \pi = \left(10 + \frac{5}{4}\right) \cdot \pi = 10\pi + \frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi \cdot 5.$

Значит, числу $\frac{45\pi}{4}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{5\pi}{4}$. Для точки $\frac{5\pi}{4}$ (см. табл. 1) имеем: $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит,

$$P_1\left(\frac{45\pi}{4}\right) = P_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

б) $-\frac{37\pi}{3} = -\frac{37}{3} \cdot \pi = -\left(12 + \frac{1}{3}\right) \cdot \pi = -12\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot (-6).$

Значит, числу $-\frac{37\pi}{3}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $-\frac{\pi}{3}$. А числу $-\frac{\pi}{3}$ на числовой окружности соответствует та же точка, что и числу $\frac{5\pi}{3}$. Для точки $\frac{5\pi}{3}$ (см. табл. 2) имеем: $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Таким образом,

$$P_2\left(-\frac{37\pi}{3}\right) = P_2\left(\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

в) $45\pi = 44\pi + \pi = \pi + 2\pi \cdot 22$. Значит, числу 45π соответствует та же точка числовой окружности, что и числу π, — это точка $C(-1; 0)$. Итак,

$$P_3(45\pi) = P_3(-1; 0).$$

г) $-18\pi = 0 + 2\pi \cdot (-9)$. Значит, числу -18π соответствует та же точка числовой окружности, что и числу 0, — это точка $A(1; 0)$. Итак,

$$P_4(-18\pi) = P_4(1; 0).$$

Пример 2. Найти на числовой окружности точки с ординатой $y = \frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (рис. 45). Точка M соответствует числу $\frac{\pi}{6}$ (см. второй макет — рис. 33), а значит, и любому числу вида $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$. Точка P соответствует числу $\frac{5\pi}{6}$, а значит, и любому числу вида $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. Получили, как часто говорят в таких случаях, *две серии значений*: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ и $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$.

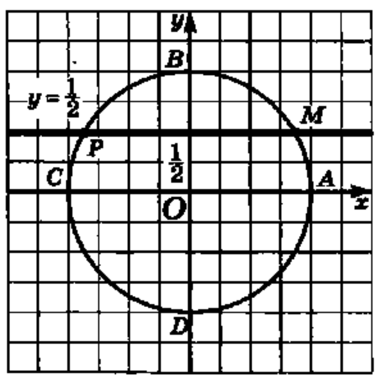


Рис. 45

Ответ: $t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; $k \in Z$.

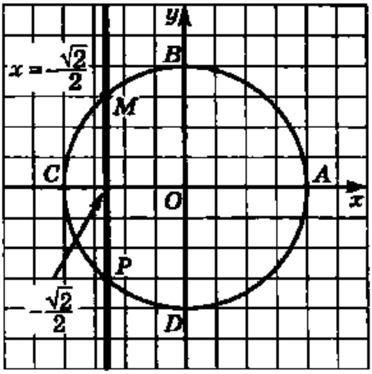


Рис. 46

Пример 3. Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (рис. 46). Точка M соответствует числу $\frac{3\pi}{4}$ (см. первый макет — рис. 32), а значит, и любому числу вида $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; точка P соответствует числу $\frac{5\pi}{4}$, а значит, и любому числу вида $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k$.

Ответ: $t = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $t = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$.

Замечание. В примере 3 можно было рассуждать немного по-другому: точка P соответствует числу $-\frac{3\pi}{4}$, а значит, и любому числу вида $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$. Получим две серии значений: $t = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ (для точки M) и $t = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ (для точки P). Чем это решение лучше по сравнению с приведенной записью ответа к примеру 3? Только тем, что обе серии значений можно охватить одной формулой: $t = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$.

Пример 4. Найти на числовой окружности точки с ординатой $y > \frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (см. рис. 45). Неравенству $y > \frac{1}{2}$ соответствуют точки открытой дуги MP, т. е. дуги без концов M и P. Дуга MP —

это дуга с началом в точке M и концом в точке P при движении по окружности против часовой стрелки. Главные имена точек M и P — соответственно $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$. Значит, аналитическая запись дуги MP имеет вид

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k. \qquad \blacktriangleleft$$

Пример 5. Найти на числовой окружности точки с ординатой $y < \frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (см. рис. 45). Неравенству $y < \frac{1}{2}$ соответствуют точки открытой дуги PM. Дуга PM — это дуга с началом в точке P и концом в точке M при движении по окружности против часовой стрелки. Главные имена точек P и M в этом случае — соответственно $-\frac{7\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6}$. Значит, аналитическая запись дуги MP имеет вид

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi k. \qquad \blacktriangleleft$$

Пример 6. Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.

Решение. Прямая $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (см. рис. 46). Неравенству $x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ соответствуют точки дуги PM. Дуга PM — это дуга с началом в точке P и концом в точке M при движении по окружности против часовой стрелки. Главные имена точек P и M в этом случае — соответственно $-\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$. Значит, аналитическая запись дуги PM имеет вид

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi k. \qquad \blacktriangleleft$$

Пример 7. **Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют.**

Решение. Прямая $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает числовую окружность в точках M и P (см. рис. 46). Неравенству $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ соответствуют точки открытой дуги MP. Дуга MP — это дуга с началом в точке M и концом в точке P при движении по окружности против часовой стрелки. Главные имена точек M и P в этом случае — соответственно $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$. Значит, аналитическая запись дуги MP имеет вид

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Пример 8. Найти знаки декартовых координат точки $M(52)$.

Решение. Заметим, что $16\pi \approx 16 \cdot 3{,}14 = 50{,}24$, а потому $52 = 1{,}76 + 50{,}24 \approx 1{,}76 + 16\pi$. Это значит, что точка 52 на числовой окружности совпадает с точкой 1,76. Далее, $\frac{\pi}{2} \approx \frac{3{,}14}{2} = 1{,}57$; значит, точка 1,76 расположена во второй четверти, а потому для нее $x < 0$, $y > 0$.

§ 6. Синус и косинус. Тангенс и котангенс

Определение 1. Если точка M числовой окружности соответствует числу t, то абсциссу точки M называют косинусом числа t и обозначают $\cos t$, а ординату точки M называют синусом числа t и обозначают $\sin t$.

Итак (рис. 47),

$$\boxed{\begin{gathered}\text{если } M(t) = M(x; y), \text{ то}\\ x = \cos t,\\ y = \sin t.\end{gathered}}$$

Отсюда следует, что $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$, $-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$.

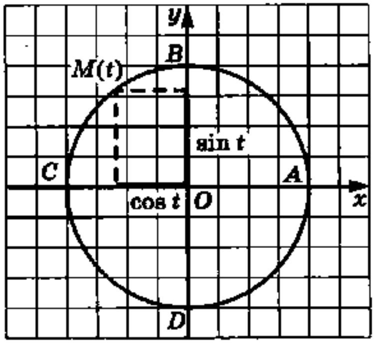


Рис. 47

Определение 2. Отношение синуса числа t к косинусу того же числа называют **тангенсом числа** t и обозначают $\operatorname{tg} t$. Отношение косинуса числа t к синусу того же числа называют **котангенсом числа** t и обозначают $\operatorname{ctg} t$.

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}; \quad \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Говоря о $\operatorname{tg} t$, подразумевают, что $\cos t \neq 0$, а говоря о $\operatorname{ctg} t$, подразумевают, что $\sin t \neq 0$.

Мы отметили в § 5, что каждая точка числовой окружности имеет в системе xOy свои координаты, причем

$x > 0$, $y > 0$ в первой четверти;

$x < 0$, $y > 0$ во второй четверти;

$x < 0$, $y < 0$ в третьей четверти;

$x > 0$, $y < 0$ в четвертой четверти (см. рис. 41).

Это позволяет нам составить таблицу знаков синуса, косинуса, тангенса и котангенса по четвертям окружности (см. табл. 1).

Таблица 1

	Четверть окружности			
	1-я	2-я	3-я	4-я
$\cos t$	+	−	−	+
$\sin t$	+	+	−	−
$\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$	+	−	+	−

Уравнение числовой окружности имеет вид $x^2 + y^2 = 1$; фактически получено важное равенство, связывающее $\sin t$ и $\cos t$:

$$\boxed{\cos^2 t + \sin^2 t = 1.}$$

Мы говорили в § 5, что нам важно научиться находить координаты точек числовой окружности, и прежде всего тех, которые представлены на первом и втором макетах (см. рис. 32 и 33 на с. 31). Необходимость этого стала теперь предельно ясной: опираясь на таблицы из § 5, мы без труда составим соответствующие таблицы для значений $\cos t$ и $\sin t$.

Таблица 2

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\sin t$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Таблица 3

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos t$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin t$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Зная значения синуса и косинуса числа t, нетрудно вычислить соответствующие значения тангенса и котангенса. Тем не менее есть смысл составить таблицу основных значений тангенса и котангенса.

Таблица 4

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg} t$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Пример 1. Вычислить $\cos t$ и $\sin t$, если:

а) $t = \frac{45\pi}{4}$; б) $t = -\frac{37\pi}{3}$; в) $t = 45\pi$; г) $t = -18\pi$.

Решение. а) При решении примера 1а из § 5 мы установили, что числу $t = \frac{45\pi}{4}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{5\pi}{4}$. Для точки $\frac{5\pi}{4}$ (см. табл. 2) имеем: $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит,

$$\cos\frac{45\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin\frac{45\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

б) При решении примера 1б из § 5 мы установили, что числу $t = -\frac{37\pi}{3}$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу $\frac{5\pi}{3}$. Для точки $\frac{5\pi}{3}$ (см. табл. 3) имеем: $\cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Значит,

$$\cos\left(-\frac{37\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}; \quad \sin\left(-\frac{37\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

в) При решении примера 1в из § 5 мы установили, что числу $t = 45\pi$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу π. Для точки π (см. табл. 2) имеем: $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$. Значит,

$$\cos 45\pi = -1; \quad \sin 45\pi = 0.$$

г) В примере 1г из § 5 мы установили, что числу $t = -18\pi$ соответствует та же точка числовой окружности, что и числу 0. Для точки 0 (см. табл. 2) имеем: $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$. Значит,

$$\cos(-18\pi) = 1; \quad \sin(-18\pi) = 0.$$

Пример 2. Решить уравнение $\sin t = \frac{1}{2}$.

Решение. Учтем, что $\sin t$ — это ордината точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой $\frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в примере 2 из § 5.

Ответ: $t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; $k \in Z$.

Пример 3. Решить уравнение $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Учтем, что $\cos t$ — это абсцисса точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в примере 3 из § 5.

Ответ: $t = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $t = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$ (или $t = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$).

Пример 4. Решить неравенство $\sin t > \frac{1}{2}$.

Решение. Учтем, что $\sin t$ — это ордината точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой $y > \frac{1}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в примере 4 из § 5.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$.

Пример 5. Решить неравенство $\cos t \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Учтем, что $\cos t$ — это абсцисса точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой $x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и записать, каким числам t они соответствуют. Эта задача уже решена в примере 6 из § 5.

Ответ: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 6. Решить уравнения:

а) $\sin t = 0$; б) $\sin t = 1$; в) $\sin t = -1$.

Решение. а) Нам нужно найти на числовой окружности точки с ординатой 0 и записать, каким числам t они соответствуют. Ординату 0 имеют точки A и C (см. рис. 47), они соответствуют числам 0 (точка A), π (точка C), 2π (точка A), 3π (точка C), $-\pi$ (точка C), -2π (точка A) и т. д. Обобщая, это можно записать так: точки A и C соответствуют числам вида πk.

Итак, решения уравнения $\sin t = 0$ имеют вид

$$t = \pi k.$$

б) Ординату 1 имеет точка B числовой окружности (см. рис. 47), она соответствует числу $\frac{\pi}{2}$, а значит, и всем числам вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Итак, решения уравнения $\sin t = 1$ имеют вид

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

в) Ординату -1 имеет точка D числовой окружности (см. рис. 47), она соответствует числу $-\frac{\pi}{2}$, а значит, и всем числам вида

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Итак, решения уравнения $\sin t = -1$ имеют вид

$$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Ответ: а) $t = \pi k$; б) $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; в) $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Пример 7. Решить уравнения:

а) $\cos t = 0$; б) $\cos t = 1$; в) $\cos t = -1$.

Решение. а) Нам нужно найти на числовой окружности точки с абсциссой 0 и записать, каким числам t они соответствуют. Абсциссу 0 имеют точки B и D (см. рис. 47), они соответствуют числам $\frac{\pi}{2}$ (точка B), $\frac{3\pi}{2}$ (точка D), $\frac{5\pi}{2}$ (точка B), $\frac{7\pi}{2}$ (точка D), $-\frac{\pi}{2}$ (точка D), $-\frac{3\pi}{2}$ (точка B) и т. д. Обобщая, это можно записать так: точки B и D соответствуют числам вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$.

Итак, решения уравнения $\cos t = 0$ имеют вид

$$t = \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

б) Абсциссу 1 имеет точка A числовой окружности (см. рис. 47), она соответствует числу 0, а значит, и всем числам вида $0 + 2\pi k$, т. е. $2\pi k$.

Итак, решения уравнения $\cos t = 1$ имеют вид

$$t = 2\pi k.$$

в) Абсциссу -1 имеет точка C числовой окружности (см. рис. 47), она соответствует числу π, а значит, и всем числам вида $\pi + 2\pi k$.

Итак, решения уравнения $\cos t = -1$ имеют вид

$$t = \pi + 2\pi k.$$

Ответ: а) $t = \frac{\pi}{2} + \pi k$; б) $t = 2\pi k$; в) $t = \pi + 2\pi k$.

Замечание. Напомним еще раз о нашей договоренности: параметр k (или n) принимает любые целочисленные значения ($k \in Z$), мы это постоянно подразумеваем, но для краткости не всегда записываем.

Впредь, говоря о $\operatorname{tg} t$ или $\operatorname{ctg} t$, мы будем подразумевать (а иногда и записывать), что аргумент t принимает только допустимые значения: для $\operatorname{tg} t$ они определяются условием $\cos t \neq 0$, т. е. $t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ (см. пример 7а); для $\operatorname{ctg} t$ они определяются условием $\sin t \neq 0$, т. е. $t \neq \pi k$ (см. пример 6а).

Завершая разговор о синусе, косинусе, тангенсе и котангенсе, докажем некоторые важные свойства.

Свойство 1. Для любого значения t справедливы равенства:

$$\boxed{\begin{array}{c}\sin(-t) = -\sin t;\\ \cos(-t) = \cos t;\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t;\\ \operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t.\end{array}}$$

Например,

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Доказательство. Если числу t соответствует точка M числовой окружности, то числу $-t$ соответствует точка P, симметричная точке M относительно горизонтального диаметра окружности (рис. 48), т. е. симметричная точке M относительно оси абсцисс. У таких точек одна и та же абсцисса, а это значит, что $\cos(-t) = \cos t$. У таких точек равные по модулю, но противоположные по знаку ординаты. А это значит, что $\sin(-t) = -\sin t$.

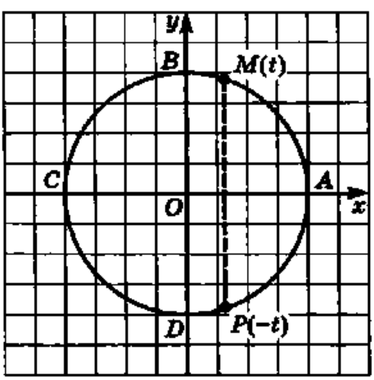


Рис. 48

Далее,

$$\operatorname{tg}(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t;$$

$$\operatorname{ctg}(-t) = \frac{\cos(-t)}{\sin(-t)} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t. \quad \bullet$$

Свойство 2. Для любого значения t справедливы равенства:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(t+2\pi k)=\sin t;\\&\cos(t+2\pi k)=\cos t.\end{aligned}}$$

Это очевидно, поскольку числам t и $t+2\pi k$ соответствует одна и та же точка числовой окружности (чем мы уже не раз пользовались).

Свойство 3. Для любого значения t справедливы равенства:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(t+\pi)=-\sin t;\\&\cos(t+\pi)=-\cos t;\end{aligned}}\qquad\boxed{\begin{aligned}&\operatorname{tg}(t+\pi)=\operatorname{tg} t;\\&\operatorname{ctg}(t+\pi)=\operatorname{ctg} t.\end{aligned}}$$

Например,

$$\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2};$$

$$\cos\frac{5\pi}{4}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Доказательство. Если числу t соответствует точка M числовой окружности, то числу $t+\pi$ соответствует точка P, симметричная точке M относительно центра окружности — начала координат (рис. 49). У таких точек абсциссы равны по модулю, но противоположны по знаку; то же можно сказать про ординаты точек. Это значит что

$$\cos(t+\pi)=-\cos t;$$
$$\sin(t+\pi)=-\sin t.$$

Далее,

$$\operatorname{tg}(t+\pi)=\frac{\sin(t+\pi)}{\cos(t+\pi)}=\frac{-\sin t}{-\cos t}=$$

$$=\frac{\sin t}{\cos t}=\operatorname{tg} t;$$

$$\operatorname{ctg}(t+\pi)=\frac{\cos(t+\pi)}{\sin(t+\pi)}=\frac{-\cos t}{-\sin t}=$$

$$=\frac{\cos t}{\sin t}=\operatorname{ctg} t. \quad\bullet$$

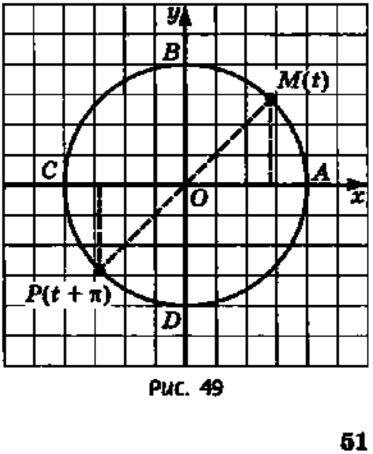


Рис. 49

Выполняются и такие равенства:

$\operatorname{tg}(t+2\pi)=\operatorname{tg} t$, $\operatorname{tg}(t-\pi)=\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg}(t+2\pi)=\operatorname{ctg} t$ и т. д.

Вообще можно записать так:

$$\boxed{\begin{array}{c}\operatorname{tg}(t+\pi k)=\operatorname{tg} t;\\ \operatorname{ctg}(t+\pi k)=\operatorname{ctg} t.\end{array}}$$

Свойство 4. Для любого значения t справедливы равенства:

$$\boxed{\begin{array}{c}\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos t;\\ \cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin t.\end{array}}$$

Доказательство. Пусть числу t соответствует точка M числовой окружности, а числу $t+\frac{\pi}{2}$ — точка P (рис. 50). Сразу обратим внимание на важное обстоятельство: если точка M находится в первой четверти, то точка P — во второй; если точка M находится во второй четверти, то точка P — в третьей (как на рис. 50) и т. д. Дуги AM и BP на рисунке 50 равны, соответственно равны и прямоугольные треугольники OKM и OLP. Значит, $OK = OL$, $MK = PL$. Из этих равенств, учитывая замечание о расположении точек M и P в четвертях числовой окружности, делаем два вывода:

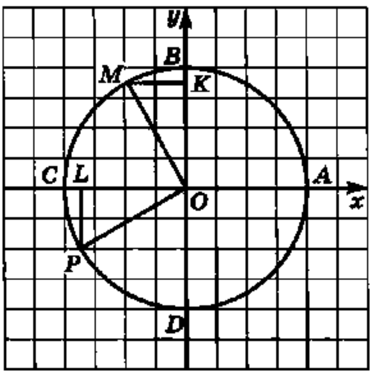


Рис. 50

1) ордината точки P и по модулю, и по знаку совпадает с абсциссой точки M. Это значит, что

$$\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos t;$$

2) абсцисса точки P по модулю равна ординате точки M, но отличается от нее знаком. Это значит, что

$$\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin t.$$ ●

Пример 8. Доказать тождества:

а) $\sin(\pi - t) = \sin t$; в) $\sin(2\pi - t) = -\sin t$;

б) $\cos(\pi - t) = -\cos t$; г) $\cos(2\pi - t) = \cos t$.

Р е ш е н и е. а) Запишем $\sin(\pi - t)$ в виде $\sin(-t + \pi)$. Применив к выражению $\sin(-t + \pi)$ свойство 3, получим:

$$\sin(-t + \pi) = -\sin(-t).$$

По свойству 1, $\sin(-t) = -\sin t$. Значит, $-\sin(-t) = \sin t$, а потому $\sin(-t + \pi) = \sin t$.

Итак, $\sin(\pi - t) = \sin t$, что и требовалось доказать.

б) Запишем $\cos(\pi - t)$ в виде $\cos(-t + \pi)$. Применив к выражению $\cos(-t + \pi)$ свойство 3, получим: $\cos(-t + \pi) = -\cos(-t)$.

По свойству 1, $\cos(-t) = \cos t$. Значит, $\cos(\pi - t) = -\cos t$, что и требовалось доказать.

в) $\sin(2\pi - t) = \sin(-t + 2\pi) = \sin(-t) = -\sin t$;

г) $\cos(2\pi - t) = \cos(-t + 2\pi) = \cos(-t) = \cos t$.

Пример 9. Вычислить:

а) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.

Р е ш е н и е. а) По свойству 1, $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}$. Так как $\frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$, то $-\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3} = -\operatorname{tg}\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

(мы воспользовались свойством 3, а точнее, его обобщением).

Итак,

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}.$$

б) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$

(здесь мы также воспользовались свойством 3).

Для синуса и косинуса у нас есть геометрическая иллюстрация на числовой окружности. Можно дать и геометрическую иллюстрацию для тангенса. Возьмем на координатной плоскости числовую окружность, проведем касательную к ней в точке A и будем считать эту касательную числовой прямой, ориентированной так же, как ось y (рис. 51), и с началом в точке A. Пусть числу t соответствует точка M числовой окружности, принадлежащая первой четверти. Из подобия треугольников OMK и OPA делаем вывод: $\frac{MK}{OK} = \frac{PA}{OA}$.

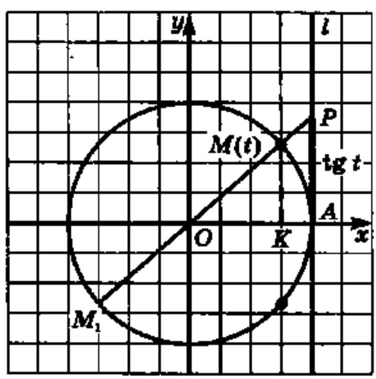


Рис. 51

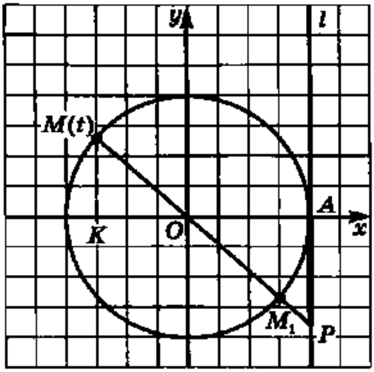


Рис. 52

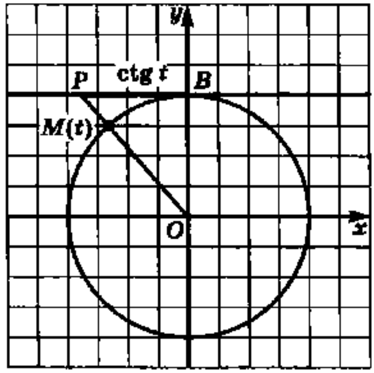


Рис. 53

Но $MK = \sin t$, $OK = \cos t$, $OA = 1$. Значит, $\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{PA}{1}$, т. е. $PA = \operatorname{tg} t$. Значит, $\operatorname{tg} t$ можно трактовать как координату точки P на числовой прямой l. Та же точка P характеризует значение тангенса для точки M_1, диаметрально противоположной точке M (см. рис. 51).

Пусть теперь числу t соответствует точка M числовой окружности, принадлежащая второй четверти (рис. 52). Из подобия треугольников OMK и OPA делаем тот же вывод: $\frac{MK}{OK} = \frac{PA}{OA}$. Здесь, как и выше, $MK = \sin t$, $OA = 1$, но $OK = -\cos t$ (поскольку речь идет о сторонах треугольника, длина которых выражается положительными числами, а $\cos t$ во второй четверти отрицателен). Значит, $\frac{\sin t}{-\cos t} = \frac{PA}{1}$, т. е. $PA = -\operatorname{tg} t$. Итак, длина отрезка PA равна $-\operatorname{tg} t$, это — положительное число. Но мы договорились рассматривать касательную l как числовую прямую, это значит, что точка P соответствует отрицательному числу, противоположному длине отрезка PA. Вывод: точка P имеет на рассматриваемой числовой прямой координату $\operatorname{tg} t$. Так же обстоит дело для точки M_1, диаметрально противоположной точке M (рис. 52).

Итак, если числу t соответствует на числовой окружности точка M, то, проведя прямую OM, получим в пересечении ее с числовой прямой l точку P, которая имеет на числовой прямой l координату $\operatorname{tg} t$. Числовую прямую l называют *линией тангенсов*. С помощью линии тангенсов можно решать и обратную задачу: зная значение тангенса, найти на числовой окружности соответствующие точки (см. ниже пример 10).

Аналогично можно ввести в рассмотрение *линию котангенсов* (рис. 53).

Пример 10. Решить уравнение: а) $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg} t = -1$; в) $\operatorname{ctg} t = -\sqrt{3}$.

Решение. а) Отметим на линии тангенсов точку $P = P(\sqrt{3})$. Прямая OP пересекает числовую окружность в двух точках (рис. 54) — это и есть точки M_1, M_2, соответствующие тем значениям t, для которых

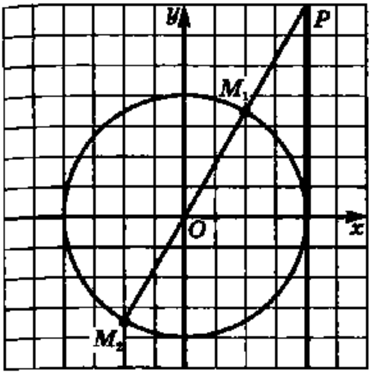


Рис. 54

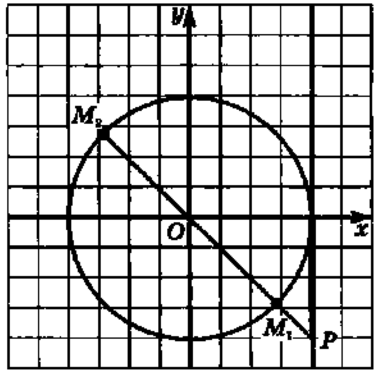


Рис. 55

$\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$. Точка M_1 соответствует значениям $t = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, точка M_2 — значениям $t = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$. Эти две серии решений можно объединить: $t = \frac{\pi}{3} + \pi n$.

б) Отметим на линии тангенсов точку $P = P(-1)$. Прямая OP пересекает числовую окружность в двух точках (рис. 55). Точка M_1 соответствует значениям $t = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, точка M_2 — значениям $t = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$. Эти две серии решений можно объединить: $t = -\frac{\pi}{4} + \pi n$.

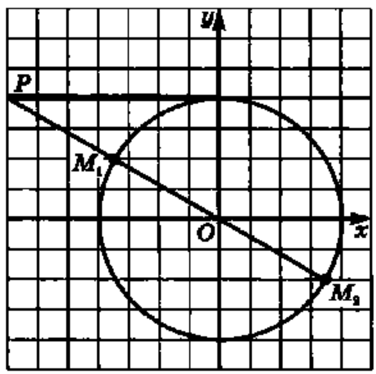


Рис. 56

в) Отметим на линии котангенсов точку $P = P\left(-\sqrt{3}\right)$. Прямая OP пересекает числовую окружность в двух точках (рис. 56). Точка M_1 соответствует значениям $t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, точка M_2 — значениям $t = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$. Эти две серии решений можно объединить: $t = \frac{5\pi}{6} + \pi n$.

Пример 11. Решить неравенство: а) $\operatorname{tg} t > \sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg} t < -1$; в) $\operatorname{ctg} t \geq -\sqrt{3}$.

Решение. а) Отметим на линии тангенсов точку $P = P\left(\sqrt{3}\right)$. Неравенство $\operatorname{tg} t > \sqrt{3}$ означает, что нас интересуют на этой прямой точки, лежащие выше точки P. Прямая OP пересекает числовую окружность

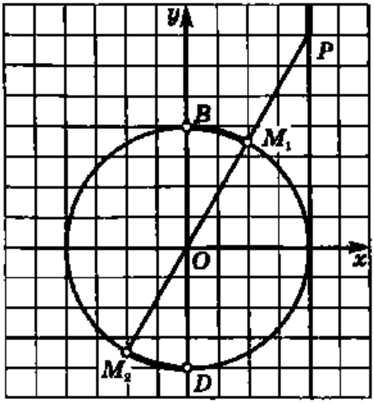


Рис. 57

в точках M_1, M_2; точкам, расположенным выше точки P, соответствуют точки открытых дуг M_1B, M_2D (рис. 57). Аналитическая запись дуги M_1B такова: $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; аналитическая запись дуги M_2D такова: $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$. Эти две серии решений можно объединить:

$$\frac{\pi}{3} + \pi n < t < \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

б) Отметим на линии тангенсов точку $P = P(-1)$. Неравенство $\operatorname{tg} t < -1$ означает, что нас интересуют на этой прямой точки, лежащие ниже точки P. Прямая OP пересекает числовую окружность в точках M_1, M_2; точкам, расположенным ниже точки P, соответствуют точки открытых дуг DM_1, BM_2 (рис. 58). Аналитическая запись дуги DM_1 такова: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; аналитическая запись дуги BM_2 такова: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$. Эти две серии решений можно объединить: $-\frac{\pi}{2} + \pi n < t < -\frac{\pi}{4} + \pi n$.

в) Отметим на линии котангенсов точку $P = P\left(-\sqrt{3}\right)$. Неравенство $\operatorname{ctg} t \geqslant -\sqrt{3}$ означает, что нас интересуют на этой прямой точки, лежащие правее точки P, и сама точка P. Прямая OP пересекает числовую окружность в точках M_1, M_2; точкам, расположенным правее точки P, соответствуют точки открытых дуг AM_1, CM_2 (рис. 59). Аналитическая

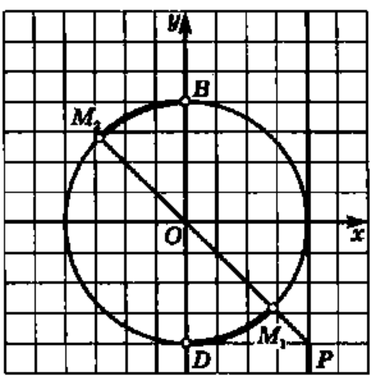


Рис. 58

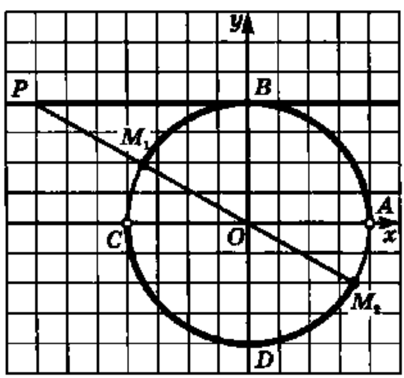


Рис. 59

запись дуги AM_1 такова: $2\pi k < t \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; аналитическая запись дуги CM_2 такова: $\pi + 2\pi k < t \leqslant \frac{11\pi}{6} + 2\pi k$. Эти две серии решений можно объединить: $\pi n < t \leqslant \frac{5\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. ◀■

§ 7. Тригонометрические функции числового аргумента

Каким бы ни было действительное число t, ему можно поставить в соответствие однозначно определенное число $\sin t$. Правда, правило соответствия довольно сложное и заключается в следующем.

Чтобы по числу t найти значение $\sin t$, нужно:

1) расположить числовую окружность на координатной плоскости так, чтобы центр окружности совпал с началом координат, а начальная точка A окружности попала в точку $(1; 0)$;

2) на окружности найти точку, соответствующую числу t;

3) найти ординату этой точки.

Эта ордината и есть $\sin t$.

Фактически речь идет о функции $s = \sin t$, где t — любое действительное число. Мы умеем вычислять некоторые значения этой функции (например, $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и т. д.), знаем некоторые ее свойства.

Точно так же мы можем считать, что уже получили некоторые представления еще о трех функциях: $s = \cos t$, $s = \operatorname{tg} t$, $s = \operatorname{ctg} t$. Все эти функции называют *тригонометрическими функциями числового аргумента* t.

Есть целый ряд соотношений, связывающих значения различных тригонометрических функций. Некоторые из этих соотношений вы уже знаете:

$$\boxed{\sin^2 t + \cos^2 t = 1;}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} \text{ при } t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k;}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} \text{ при } t \neq \pi k.}$$

Из двух последних формул легко получить соотношение, связывающее $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$:

$$\boxed{\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1 \text{ при } t \neq \frac{\pi k}{2}.}$$

Пример 1. Упростить выражение:

а) $1 + \operatorname{tg}^2 t$; б) $1 + \operatorname{ctg}^2 t$.

Решение. а) $1 + \operatorname{tg}^2 t = 1 + \dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{1}{\cos^2 t}$.

б) $1 + \operatorname{ctg}^2 t = 1 + \dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \dfrac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t} = \dfrac{1}{\sin^2 t}$.

Мы получили еще две важные формулы:

$$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \text{ при } t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k;}$$

$$\boxed{1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t} \text{ при } t \neq \pi k.}$$

Всюду, напомним, подразумевается, что $k \in Z$.

Полученные формулы используются в тех случаях, когда при заданном значении какой-либо тригонометрической функции требуется вычислить значения других тригонометрических функций того же аргумента.

Пример 2. Известно, что $\sin t = \dfrac{3}{5}$ и $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$. Найти соответствующие значения $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

Решение. Из соотношения $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ находим:

$$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t.$$

По условию $\sin t = \dfrac{3}{5}$, значит, $\cos^2 t = 1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25}$.

Из уравнения $\cos^2 t = \dfrac{16}{25}$ находим: $\cos t = \dfrac{4}{5}$ или $\cos t = -\dfrac{4}{5}$.

По условию, аргумент t принадлежит первой четверти числовой окружности, а в ней $\cos t > 0$. Значит, из двух найденных возможных соотношений выбираем первое: $\cos t = \dfrac{4}{5}$.

Зная значения $\sin t$ и $\cos t$, нетрудно вычислить соответствующие значения $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}; \quad \operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\cos t = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} t = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}$.

Пример 3. Известно, что $\operatorname{tg} t = -\frac{5}{12}$ и $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Найти значения $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{ctg} t$.

Решение. Воспользуемся соотношением $1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$.

По условию $\operatorname{tg} t = -\frac{5}{12}$, значит, $\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{169}{144}$.

Отсюда находим, что $\cos^2 t = \frac{144}{169}$, значит, $\cos t = \frac{12}{13}$ или $\cos t = -\frac{12}{13}$.

По условию аргумент t принадлежит второй четверти числовой окружности, а в ней $\cos t < 0$. Поэтому из двух указанных выше возможностей выбираем вторую: $\cos t = -\frac{12}{13}$.

Зная значения $\operatorname{tg} t$ и $\cos t$, нетрудно вычислить соответствующие значения $\sin t$ и $\operatorname{ctg} t$:

$$\sin t = \operatorname{tg} t \cdot \cos t = \left(-\frac{5}{12}\right) \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{5}{13}; \operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = -\frac{12}{5}.$$

Ответ: $\cos t = -\frac{12}{13}$; $\sin t = \frac{5}{13}$; $\operatorname{ctg} t = -\frac{12}{5}$.

§ 8. Тригонометрические функции углового аргумента

Термины «синус», «косинус», «тангенс» и «котангенс», которые мы ввели выше, на самом деле уже были вам знакомы, правда, до сих пор их использовали в другом смысле: в геометрии и физике вы рассматривали синус, косинус, тангенс и котангенс угла (а не числа, как это было в предыдущих параграфах).

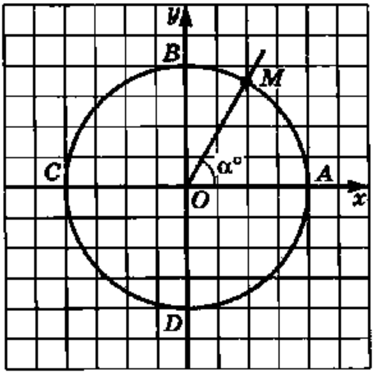


Рис. 60

Из геометрии известно, что синус (косинус) острого угла — это отношение катета прямоугольного треугольника к его гипотенузе, а тангенс (котангенс) угла — это отношение катетов прямоугольного треугольника. Совсем другой подход к понятиям синуса, косинуса, тангенса и котангенса мы развивали в предыдущих параграфах. На самом деле все тесно взаимосвязанно, в чем мы сейчас убедимся.

Возьмем угол с градусной мерой $\alpha°$ и расположим его в модели «числовая окружность на координатной плоскости» так, как показано на рисунке 60: вершину угла совместим с центром окружности (с началом системы координат), а одну сторону угла совместим с положительным лучом оси абсцисс. Точку пересечения второй стороны угла с окружностью обозначим буквой M. Ординату точки M естественно считать *синусом угла* $\alpha°$, а абсциссу этой точки — *косинусом угла* $\alpha°$.

Для нахождения синуса или косинуса угла $\alpha°$ совсем необязательно каждый раз проводить подобные построения. Достаточно заметить, что дуга AM составляет такую же часть единичной окружности, которую угол $\alpha°$ составляет от угла 360°. Если длину дуги AM обозначить буквой t, то получим:

$$\frac{\alpha°}{360°} = \frac{t}{2\pi};$$

$$t = \frac{\pi\alpha}{180}.$$

Таким образом,

$$\sin\alpha° = \sin t = \sin\frac{\pi\alpha}{180}; \quad \cos\alpha° = \cos t = \cos\frac{\pi\alpha}{180}.$$

Например,

$$\sin 30° = \sin\frac{\pi\cdot 30}{180} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$\cos 90° = \cos\frac{\pi\cdot 90}{180} = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Говорят, что 30° — это *градусная мера угла*, а $\frac{\pi}{6}$ — *радианная мера* того же угла: $30° = \frac{\pi}{6}$ *рад*. Аналогично: $90° = \frac{\pi}{2}$ *рад*. Вообще

$$\alpha° = \frac{\pi\alpha}{180} \text{ рад}.$$

В частности,

$$\boxed{1^\circ = \frac{\pi}{180}\ рад.}$$

Отсюда, в свою очередь, получаем:

$$\boxed{1\ рад = \frac{180^\circ}{\pi}.}$$

Например,

$$35^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 35 = \frac{7\pi}{36}\ рад; \quad \frac{2\pi}{3}\ рад = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} = 120^\circ.$$

Для краткости условимся обозначение *рад* опускать, т. е. вполне допустимой является, например, следующая запись:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{180} \cdot 45\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

Так что же такое 1 радиан? Вы знаете, что есть различные меры длины: сантиметры, метры, ярды и т. д. Есть и различные меры величины угла. Мы рассматриваем центральные углы единичной окружности. Угол в 1° — это центральный угол, опирающийся на дугу, составляющую $\frac{1}{360}$ часть окружности. Угол в 1 радиан — это центральный угол, опирающийся в единичной окружности на дугу длиной 1, а в окружности произвольного размера — *на дугу, длина которой равна радиусу окружности.*

Из формулы $1\ рад = \frac{180^\circ}{\pi}$ получаем:

$$\boxed{1\ рад \approx 57{,}3^\circ.}$$

Говоря о функции $s = \sin t$ (или о любой другой тригонометрической функции), мы можем считать независимую переменную t числовым аргументом, как это было в предыдущих параграфах, но можем считать ее и мерой угла, т. е. угловым аргументом. Рассматривая ту или иную тригонометрическую функцию, мы можем считать ее функцией как числового, так и углового аргумента. В основном мы будем говорить о функциях числового аргумента.

Завершая параграф, убедимся в том, что определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса, с которыми вы познакомились в курсе геометрии, представляют собой частные случаи тех определений, что были предложены в § 6.

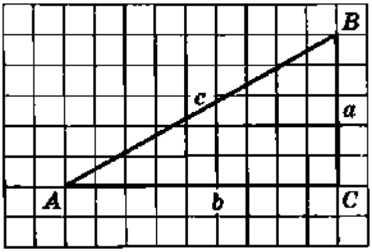


Рис. 61

Теорема. **Если a и b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника ABC (рис. 61), то выполняются следующие равенства:**

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c},$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}.$$

Доказательство. Совместим прямоугольный треугольник ABC с числовой окружностью так, как показано на рисунке 62: вершину A поместим в центр O окружности, катет AC «пустим» по положительному направлению оси абсцисс. Точку пересечения прямой AB с окружностью обозначим буквой M. Опустим из точки M перпендикуляр MP на прямую AC. Заметим, что AP и MP — абсцисса и ордината точки M, т. е. $AP = \cos A$, $MP = \sin A$. Учтем также, что $AM = 1$ и что $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

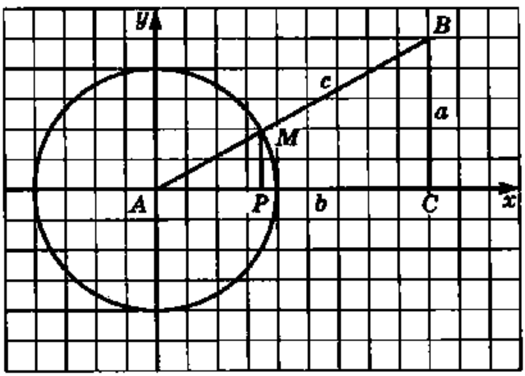


Рис. 62

Так как треугольники AMP и ABC подобны, то

$$\frac{MP}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC}, \text{ т. е.}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{1}{c} = \frac{\cos A}{b}.$$

Из пропорции $\frac{\sin A}{a} = \frac{1}{c}$ получаем: $\sin A = \frac{a}{c}$.

Из пропорции $\frac{\cos A}{b} = \frac{1}{c}$ получаем: $\cos A = \frac{b}{c}$.

Далее, $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$; аналогично, $\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}$. ●

§ 9. Формулы приведения

Если под знаком тригонометрической функции содержится выражение $\frac{\pi}{2} + t$, $\frac{\pi}{2} - t$, $\pi + t$, $\pi - t$, $\frac{3\pi}{2} + t$, $\frac{3\pi}{2} - t$ и вообще любое выражение вида $\frac{\pi n}{2} \pm t$, где n — произвольное целое число, то такое выражение всегда можно привести к более простому виду, при котором под знаком тригонометрической функции будет содержаться только аргумент t. Соответствующие формулы обычно называют *формулами приведения*. Некоторые из этих формул мы вывели в § 6, говоря о свойствах синуса, косинуса, тангенса и котангенса:

$$\sin(\pi + t) = -\sin t;$$
$$\cos(\pi + t) = -\cos t;$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t;$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t;$$
$$\operatorname{tg}(\pi + t) = \operatorname{tg} t;$$
$$\operatorname{ctg}(\pi + t) = \operatorname{ctg} t.$$

Используя свойства, отмеченные в § 6, можно вывести ряд других формул приведения. Например,

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = \sin\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} + t\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\cos t;$$

$$\cos(\pi - t) = \cos(\pi + (-t)) = -\cos(-t) = -\cos t.$$

Формул приведения очень много. Выводить их каждый раз довольно утомительно. Можно составить таблицу формул приведения и постоянно ею пользоваться, но она громоздка. Поэтому был придуман простой и удобный способ их запоминания (*мнемоническое правило*). Он заключается в следующем.

1) Если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится выражение $\pi + t$, $\pi - t$, $2\pi + t$ или $2\pi - t$, то наименование тригонометрической функции следует сохранить.

2) Если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится выражение $\frac{\pi}{2} + t$, $\frac{\pi}{2} - t$, $\frac{3\pi}{2} + t$ или $\frac{3\pi}{2} - t$, то наименование тригонометрической функции следует изменить на родственное (синус — на косинус, косинус — на синус, тангенс — на котангенс, котангенс — на тангенс).

3) Перед полученной функцией от аргумента t надо поставить тот знак, который и м е л а б ы преобразуемая функция при условии, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Это правило используется и в тех случаях, когда аргумент задан в градусах, т. е. когда под знаком тригонометрической функции содержится выражение $90° + \alpha$, $90° - \alpha$, $180° + \alpha$ и т. д.

Попробуем применить сформулированное правило сначала к уже перечисленным в этом параграфе формулам приведения.

Преобразуем $\sin(\pi + t)$. Наименование функции сохраняется, т. е. записываем $\sin t$. Далее, если предположить, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$, то $\pi + t$ — аргумент из третьей четверти, а в ней преобразуемая функция синус имеет знак минус. Этот знак надо поставить перед записанной функцией. Таким образом, $\sin(\pi + t) = -\sin t$ (так и записано на с. 63).

Преобразуем $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$. Наименование функции изменяется, т. е. записываем $\sin t$. Далее, если предположить, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} + t$ — аргумент из второй четверти, а в ней преобразуемая функция косинус имеет знак минус. Этот знак надо поставить перед записанной функцией. Таким образом, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t$ (так и записано на с. 63).

А теперь воспользуемся сформулированным правилом для получения пары новых формул приведения.

Преобразуем $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)$. Наименование функции следует изменить: пишем $\operatorname{tg} t$. Далее, если считать, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$, получим, что $\frac{3\pi}{2} - t$ — аргумент из третьей четверти, а в ней преобразуемая функция котангенс имеет знак плюс. Этот знак надо поставить перед записанной функцией. Таким образом, $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = \operatorname{tg} t$.

Преобразуем $\sin(360° - \alpha)$. Наименование функции следует сохранить (не забывайте, что $360° = 2\pi$): пишем $\sin\alpha$. Далее, если считать, что $0 < \alpha < 90°$, получим, что $360° - \alpha$ — аргумент из четвертой четверти, а в ней преобразуемая функция синус имеет знак минус. Этот знак надо поставить перед записанной функцией. Таким образом, $\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$.

Разумеется, формулы приведения можно применять и в тех случаях, когда место аргумента t занимает более сложное выражение. Например, мы видели выше, что $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = \operatorname{tg} t$, значит, и $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - 5t\right) = \operatorname{tg} 5t$, и $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{y}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{y}{2}$ и т. д.

§ 10. Функция $y = \sin x$, ее свойства и график

В § 7 мы уже познакомились с функцией $s = \sin t$. Отметим свойства этой функции.

Свойства функции $s = \sin t$

Свойство 1. Область определения — множество R действительных чисел.

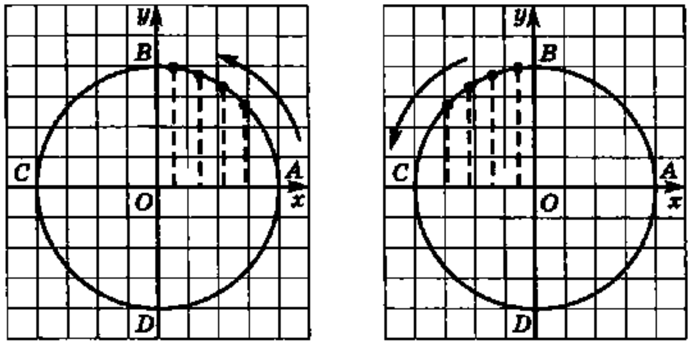
Свойство 2. $s = \sin t$ — нечетная функция.

В § 6 мы уже доказали, что для любого t выполняется равенство $\sin(-t) = -\sin t$. Значит, $s = \sin t$ — нечетная функция.

График функции $s = \sin t$, как график любой нечетной функции, симметричен относительно начала координат в прямоугольной системе координат tOs.

Свойство 3. Функция $s = \sin t$ возрастает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Это следует из того, что при движении точки по первой четверти числовой окружности (от 0 до $\frac{\pi}{2}$) ордината постепенно



а *б*

Рис. 63

увеличивается (от 0 до 1 — рис. 63, *а*), а при движении по второй четверти числовой окружности (от $\frac{\pi}{2}$ до π) ордината постепенно уменьшается (от 1 до 0 — рис. 63, *б*).

Свойство 4. Функция $s = \sin t$ ограничена и снизу и сверху.

Ограниченность функции $s = \sin t$ следует из того, что для любого t справедливо неравенство

$$-1 \leqslant \sin t \leqslant 1.$$

Свойство 5. $s_{\text{наим}} = -1$ (этого значения функция достигает в любой точке вида $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$); $s_{\text{наиб}} = 1$ (этого значения функция достигает в любой точке вида $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$).

Воспользовавшись полученными свойствами, построим график интересующей нас функции. Обратим внимание, что вместо $s = \sin t$ будем писать $y = \sin x$, так как привычнее запись $y = f(x)$, а не $s = f(t)$. Значит, и строить график будем в привычной системе координат xOy.

Сначала построим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$. При этом договоримся о следующем масштабе на осях координат: в тетради в клеточку роль единичного отрезка на оси y составит отрезок в две клеточки; на оси x единичный отрезок (две клеточки) будем считать равным $\frac{\pi}{3}$. Фактически мы полагаем, что $\pi = 3$, что не совсем соответствует действительности (на самом деле $\pi \approx 3{,}14$), но на это при построении графика особого внимания обращать не будем.

Составим таблицу значений функции $y = \sin x$:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Отметим эти точки на координатной плоскости и соединим их плавной кривой, учтя при этом, что функция возрастает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Это график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$ (рис. 64). Обратите внимание на плавность графика в точке $\left[\frac{\pi}{2}; 1\right]$ и на то, что из начала координат кривая выходит как бы под углом 45°. О том, почему так происходит, поговорим в § 28.

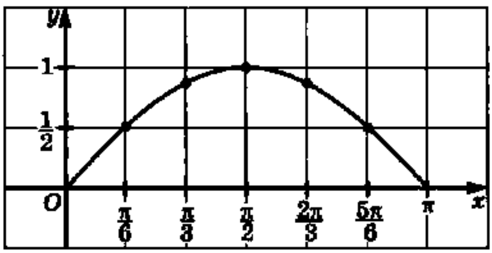


Рис. 64

Добавив к построенному графику линию, симметричную ему относительно начала координат, получим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 65 — здесь масштаб уменьшили в два раза по сравнению с рис. 64).

А теперь построим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[\pi; 3\pi]$. Обратите внимание: если $x \in [-\pi; \pi]$, то $(x + 2\pi) \in [\pi; 3\pi]$.

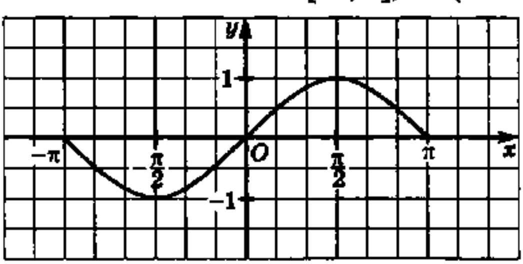


Рис. 65

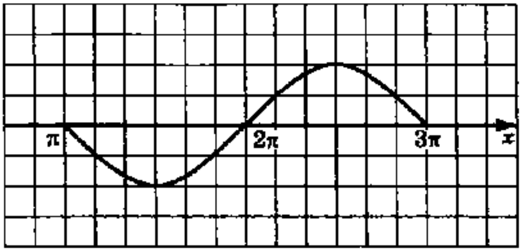


Рис. 66

Но $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Это означает, что в точке $x + 2\pi$ функция $y = \sin x$ принимает то же значение, что и в точке x. Иными словами, на отрезке $[\pi; 3\pi]$ график функции $y = \sin x$ выглядит так же, как и на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 66). И на отрезках $[3\pi; 5\pi]$, $[5\pi; 7\pi]$, $[-3\pi; -\pi]$ и т. д. график этой функции выглядит так же, как на отрезке $[-\pi; \pi]$. Окончательный вид графика функции $y = \sin x$ (в уменьшенном масштабе) представлен на рисунке 67.

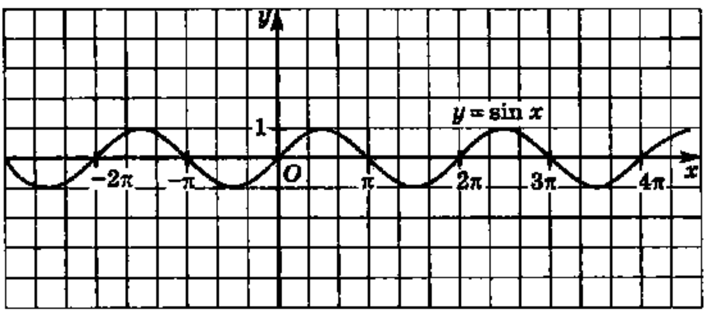


Рис. 67

Линию, служащую графиком функции $y = \sin x$, называют **синусоидой**. Ту часть синусоиды, которая изображена на рисунке 65 или 66, называют *волной синусоиды*, а ту часть синусоиды, которая изображена на рисунке 64, называют *полуволной* или *аркой синусоиды*.

Опираясь на построенный график, отметим еще несколько свойств функции $y = \sin x$.

Свойство 6. *Функция $y = \sin x$ возрастает на любом отрезке вида $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ и убывает на любом отрезке вида $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, где $k \in Z$.*

Свойство 7. $y = \sin x$ — непрерывная функция.

Непрерывность функции, напомним, означает, что график функции сплошной, не имеет разрыва. Это, конечно, весьма поверхностное представление о данном свойстве, более точное истолкование непрерывности функции мы получим в § 26.

Свойство 8. Область значений функции — отрезок $[-1; 1]$.

Пример 1. Решить уравнение $\sin x = x - \pi$.

Решение.

1) Возьмем две функции: $y = \sin x$ и $y = x - \pi$.

2) Построим график функции $y = \sin x$ (рис. 68).

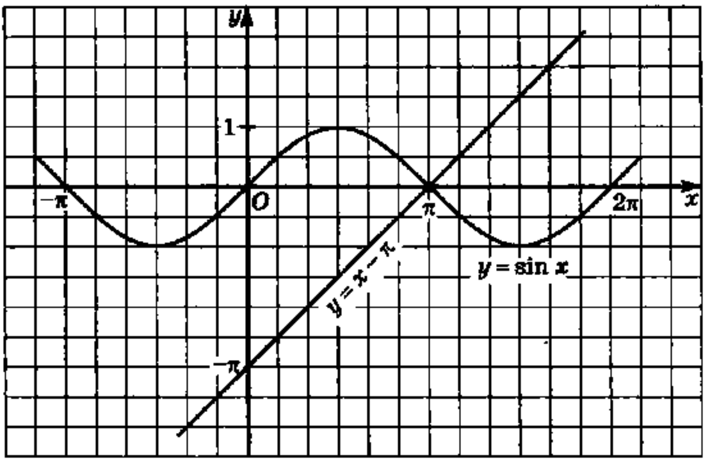


Рис. 68

3) Построим график линейной функции $y = x - \pi$. Это прямая линия, проходящая через точки $(0; -\pi)$ и $(\pi; 0)$ (рис. 68).

4) Построенные графики пересекаются в одной точке — в точке $A(\pi; 0)$. Проверка показывает, что это на самом деле так: $\sin \pi = 0$ и $\pi - \pi = 0$. Значит, заданное уравнение имеет единственный корень π — это абсцисса точки A.

Ответ: $x = \pi$.

Пример 2. Построить график функции $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$.

Решение. Искомый график получается из графика функции $y = \sin x$ параллельным переносом на $\frac{\pi}{3}$ единиц вправо и 2 единицы вверх (рис. 69).

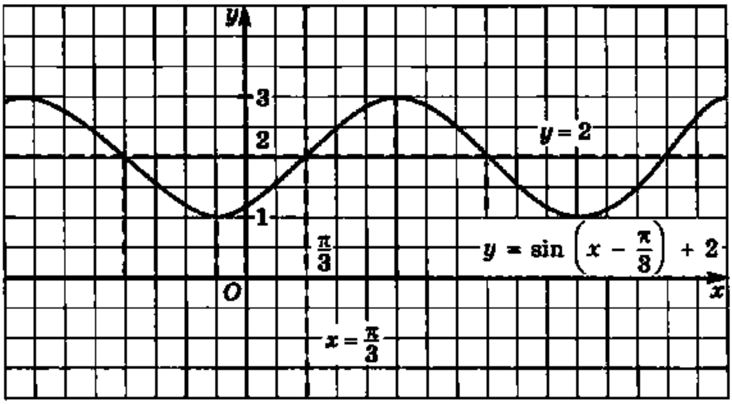


Рис. 69

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$.

Р е ш е н и е. Построив график функции $y = \sin x$ и выделив его часть на отрезке $\left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$, убеждаемся (рис. 70), что $y_{\text{наиб}} = \frac{1}{2}$ (этого значения функция достигает в точке $x = \frac{5\pi}{6}$), а $y_{\text{наим}} = -1$ (этого значения функция достигает в точке $x = \frac{3\pi}{2}$).

Ответ: $y_{\text{наиб}} = \frac{1}{2}$; $y_{\text{наим}} = -1$.

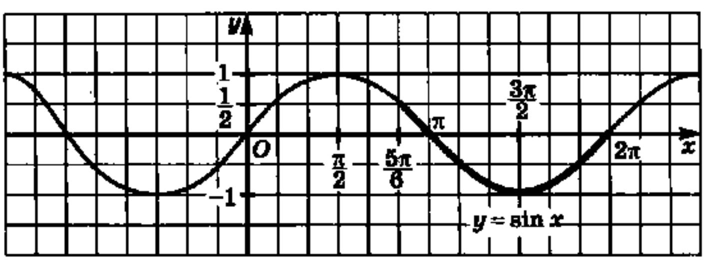


Рис. 70

§ 11. Функция $y = \cos x$, ее свойства и график

Рассказ о функции $y = \cos x$ можно было бы построить по той же схеме, которая была использована в § 10 для функции $y = \sin x$. Но мы выберем путь, быстрее приводящий к цели: воспользуемся формулой приведения $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Что дает эта формула? Она позволяет утверждать, что функции $y = \cos x$ и $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ тождественны, значит, их графики совпадают.

График функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ получается из графика функции $y = \sin x$ параллельным переносом на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево. Это и будет график функции $y = \cos x$ (рис. 71).

График функции $y = \cos x$, как и график функции $y = \sin x$, называют синусоидой (что вполне естественно).

Свойства функции $y = \cos x$

Свойство 1. $D(f) = (-\infty; \infty)$.

Свойство 2. $y = \cos x$ — четная функция.

Это следует из выведенной в § 6 формулы $\cos(-t) = \cos t$; четность функции иллюстрирует график на рисунке 71 — он симметричен относительно оси y.

Свойство 3. Функция убывает на отрезке $[0; \pi]$, возрастает на отрезке $[\pi; 2\pi]$ и т. д.

Свойство 4. Функция ограничена и снизу и сверху.

Свойство 5. $y_{\text{наим}} = -1$ (этого значения функция достигает в любой точке вида $x = \pi + 2\pi k$); $y_{\text{наиб}} = 1$ (этого значения функция достигает в любой точке вида $x = 2\pi k$).

Свойство 6. $y = \cos x$ — непрерывная функция.

Свойство 7. $E(f) = [-1; 1]$.

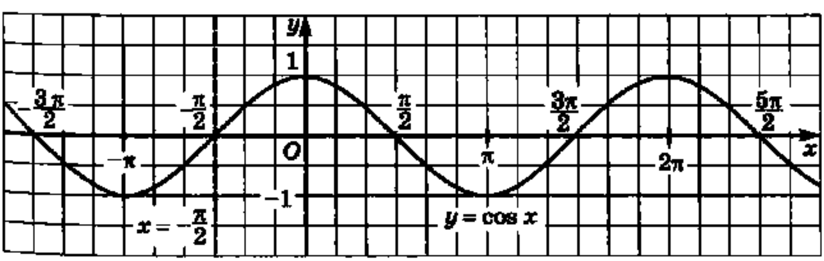


Рис. 71

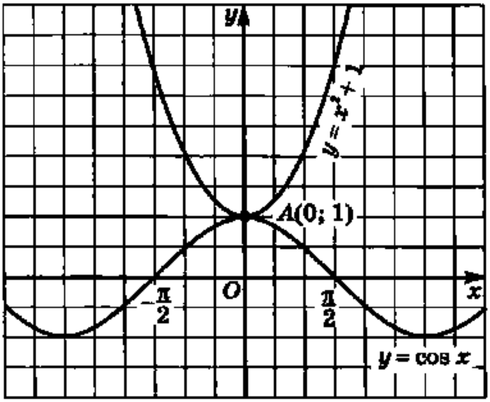


Рис. 72

Пример 1. Решить уравнение $\cos x = x^2 + 1$.

Решение.

1) Возьмем две функции: $y = \cos x$ и $y = x^2 + 1$.

2) Построим график функции $y = \cos x$ (рис. 72).

3) Построим график функции $y = x^2 + 1$. Это парабола (см. рис. 72).

4) Построенные графики имеют одну общую точку $A(0; 1)$. Значит, заданное уравнение имеет один корень 0 — это абсцисса точки A.

Ответ: $x = 0$.

Пример 2. Построить график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \leqslant 0; \\ \cos x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Решение. Построение графика осуществим «по кусочкам». Сначала построим график функции $y = \sin x$ и выделим его часть (рис. 73) на луче $(-\infty; 0]$. Затем построим график функции $y = \cos x$ и выделим его часть (рис. 74) на открытом луче $(0; +\infty)$. Наконец, оба «кусочка» изобразим в одной системе координат — это и будет график функции $y = f(x)$ (рис. 75).

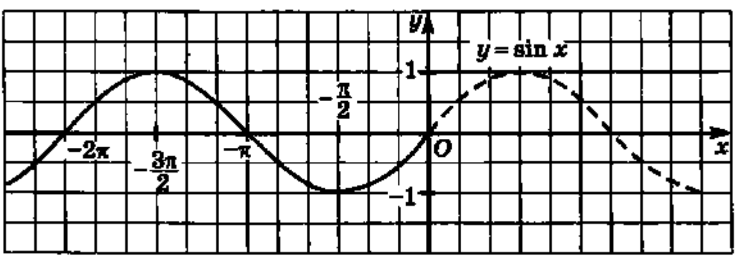


Рис. 73

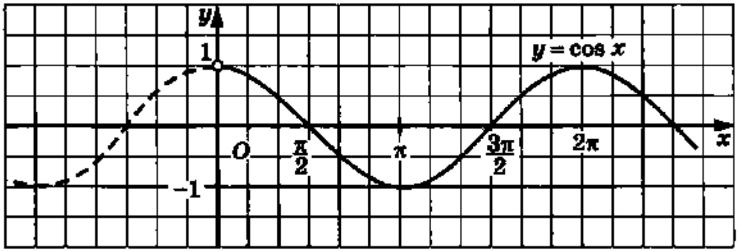


Рис. 74

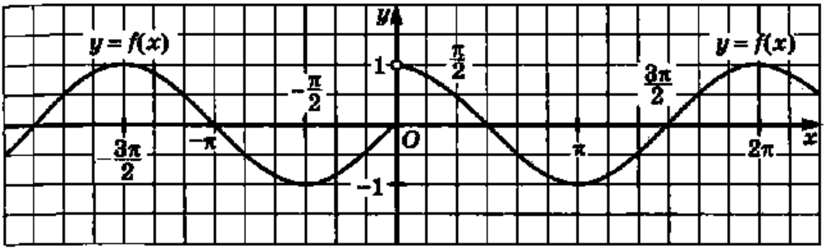


Рис. 75

§ 12. *Периодичность функций $y = \sin x$, $y = \cos x$*

В предыдущих параграфах мы использовали семь свойств функций: область определения, четность или нечетность, монотонность, ограниченность, наибольшее и наименьшее значения, непрерывность, область значений функции. Использовали мы эти свойства либо для того, чтобы построить график функции (так было, например, в § 10), либо для того, чтобы прочитать построенный график. Теперь введем еще одно (восьмое) свойство функции, которое можно заметить на построенных выше графиках функций $y = \sin x$ (см. рис. 67), $y = \cos x$ (см. рис. 71).

Определение. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют **периодической**, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из множества X выполняется двойное равенство

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Число T, удовлетворяющее указанному условию, называют **периодом функции** $y = f(x)$.

Отсюда следует, что, поскольку для любого x справедливы равенства

$$\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi),$$
$$\cos(x - 2\pi) = \cos x = \cos(x + 2\pi),$$

функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ *являются периодическими, причем число* 2π *служит периодом и той и другой функции.*

Периодичность — это и есть обещанное восьмое свойство функций.

А теперь посмотрите на график функции $y = \sin x$ (см. рис. 67). Чтобы построить синусоиду, достаточно построить одну ее волну (на отрезке $[0; 2\pi]$ или на отрезке $[-\pi; \pi]$), а затем сдвинуть эту волну по оси x на 2π вправо, на 2π влево, на 4π вправо, на 4π влево и т. д. В итоге с помощью одной волны мы построим весь график.

Посмотрим с этой же точки зрения на график функции $y = \cos x$ (см. рис. 71). И здесь для построения графика достаточно сначала построить одну волну, например, на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, а затем сдвинуть ее по оси x на 2π вправо, на 2π влево, на 4π вправо, на 4π влево и т. д.

Обобщая, делаем следующий вывод.

Если функция $y = f(x)$ имеет период T, то для построения графика функции нужно сначала построить ветвь (волну, часть) графика на любом промежутке длины T **(чаще всего берут промежуток с концами в точках 0 и T или $-\frac{T}{2}$ и $\frac{T}{2}$),** ***а затем сдвинуть эту ветвь по оси x вправо и влево на T, $2T$, $3T$ и т. д.***

У периодической функции бесконечно много периодов: если T — период, то и $2T$ — период, и $3T$ — период, и $-T$ — период; вообще ***периодом является любое число вида kT, где $k = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$*** **. Обычно стараются, если это возможно, выделить наименьший положительный период, его называют** ***основным периодом.*** **Для функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ основной период равен 2π.**

Итак, ***любое число вида $2\pi k$, где $k = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$, является периодом функций $y = \sin x$, $y = \cos x$; 2π — основной период и той и другой функции.***

Пример. Найти основной период функции:

а) $y = \sin 3x$;   б) $y = \cos 0{,}5x$.

Решение. а) Пусть T — основной период функции $y = \sin 3x$. Введем обозначение: $f(x) = \sin 3x$. Тогда

$$f(x + T) = \sin 3(x + T) = \sin(3x + 3T).$$

Чтобы число T было периодом функции, должно выполняться тождество $\sin(3x + 3T) = \sin 3x$. Значит, $3T = 2\pi n$. Но поскольку речь идет о нахождении основного периода, получаем: $3T = 2\pi$, $T = \frac{2\pi}{3}$.

б) Пусть T — основной период функции $y = \cos 0{,}5x$. Введем обозначение: $f(x) = \cos 0{,}5x$. Тогда

$$f(x + T) = \cos 0{,}5(x + T) = \cos (0{,}5x + 0{,}5T).$$

Чтобы число T было периодом функции, должно выполняться тождество $\cos (0{,}5x + 0{,}5T) = \cos 0{,}5x$. Значит, $0{,}5T = 2\pi n$. Но поскольку речь идет об отыскании основного (т. е. наименьшего положительного) периода, получаем: $0{,}5T = 2\pi$, $T = 4\pi$.

Ответ: а) $T = \frac{2\pi}{3}$; б) $T = 4\pi$.

Обобщением результатов, полученных в примере, является следующее утверждение: *основной период функции* $y = \sin kx$ ($y = \cos kx$) *равен* $\left|\frac{2\pi}{k}\right|$.

§ 13. Преобразования графиков тригонометрических функций

В курсе алгебры 8—9-го классов вы научились, зная график функции $y = f(x)$, строить графики функций $y = f(x + a)$, $y = f(x) + b$, $y = f(x + a) + b$. Все эти графики получаются из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования параллельного переноса: на $|a|$ единиц масштаба вправо или влево вдоль оси x и на $|b|$ единиц масштаба вверх или вниз вдоль оси y (мы использовали этот прием в § 1, 10 и 11). Теперь мы познакомимся еще с двумя преобразованиями, позволяющими, зная график функции $y = f(x)$, довольно быстро строить графики функций $y = mf(x)$ и $y = f(kx)$, где m и k — любые действительные числа (кроме нуля).

Задача 1. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = mf(x)$, где m — положительное число.

Решение. Ординаты точек графика функции $y = mf(x)$ получаются умножением ординат соответствующих точек графика функции $y = f(x)$ на число m. Такое преобразование графика обычно называют *растяжением от оси x с коэффициентом m*. Отметим, что при этом преобразовании остаются на месте точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью x, т. е. точки, удовлетворяющие уравнению $f(x) = 0$.

Если $m < 1$, то предпочитают говорить не о растяжении с коэффициентом m, а о *сжатии к оси x с коэффициентом* $\frac{1}{m}$. Например, если $m = \frac{1}{3}$, то говорят не о растяжении с коэффициентом $\frac{1}{3}$, а о сжатии с коэффициентом 3.

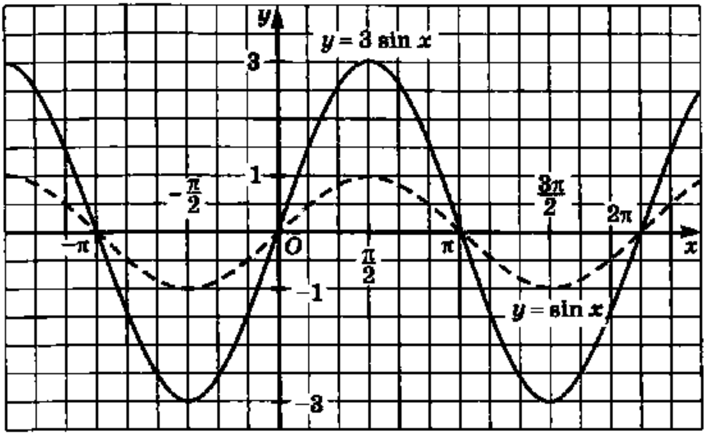


Рис. 76

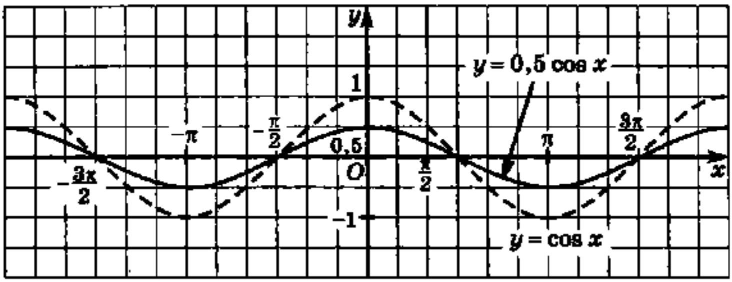


Рис. 77

На рисунке 76 показаны графики функций $y = \sin x$ и $y = 3\sin x$, а на рисунке 77 — графики функций $y = \cos x$ и $y = 0{,}5\cos x$.

На практике обычно, выполняя сжатие или растяжение графика функции $y = \sin x$ или $y = \cos x$, сначала работают с одной полуволной синусоиды, а потом достраивают весь график.

Задача 2. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = mf(x)$, где $m = -1$.

Решение. Речь идет о построении графика функции $y = -f(x)$. Ординаты точек графика функции $y = -f(x)$ отличаются от соответствующих ординат точек графика функции $y = f(x)$ только знаком. Точки $(x; f(x))$ и $(x; -f(x))$ симметричны относительно оси x (рис. 78). Значит, *график функции $y = -f(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования симметрии относительно оси x* (впрочем, об этом мы уже говорили выше; см., например, с. 7). На рисунке 79 изображены графики функций $y = \cos x$ и $y = -\cos x$.

Задача 3. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = mf(x)$, где m — отрицательное число.

Решение. При $m < 0$ справедливо равенство $mf(x) = -|m|f(x)$. Значит, речь идет о построении графика функции $y = -|m|f(x)$. Это можно сделать в три шага:

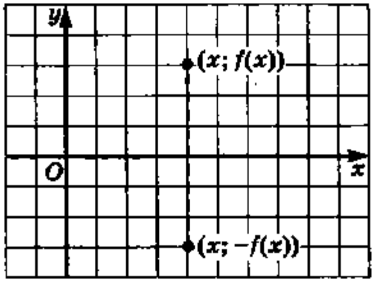


Рис. 78

1) построить график функции $y = f(x)$;

2) осуществить его растяжение от оси x с положительным коэффициентом $|m|$;

3) растянутый график подвергнуть преобразованию симметрии относительно оси x.

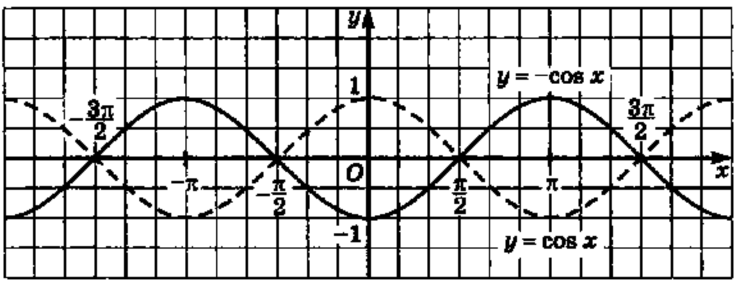


Рис. 79

Пример 1. Построить график функции $y = -1{,}5 \sin x$.

Решение. 1) Построим график функции $y = \sin x$; для начала достаточно построить одну полуволну графика (пунктирная линия на рис. 80).

2) Осуществим растяжение построенного графика от оси x с коэффициентом 1,5; получим одну полуволну графика функции $y = 1{,}5 \sin x$ (тонкая линия на рис. 80).

3) Подвергнем построенную полуволну графика функции $y = 1{,}5 \sin x$ преобразованию симметрии относительно оси x; получим полуволну графика функции $y = -1{,}5 \sin x$ (она выделена на рис. 80).

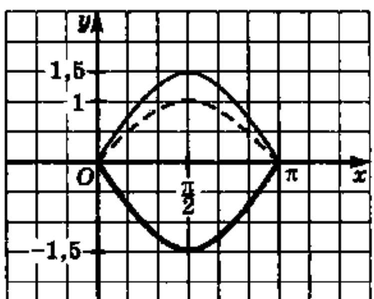


Рис. 80

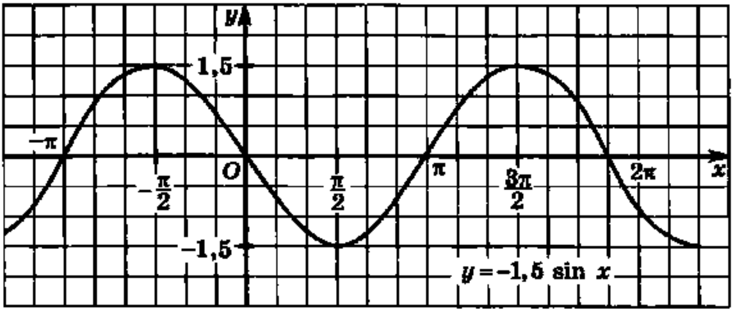


Рис. 81

4) С помощью построенной полуволны получаем весь график функции $y = -1{,}5 \sin x$ (рис. 81).

Задача 4. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(kx)$, где k — положительное число.

Решение. Чтобы вам было проще понять суть дела, рассмотрим конкретный пример, когда $k = 2$. Как построить график функции $y = f(2x)$, если известен график функции $y = f(x)$?

Пусть, например, на графике функции $y = f(x)$ имеются точки (4; 7) и (−2; 3). Это значит, что $f(4) = 7$ и $f(-2) = 3$. Куда переместятся эти точки, когда мы будем строить график функции $y = f(2x)$? Если $x = 2$, то $y = f(2x) = f(2 \cdot 2) = f(4) = 7$. Значит, на графике функции $y = f(2x)$ есть точка (2; 7). Далее, если $x = -1$, то $y = f(2x) = f(-1 \cdot 2) = f(-2) = 3$. Значит, на графике функции $y = f(2x)$ есть точка (−1; 3).

Итак, на графике функции $y = f(x)$ есть точки (4; 7) и (−2; 3), а на графике функции $y = f(2x)$ есть точки (2; 7) и (−1; 3) (рис. 82), т. е. точки с той же ординатой, но с абсциссой в два раза меньшей (по модулю). Так же обстоит дело и с другими точками графика функции $y = f(x)$, когда мы переходим к графику функции $y = f(2x)$ (рис. 83). Такое преобразование обычно называют *сжатием к оси ординат с коэффициентом* 2.

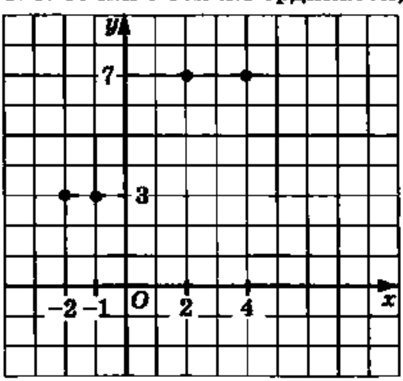


Рис. 82

Вообще график функции $y = f(kx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью сжатия к оси y с коэффициентом k. Отметим, что при этом преобразовании остается на месте точка пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью y (если $x = 0$, то и $kx = 0$).

Впрочем, если $0 < k < 1$, то предпочитают говорить не о сжатии с коэффициентом k, а о растяжении от оси y с коэффициентом $\frac{1}{k}$. Например, если $k = \frac{1}{3}$, то говорят не о сжатии с коэффициентом $\frac{1}{3}$, а о растяжении с коэффициентом 3.

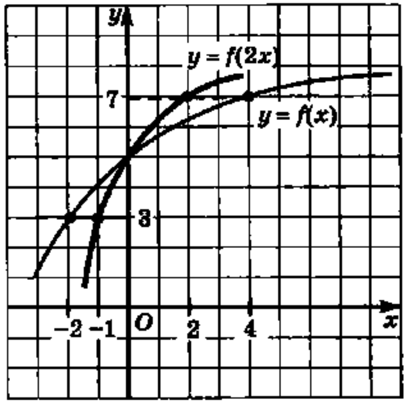


Рис. 83

Пример 2. Построить графики функций:

а) $y = \sin\frac{x}{2}$; б) $y = \cos 2x$.

Р е ш е н и е. а) Построим полуволну графика функции $y = \sin x$ (пунктирная линия на рис. 84) и осуществим ее растяжение от оси y с коэффициентом 2; получим одну полуволну искомого графика функции $y = \sin\frac{x}{2}$ (рис. 84). Затем построим весь график (рис. 85; здесь масштаб уменьшенный).

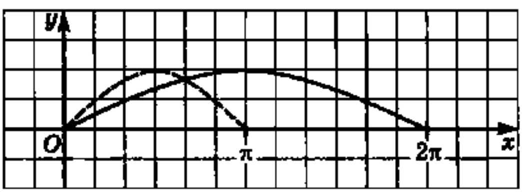


Рис. 84

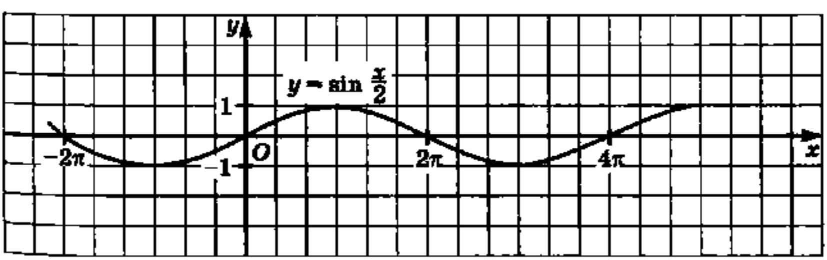


Рис. 85

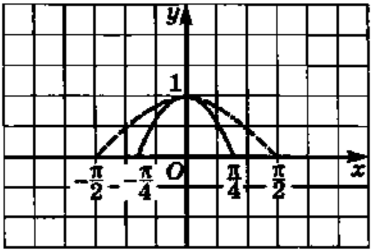


Рис. 86

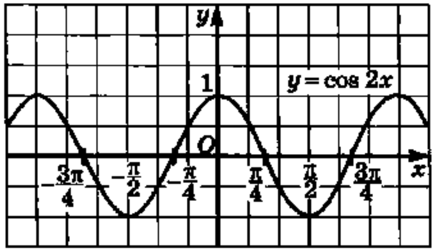


Рис. 87

б) Построим полуволну графика функции $y = \cos x$ (пунктирная линия на рис. 86) и осуществим ее сжатие к оси y с коэффициентом 2; получим одну полуволну искомого графика функции $y = \cos 2x$ (см. рис. 86). Затем построим весь график (см. рис. 87).

Задача 5. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(kx)$, где $k = -1$.

Решение. Речь идет о построении графика функции $y = f(-x)$. Предположим, что на графике функции $y = f(x)$ есть точки (3; 5) и (−6; 1). Это значит, что $f(3) = 5$, а $f(-6) = 1$. Соответственно на графике функции $y = f(-x)$ имеется точка (−3; 5), так как при подстановке в формулу $y = f(-x)$ значения $x = -3$ получим: $y = f(3) = 5$. Аналогично убеждаемся, что графику функции $y = f(-x)$ принадлежит точка (6; 1).

Итак, точке (3; 5), принадлежащей графику функции $y = f(x)$, соответствует точка (−3; 5), принадлежащая графику функции $y = f(-x)$, а точке (−6; 1), принадлежащей графику функции $y = f(-x)$, соответствует точка (6; 1), принадлежащая графику функции $y = f(-x)$. Указанные пары точек симметричны относительно оси y (рис. 88).

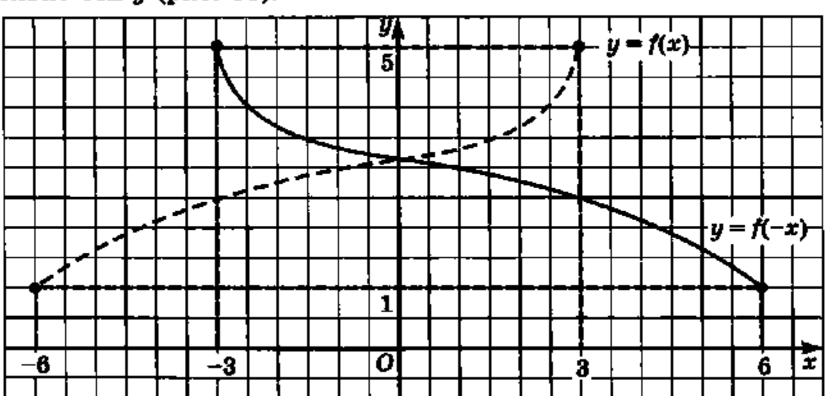


Рис. 88

Обобщая эти рассуждения, приходим к следующему выводу: *график функции $y = f(-x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования симметрии относительно оси y.*

Замечание. Если речь идет о построении графика функции $y = f(-x)$, то обычно сначала проверяют, является ли функция $y = f(x)$ четной или нечетной. Если $y = f(x)$ — четная функция, т. е. $f(-x) = f(x)$, то график функции $y = f(-x)$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$. Если $y = f(x)$ — нечетная функция, т. е. $y = f(-x) = -f(x)$, то вместо графика функции $y = f(-x)$ можно построить график функции $y = -f(x)$.

Задача 6. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(kx)$, где k — отрицательное число.

Решение. При $k < 0$ справедливо равенство $f(kx) = f(-|k|x)$. Значит, речь идет о построении графика функции $y = f(-|k|x)$. Это можно сделать в три шага:

1) построить график функции $y = f(x)$;

2) осуществить его сжатие к оси y с коэффициентом $|k|$;

3) сжатый график подвергнуть преобразованию симметрии относительно оси y.

Пример 3. Построить график функции $y = -3\cos(-2x)$.

Решение. Прежде всего заметим, что $\cos(-2x) = \cos 2x$.

1) Построим график функции $y = \cos x$, точнее, одну полуволну графика (рис. 89). Все предварительные построения обозначены пунктирными линиями.

2) Осуществим растяжение построенного графика от оси x с коэффициентом 3; получим одну полуволну графика функции $y = 3\cos x$.

3) Подвергнем построенную полуволну графика функции $y = 3\cos x$ преобразованию симметрии относительно оси x; получим полуволну графика функции $y = -3\cos x$.

4) Осуществим для полуволны графика функции $y = -3\cos x$

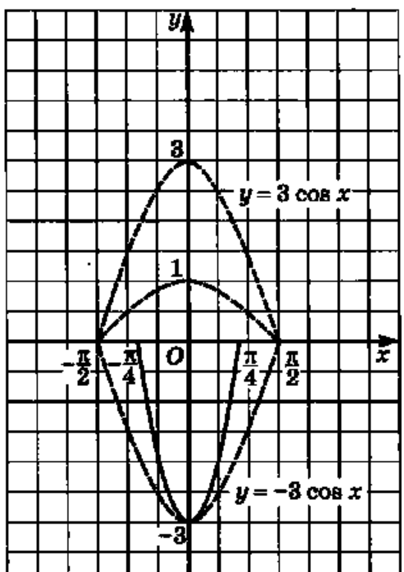


Рис. 89

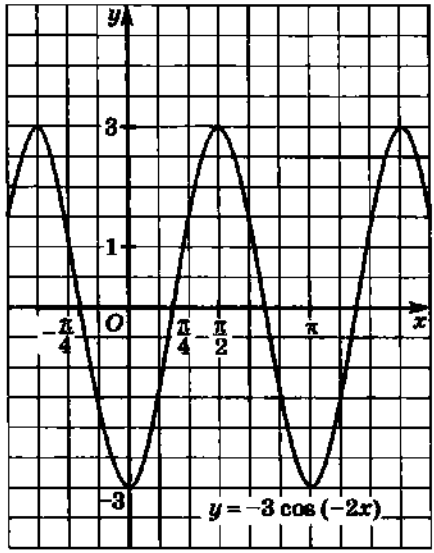


Рис. 90

сжатие к оси y с коэффициентом 2; получим полуволну графика функции $y = -3\cos 2x$ (рис. 89, сплошная линия).

5) С помощью полученной полуволны построим весь график (рис. 90).

§ 14. Функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, их свойства и графики

Рассмотрим свойства функции $y = \operatorname{tg} x$, причем в первую очередь те, которые помогут составить представление о графике функции (большинство из этих свойств фактически известно из § 6). Когда такое представление сложится, начнем строить график, как обычно, по точкам.

Свойство 1. Область определения функции $y = \operatorname{tg} x$ — множество всех действительных чисел, за исключением чисел вида

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$$

Это свойство означает, что на графике функции $y = \operatorname{tg} x$ нет точки, принадлежащей прямой $x = \frac{\pi}{2}$, нет точки, принадлежащей прямой $x = \frac{3\pi}{2}$, нет точки, принадлежащей прямой $x = \frac{5\pi}{2}$, нет точки, принадлежащей прямой $x = -\frac{\pi}{2}$, и т. д. Эти прямые проведены пунктиром на рисунке 91.

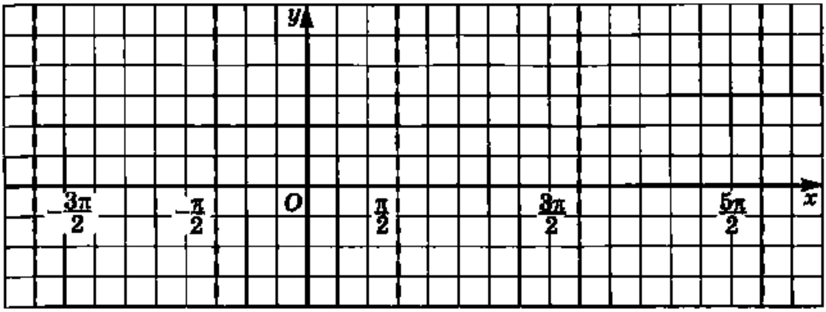


Рис. 91

Первое представление о графике получено: он состоит из бесконечного множества ветвей (в полосе между $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$, в полосе между $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3\pi}{2}$ и т. д.).

Свойство 2. $y = \operatorname{tg} x$ — периодическая функция с основным периодом π.

То, что π — период, следует из двойного равенства

$$\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi),$$

полученного в § 6. То, что π — основной период, наглядно иллюстрирует рисунок 91.

Значит, если мы построим ветвь графика в полосе от $x = -\frac{\pi}{2}$ до $x = \frac{\pi}{2}$, то затем нужно будет сдвинуть построенную ветвь по оси x вправо и влево на π, 2π, 3π и т. д. Тем самым получено второе представление о графике.

Свойство 3. $y = \operatorname{tg} x$ — нечетная функция.

Это следует из доказанного в § 6 соотношения $\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Значит, достаточно построить часть графика на промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а затем воспользоваться указанной симметрией.

Приступим к построению графика фукнции $y = \operatorname{tg} x$ на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Выберем контрольные точки:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Отметим эти точки на координатной плоскости и проведем через них плавную кривую (рис. 92). Добавим линию, симметричную построенной кривой относительно начала координат (рис. 93). Воспользовавшись периодичностью, достроим график до конца (рис. 94).

График функции $y = \mathrm{tg}\, x$ называют *тангенсоидой*. Ту ее часть, которая изображена на рисунке 93, обычно называют *главной ветвью* тангенсоиды.

Обратите внимание на то, что из начала координат главная ветвь тангенсоиды выходит как бы под углом 45°. Почему это так, вы узнаете из § 28.

Отметим еще несколько свойств функции $y = \mathrm{tg}\, x$.

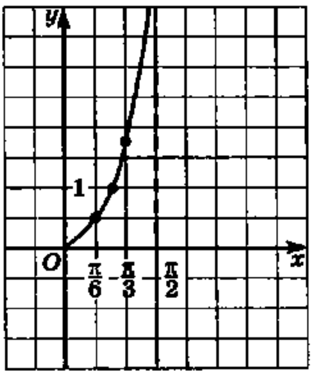


Рис. 92

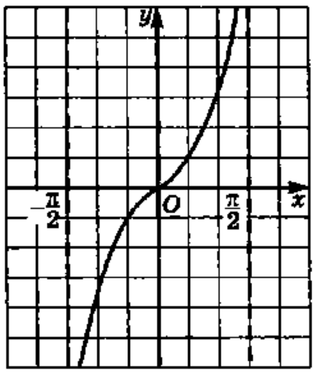


Рис. 93

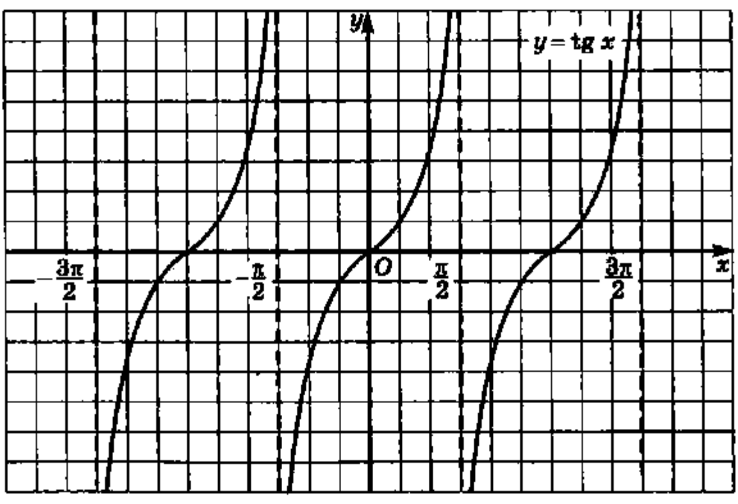


Рис. 94

Свойство 4. Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Вообще функция возрастает на любом интервале вида

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right); k \in Z.$$

Свойство 5. Функция $y = \operatorname{tg} x$ не ограничена ни сверху, ни снизу (это свойство иллюстрирует линия тангенсов, см. с. 54).

Свойство 6. У функции $y = \operatorname{tg} x$ нет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

Свойство 7. Функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Вообще функция непрерывна на любом интервале вида $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$.

В точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ функция претерпевает разрыв. Каждая прямая вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ служит вертикальной асимптотой графика функции.

Свойство 8. $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

Рассуждая аналогично, можно построить график функции $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 95). График функции $y = \operatorname{ctg} x$, как и график функции

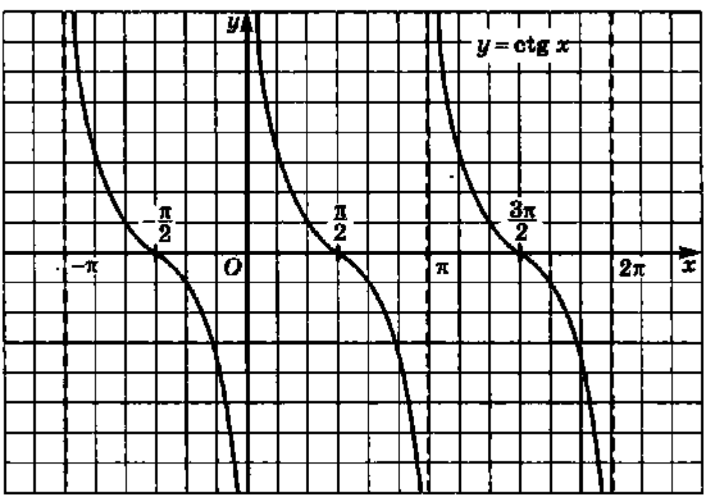


Рис. 95

$y = \operatorname{tg} x$, называют *тангенсоидой*. *Главной ветвью* графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ обычно называют ветвь, заключенную в полосе от $x = 0$ до $x = \pi$.

Пример. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

Решение. Выше мы уже решили это уравнение — с помощью линии тангенсов (см. пример 10а в § 6). Сейчас мы решим это уравнение графически. Построим в одной системе координат графики функций $y = \operatorname{tg} x$ — тангенсоиду и $y = \sqrt{3}$ — прямую, параллельную оси x. Они имеют бесконечно много точек пересечения (рис. 96), причем абсциссы этих точек отличаются друг от друга на πk. На главной ветви абсцисса соответствующей точки равна $\frac{\pi}{3}$ (мы воспользовались тем, что $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$), это один корень уравнения, а все решения описываются формулой $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

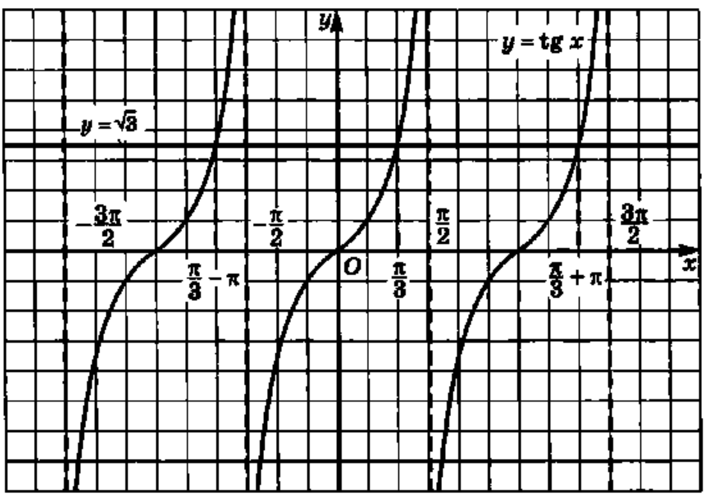


Рис. 96

ГЛАВА 3

Тригонометрические уравнения

§ 15. Арккосинус. Решение уравнения $\cos t = a$

В главе 2 мы уже решали некоторые уравнения вида $\cos t = a$. Например, для уравнения $\cos t = \frac{1}{2}$ с помощью числовой окружности (рис. 97) находим: $t = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, а для уравнения $\cos t = 1$ получаем (рис. 98): $t = 2\pi k$ (где, напомним, $k \in Z$).

Теперь рассмотрим уравнение $\cos t = \frac{2}{5}$. С помощью числовой окружности получаем (рис. 99):

$$t = t_1 + 2\pi k, \quad t = t_2 + 2\pi k,$$

где t_1 — длина дуги AM, а $t_2 = -t_1$.

Но что это за число t_1, пока неизвестно, ясно только то, что $t_1 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Столкнувшись с подобной ситуацией, математики поняли, что надо придумать способ ее описания на математическом языке. Они ввели в рассмотрение новый символ $\arccos\frac{2}{5}$,

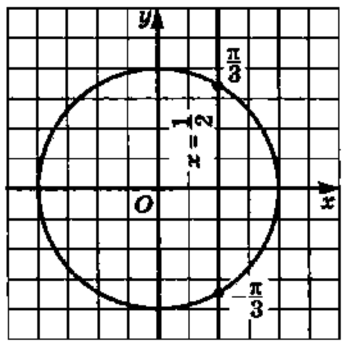


Рис. 97

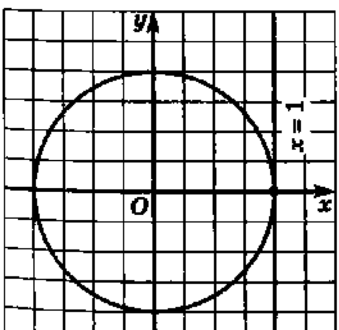


Рис. 98

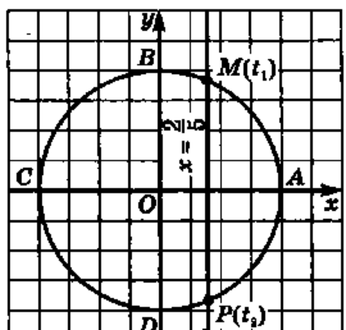


Рис. 99

который читается: *арккосинус двух пятых* (*arcus* в переводе с латинского значит *дуга*, сравните со словом *арка*), и с помощью этого символа таинственные корни t_1 и t_2 уравнения $\cos t = \frac{2}{5}$ записали так:

$$t_1 = \arccos\frac{2}{5}, \quad t_2 = -\arccos\frac{2}{5}.$$

Теперь все корни уравнения $\cos t = \frac{2}{5}$ можно описать двумя формулами:

$$t = \arccos\frac{2}{5} + 2\pi k, \quad t = -\arccos\frac{2}{5} + 2\pi k$$

или, обобщая, одной формулой:

$$t = \pm\arccos\frac{2}{5} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Что же такое $\arccos\frac{2}{5}$? Это число (длина дуги AM), косинус которого равен $\frac{2}{5}$ и которое принадлежит отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Замечание. Символ $\arccos\frac{2}{5}$ состоит как бы из трех частей: содержит новый математический знак (arc), напоминание об исходной функции ($\cos t$) и, наконец, напоминание о правой части уравнения, в приведенном нами случае — о числе $\frac{2}{5}$.

Теперь рассмотрим уравнение $\cos t = -\frac{2}{5}$. С помощью числовой окружности (рис. 100) получаем:

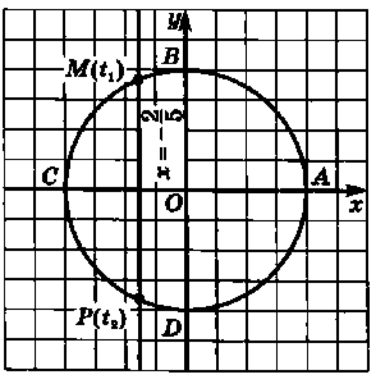


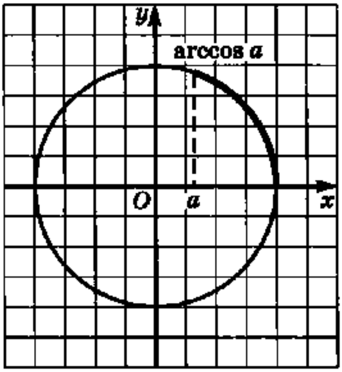
Рис. 100

$$t = t_1 + 2\pi k, \quad t = t_2 + 2\pi k,$$

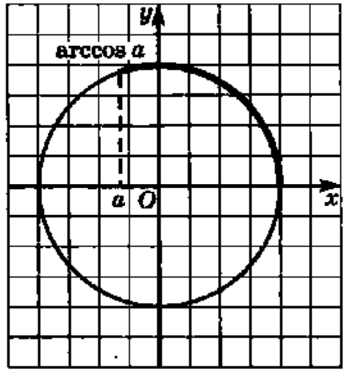
где t_1 — длина дуги AM, а $t_2 = -t_1$. Число t_1 обозначают символом $\arccos\left(-\frac{2}{5}\right)$ и записывают все корни уравнения $\cos t = -\frac{2}{5}$ следующим образом:

$$t = \arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k,$$

$$t = -\arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k.$$



а



б

Рис. 101

Написанные две формулы можно объединить в одну:

$$t = \pm\arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k.$$

Что же такое $\arccos\left(-\frac{2}{5}\right)$? Это число (длина дуги AM), косинус которого равен $-\frac{2}{5}$ и которое принадлежит отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Сформулируем определение арккосинуса в общем виде.

Определение. Если $|a| \leqslant 1$, то $\arccos a$ (арккосинус a) — это такое число из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a (рис. 101).

Итак,

$$\boxed{\begin{gathered}\text{если } |a| \leqslant 1, \text{ то}\\ \arccos a = t \Leftrightarrow \begin{cases}\cos t = a,\\ 0 \leqslant t \leqslant \pi.\end{cases}\end{gathered}}$$

В приведенной выше записи символ $\Leftrightarrow$ можно прочитать так: «это значит, что».

Теперь мы в состоянии сделать общий вывод о решении уравнения $\cos t = a$:

Если $|a| \leqslant 1$, то уравнение $\cos t = a$ имеет решения

$$\boxed{t = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in Z.}$$

Правда, в трех случаях предпочитают пользоваться не полученной общей формулой, а более простыми соотношениями:

если $\cos t = 0$, то $t = \frac{\pi}{2} + \pi k$;

если $\cos t = 1$, то $t = 2\pi k$;

если $\cos t = -1$, то $t = \pi + 2\pi k$.

Пример 1. Вычислить:

а) $\arccos \frac{1}{2}$; в) $\arccos 0$;

б) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $\arccos 1$.

Решение. а) Пусть $\arccos \frac{1}{2} = t$. Тогда $\cos t = \frac{1}{2}$ и $t \in [0; \pi]$. Значит, $t = \frac{\pi}{3}$, поскольку $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$. Итак, $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

б) Пусть $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = t$. Тогда $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $t \in [0; \pi]$. Значит, $t = \frac{3\pi}{4}$, поскольку $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{3\pi}{4} \in [0; \pi]$. Итак, $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

в) Пусть $\arccos 0 = t$. Тогда $\cos t = 0$ и $t \in [0; \pi]$. Значит, $t = \frac{\pi}{2}$, поскольку $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ и $\frac{\pi}{2} \in [0; \pi]$. Итак, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

г) Пусть $\arccos 1 = t$. Тогда $\cos t = 1$ и $t \in [0; \pi]$. Значит, $t = 0$, поскольку $\cos 0 = 1$ и $0 \in [0; \pi]$. Итак, $\arccos 1 = 0$. ◄■

***Теорема.* Для любого $a \in [-1; 1]$ выполняется равенство**

$$\arccos a + \arccos(-a) = \pi.$$

Доказательство. Будем считать для определенности, что $a > 0$. Отметим $\arccos a$ на числовой окружности — это длина дуги AM; $\arccos(-a)$ — длина дуги AP (рис. 102). Дуги AM и PC симметричны относительно вертикального диаметра окружности, значит, эти дуги равны по длине. Получаем:

$$\arccos a + \arccos(-a) = AM + AP =$$
$$= PC + AP = AC = \pi. \quad \bullet$$

На практике полученное соотношение удобнее использовать в следующем виде:

$$\boxed{\arccos(-a) = \pi - \arccos a, \text{ где } 0 \leqslant a \leqslant 1.}$$

При этом учитывают, что в случае, когда $a > 0$, число $\arccos a$ принадлежит интервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Например, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Такой же результат был получен выше при решении примера 1б.

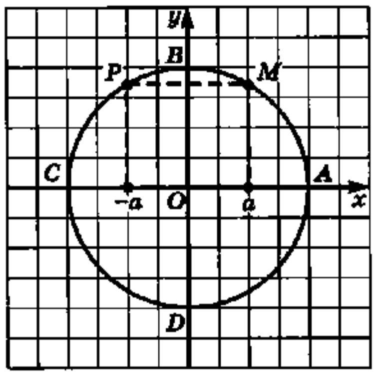


Рис. 102

Пример 2. Решить уравнение:

а) $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos t = \frac{2}{7}$;

б) $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos t = -1{,}2$.

Р е ш е н и е. а) Составим формулу решений:

$$t = \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k.$$

Вычислим значение арккосинуса:

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Подставим найденное значение в формулу решений:

$$t = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k.$$

б) Составим формулу решений:

$$t = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k.$$

Вычислим значение арккосинуса:

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Подставим найденное значение в формулу решений:

$$t = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k.$$

в) Составим формулу решений:

$$t = \pm\arccos\frac{2}{7} + 2\pi k.$$

Вычислить значение арккосинуса в данном случае мы не можем, поэтому запись решений уравнения оставим в полученном виде.

г) Так как $-1{,}2 < -1$, то уравнение $\cos t = -1{,}2$ не имеет решений.

Пример 3. Решить неравенство

$$\cos t > 0{,}3.$$

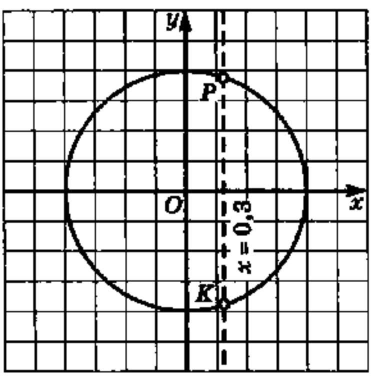


Рис. 103

Решение. Учтем, что $\cos t$ — абсцисса точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, надо найти такие точки $M(t)$, лежащие на окружности, которые удовлетворяют неравенству $x > 0{,}3$. Прямая $x = 0{,}3$ пересекает числовую окружность в точках K и P (рис. 103). Неравенству $x > 0{,}3$ соответствуют точки открытой дуги KP. Главные имена точек K и P в этом случае — соответственно $-\arccos 0{,}3$ и $\arccos 0{,}3$. Значит, аналитическая запись дуги KP имеет вид

$$-\arccos 0{,}3 + 2\pi k < t < \arccos 0{,}3 + 2\pi k.$$

§ 16. Арксинус. Решение уравнения $\sin t = a$

Рассмотрим уравнение $\sin t = \frac{2}{5}$. С помощью числовой окружности (рис. 104) получаем:

$$t = t_1 + 2\pi k, \quad t = t_2 + 2\pi k,$$

где t_1 — длина дуги AM, а t_2 — длина дуги AP. Поскольку $AP = AC - PC$, $AC = \pi$, а $PC = AM$, получаем, что $t_2 = \pi - t_1$.

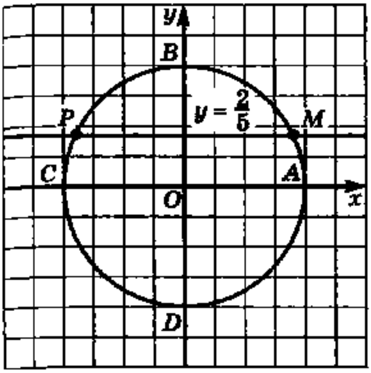


Рис. 104

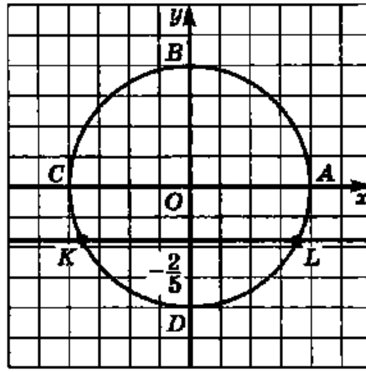


Рис. 105

Математики ввели для числа t_1 символ $\arcsin \frac{2}{5}$, который читается *арксинус двух пятых.* С его помощью все корни уравнения $\sin t = \frac{2}{5}$ можно описать двумя формулами:

$$t = \arcsin \frac{2}{5} + 2\pi k,$$

$$t = \pi - \arcsin \frac{2}{5} + 2\pi k.$$

Что же такое $\arcsin \frac{2}{5}$? Это число (длина дуги AM), синус которого равен $\frac{2}{5}$ и которое принадлежит отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Теперь рассмотрим уравнение $\sin t = -\frac{2}{5}$. С помощью числовой окружности (рис. 105) получаем:

$$t = t_1 + 2\pi k, \quad t = t_2 + 2\pi k,$$

где t_1 — длина дуги LA, взятая со знаком минус, t_2 — длина дуги AK. Математики обозначили число t_1 символом $\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)$ и сразу обратили внимание на два обстоятельства.

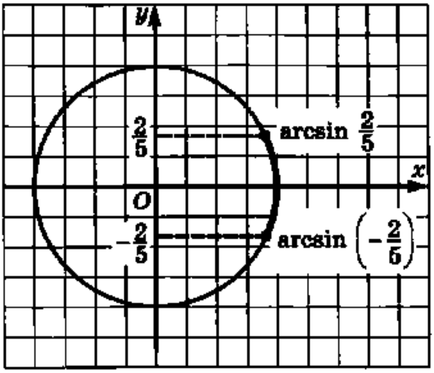


Рис. 106

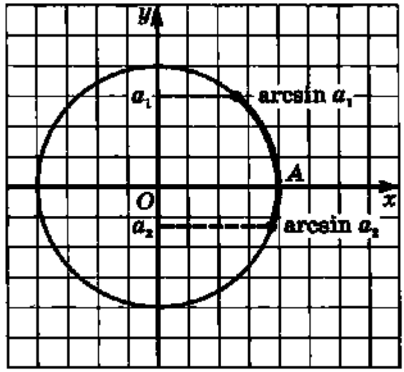


Рис. 107

Первое: дуги AM и AL (см. рис. 104 и 105) равны по длине и противоположны по направлению. Значит,

$$\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right) = -\arcsin\frac{2}{5} \text{ (рис. 106).}$$

Второе:

$$AK = AC + CK = AC + LA =$$
$$= AC - AL = \pi - \arcsin\left(-\frac{2}{5}\right).$$

Значит, и в этом случае получается, что $t_2 = \pi - t_1$. Это дает возможность записать все решения уравнения $\sin t = -\frac{2}{5}$ следующим образом:

$$t = \arcsin\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k, \quad t = \pi - \arcsin\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k.$$

Что же такое $\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)$? Это — число, синус которого равен $-\frac{2}{5}$ и которое принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Сформулируем определение арксинуса в общем виде.

Определение. Если $|a| \leqslant 1$, то $\arcsin a$ (арксинус a) — это такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a (рис. 107).

Итак,

$$\text{если } |a| \leqslant 1, \text{ то}$$
$$\arcsin a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = a, \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Теперь мы в состоянии сделать общий вывод о решении уравнения $\sin t = a$:

Если** $|a| \leqslant 1$, **то уравнение** $\sin t = a$ **имеет две серии решений:

$$t = \arcsin a + 2\pi k, \quad t = \pi - \arcsin a + 2\pi k;\ k \in Z.$$

Правда, в трех случаях предпочитают пользоваться не полученной общей формулой, а более простыми соотношениями:

если $\sin t = 0$, то $t = \pi k$;

если $\sin t = 1$, то $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$;

если $\sin t = -1$, то $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Пример 1. Вычислить:

а) $\arcsin \frac{1}{2}$;

б) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

в) $\arcsin 0$;

г) $\arcsin 1$.

Решение. а) Пусть $\arcsin \frac{1}{2} = t$. Тогда $\sin t = \frac{1}{2}$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $t = \frac{\pi}{6}$, поскольку $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Итак, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

б) Пусть $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = t$. Тогда $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $t = -\frac{\pi}{4}$, поскольку $\sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Итак, $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

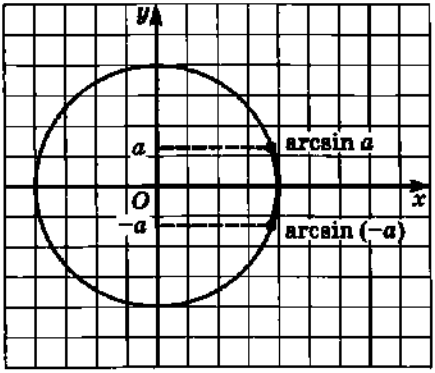


Рис. 108

в) Пусть $\arcsin 0 = t$. Тогда $\sin t = 0$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $t = 0$, поскольку $\sin 0 = 0$ и $0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Итак, $\arcsin 0 = 0$.

г) Пусть $\arcsin 1 = t$. Тогда $\sin t = 1$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $t = \frac{\pi}{2}$, поскольку $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ и $\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Итак, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. ◁■

Выше мы отметили, что

$$\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right) = -\arcsin\frac{2}{5}.$$

Вообще для любого $a \in [-1; 1]$ справедлива формула (рис. 108):

$$\boxed{\arcsin(-a) = -\arcsin a.}$$

Пример 2. Решить уравнение:

а) $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin t = \frac{2}{7}$;

б) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sin t = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Решение. а) Составим формулы решений:

$$t = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k; \quad t = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k.$$

Вычислим значение арксинуса:

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Подставим найденное значение в формулы решений:

$$t = \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \quad t = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k.$$

б) Составим формулы решений:

$$t = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k; \quad t = \pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k;$$

Вычислим значение арксинуса:

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}.$$

Подставим найденное значение в формулы решений:

$$t = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \quad t = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k, \text{ т. е. } t = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k.$$

в) Составим формулы решений:

$$t = \arcsin\frac{2}{7} + 2\pi k; \quad t = \pi - \arcsin\frac{2}{7} + 2\pi k.$$

Вычислить значение арксинуса в данном случае мы не можем, поэтому запись решений уравнения оставим в полученном виде.

г) Так как $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$, то уравнение $\sin t = \frac{\sqrt{5}}{2}$ не имеет решений. ◁■

Пример 3. Решить неравенство $\sin t \leqslant 0{,}3$.

Решение. а) Учтем, что $\sin t$ — ордината точки $M(t)$ числовой окружности. Значит, надо найти такие точки $M(t)$, лежащие на окружности, которые удовлетворяют неравенству $y \leqslant 0{,}3$. Прямая $y = 0{,}3$ пересекает числовую окружность в точках K и P (рис. 109). Неравенству $y \leqslant 0{,}3$ соответствуют точки дуги PK (рис. 109). Главные имена точек P и K в этом случае $-\pi - \arcsin 0{,}3$ и $\arcsin 0{,}3$ соответственно. Значит, решение неравенства имеет вид

$$-\pi - \arcsin 0{,}3 + 2\pi k \leqslant t \leqslant$$
$$\leqslant \arcsin 0{,}3 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad ◁■$$

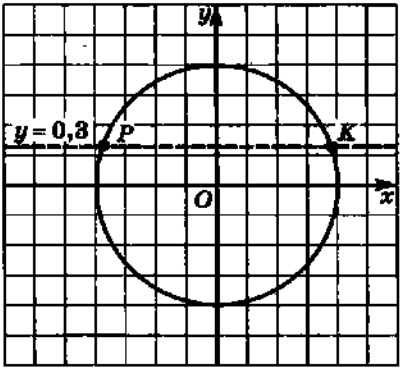


Рис. 109

Выше были получены две формулы для решения уравнения $\sin t = a$:

$$t = \arcsin a + 2\pi k;$$
$$t = \pi - \arcsin a + 2\pi k.$$

Их можно объединить одной формулой. Перепишем эти формулы следующим образом:

$$t = \arcsin a + \pi \cdot 2k,$$

$$t = -\arcsin a + \pi(2k + 1).$$

Замечаем, что если перед $\arcsin a$ стоит знак +, то у числа π множителем является четное число $2k$ (см. первую строку); если же перед $\arcsin a$ стоит знак −, то у числа π множителем является нечетное число $2k + 1$ (см. вторую строку). Это наблюдение позволяет записать общую формулу для решения уравнения $\sin t = a$:

$$\boxed{t = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ n \in Z.}$$

Почему эта формула общая? Смотрите: при четном n ($n = 2k$) из нее получается первая из написанных выше формул, а при нечетном n ($n = 2k + 1$) — вторая из написанных выше формул.

С помощью полученной общей формулы можно по-другому записать решения уравнений из примера 2. Так, для уравнения $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ получаем: $t = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$. Для уравнения $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ получаем: $t = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n$. Это выражение можно записать иначе, выполнив следующие преобразования:

$$(-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right) = (-1)^n(-1)\ \frac{\pi}{3} = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}.$$

В итоге получаем: $t = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$.

Для рассмотренного в примере 2в уравнения $\sin t = \frac{2}{7}$ ответ можно записать так: $t = (-1)^n \arcsin \frac{2}{7} + \pi n$.

В а ж н о е   з а м е ч а н и е. Итак, мы получили формулы корней для уравнений $\cos t = a$ и $\sin t = a$: соответственно $t = \pm\arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$; $t = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$ (где $|a| \leqslant 1$). Переменную мы пока обозначали буквой t для удобства читателя, подчеркивая тем самым, что вся информация получена с помощью числовой окружности. Но когда имеется г о т о в а я   ф о р м у л а, переменная может быть обозначена любой буквой, в том числе более традиционной для уравнений буквой x. Так мы чаще всего и будем поступать в дальнейшем при решении тригонометрических уравнений.

§ 17. Арктангенс и арккотангенс. Решение уравнений $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$

Рассмотрим уравнение $\operatorname{tg} x = 2$.

Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 2$ имеют бесконечно много общих точек, абсциссы всех этих точек имеют вид $x = x_1 + \pi k$, где x_1 — абсцисса точки пересечения прямой $y = 2$ с главной ветвью тангенсоиды (рис. 110). Для числа x_1 математики ввели обозначение $\operatorname{arctg} 2$ (читается: *арктангенс двух*). Все корни уравнения $\operatorname{tg} x = 2$ можно описать формулой $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$.

Что же такое $\operatorname{arctg} 2$? Это число, тангенс которого равен 2 и которое принадлежит интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Рассмотрим теперь уравнение $\operatorname{tg} x = -2$.

Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = -2$ имеют бесконечно много общих точек, абсциссы всех этих точек имеют вид $x = x_2 + \pi k$, где x_2 — абсцисса точки пересечения прямой $y = -2$ с главной ветвью тангенсоиды. Для числа x_2 математики ввели обозначение $\operatorname{arctg}(-2)$. Все корни уравнения можно описать формулой $x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi k$.

Что же такое $\operatorname{arctg}(-2)$? Это число, тангенс которого равен -2 и которое принадлежит интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Обратите внимание на то, что $x_2 = -x_1$ (рис. 110). Это значит, что $\operatorname{arctg}(-2) = -\operatorname{arctg} 2$.

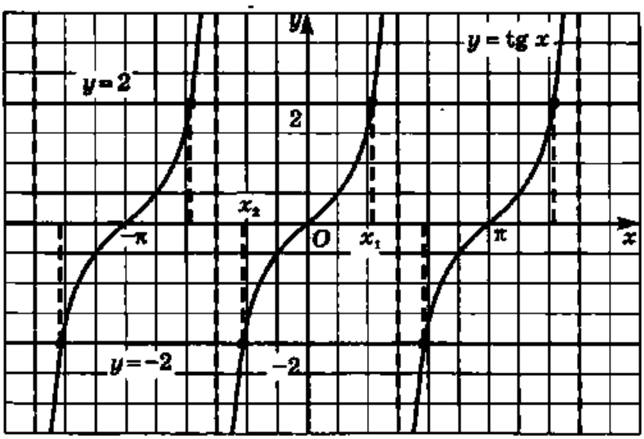


Рис. 110

Сформулируем определение арктангенса в общем виде.

Определение 1. arctg a (арктангенс a) — это такое число из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.

Итак,

$$\boxed{\operatorname{arctg} a = x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = a, \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}}$$

Теперь мы в состоянии сделать общий вывод о решении уравнения $\operatorname{tg} x = a$: *уравнение* $\operatorname{tg} x = a$ *имеет решения*

$$\boxed{x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z.}$$

Выше мы отметили, что $\operatorname{arctg}(-2) = -\operatorname{arctg} 2$. Вообще для любого значения a справедлива формула

$$\boxed{\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a.}$$

Пример 1. Вычислить:

а) $\operatorname{arctg} 1$; б) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; в) $\operatorname{arctg} 0$.

Решение. а) Пусть $\operatorname{arctg} 1 = x$. Тогда $\operatorname{tg} x = 1$ и $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Значит, $x = \frac{\pi}{4}$, поскольку $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Итак, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

б) Пусть $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = x$. Тогда $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Значит, $x = -\frac{\pi}{6}$, поскольку $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $-\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Итак, $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Можно было рассуждать и по-другому:

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}.$$

в) Пусть $\operatorname{arctg} 0 = x$. Тогда $\operatorname{tg} x = 0$ и $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Значит,

$x = 0$, поскольку $\operatorname{tg} 0 = 0$ и $0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Итак, $\operatorname{arctg} 0 = 0$.

Пример 2. Решить уравнения:

а) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} x = -1{,}2$.

Решение. а) Составим формулу решений: $x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi k$.

Находим, что $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$; подставив найденное значение в формулу решений, получим:

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k.$$

б) Составим формулу решений: $x = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi k$.

Находим, что $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$; подставив найденное значение в формулу решений, получим:

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k.$$

в) Составим формулу решений: $x = \operatorname{arctg}(-1{,}2) + \pi k$.

Вычислить значение арктангенса в данном случае мы не можем, поэтому запись решений уравнения оставим в полученном виде.

Рассмотрим уравнение $\operatorname{ctg} x = a$, где $a > 0$. Графики функций $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = a$ имеют бесконечно много общих точек, абсциссы всех этих точек имеют вид $x = x_1 + \pi k$, где $x_1 = \operatorname{arcctg} a$ — абсцисса точки пересечения прямой $y = a$ с главной ветвью тангенсоиды (рис. 111). Значит, $\operatorname{arcctg} a$ — это число, котангенс которого равен a и которое принадлежит интервалу $(0; \pi)$ — на этом интервале строится главная ветвь графика функции $y = \operatorname{ctg} x$.

На рисунке 111 представлена графическая иллюстрация решения уравнения $\operatorname{ctg} x = -a$. Графики функций $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = -a$ имеют бесконечно много общих точек, абсциссы всех этих точек имеют вид $x = x_2 + \pi k$, где $x_2 = \operatorname{arcctg}(-a)$ — абсцисса точки пересечения прямой $y = -a$ с главной ветвью тангенсоиды. Значит, $\operatorname{arcctg}(-a)$ — это число, котангенс которого равен $-a$ и которое принадлежит интервалу $(0; \pi)$.

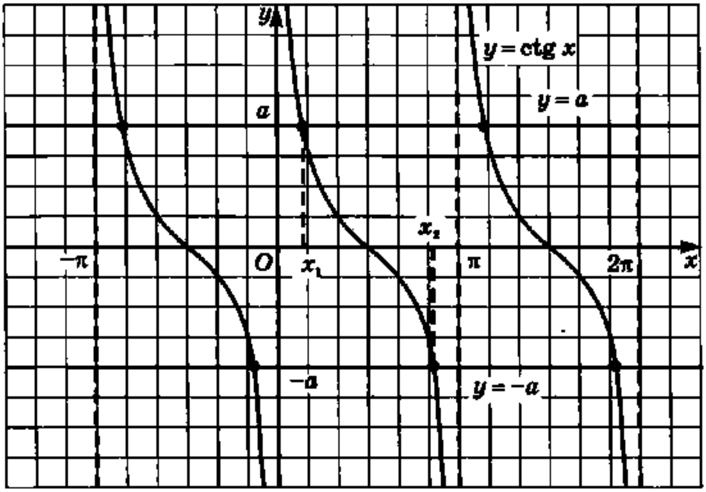


Рис. 111

Определение 2. **arcctg a (арккотангенс a) — это такое число из интервала $(0; \pi)$, котангенс которого равен a.**

Итак,

$$\text{arcctg}\,a = x \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ctg}\,x = a, \\ 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Теперь мы в состоянии сделать общий вывод о решении уравнения $\text{ctg}\,x = a$: ***уравнение*** $\text{ctg}\,x = a$ ***имеет решения***

$$x = \text{arcctg}\,a + \pi k,\ k \in Z.$$

Обратите внимание на то, что $x_2 = \pi - x_1$ (рис. 111). Это значит, что

$$\text{arcctg}\,(-a) = \pi - \text{arcctg}\,a.$$

Пример 3. Вычислить:

а) $\text{arcctg}\,1$; б) $\text{arcctg}\,(-1)$; в) $\text{arcctg}\,0$.

Решение. а) Пусть $\text{arcctg}\,1 = x$. Тогда $\text{ctg}\,x = 1$ и $x \in (0; \pi)$. Значит, $x = \frac{\pi}{4}$, поскольку $\text{ctg}\,\frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in (0; \pi)$. Итак, $\text{arcctg}\,1 = \frac{\pi}{4}$.

б) $\text{arcctg}\,(-1) = \pi - \text{arcctg}\,1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Итак, $\text{arcctg}\,(-1) = \frac{3\pi}{4}$.

в) Пусть $\operatorname{arcctg} 0 = x$. Тогда $\operatorname{ctg} x = 0$ и $x \in (0; \pi)$. Значит, $x = \frac{\pi}{2}$, поскольку $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$ и $\frac{\pi}{2} \in (0; \pi)$. Итак, $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$.

Замечание. Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ практически всегда можно преобразовать к виду $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$. Исключение составляет уравнение $\operatorname{ctg} x = 0$. Но в этом случае, воспользовавшись тем, что $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, можно перейти к уравнению $\cos x = 0$. Таким образом, уравнение вида $\operatorname{ctg} x = a$ самостоятельного интереса не представляет.

§ 18. Тригонометрические уравнения

1. Простейшие тригонометрические уравнения

Тригонометрическими уравнениями обычно называют уравнения, в которых переменные содержатся под знаками тригонометрических функций. К их числу прежде всего относятся *простейшие тригонометрические уравнения*, т. е. уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, где a — действительное число. К настоящему моменту мы знаем, что:

1) если $|a| \leqslant 1$, то решения уравнения $\cos x = a$ имеют вид

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n;$$

2) если $|a| \leqslant 1$, то решения уравнения $\sin x = a$ имеют вид

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$$

или, что то же самое,

$$x = \arcsin a + 2\pi k, \quad x = \pi - \arcsin a + 2\pi k;$$

3) если $|a| > 1$, то уравнения $\cos x = a$, $\sin x = a$ не имеют решений;

4) решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$ для любого значения a имеют вид

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n;$$

5) следует выделить частные случаи:

$$\sin x = 0, \quad x = \pi n;$$

$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n;$$

$$\cos x = 1, \quad x = 2\pi n;$$

$$\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n.$$

Во всех перечисленных формулах подразумевается, что параметр (n, k) принимает любые целочисленные значения ($n \in Z$, $k \in Z$).

К простейшим относят и уравнения вида $T(kx + m) = a$, где T — знак какой-либо тригонометрической функции.

Пример 1. Решить уравнения:

а) $\sin 2x = \frac{1}{2}$; б) $\cos \frac{2}{3}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение. а) Введем новую переменную $t = 2x$. Тогда заданное уравнение примет вид $\sin t = \frac{1}{2}$, откуда получаем:

$$t = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n.$$

Далее, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, значит, $t = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$.

Возвращаясь к переменной x, получаем: $2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$. Осталось обе части этого равенства разделить почленно на 2:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}.$$

Заметим, что при наличии некоторого опыта можно не вводить промежуточную переменную $t = 2x$, а сразу переходить от уравнения $\sin 2x = \frac{1}{2}$ к записи $2x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n$. Именно так мы и будем действовать в дальнейшем.

б) Решения уравнения $\cos t = a$ имеют вид $t = \pm\arccos a + 2\pi n$. Для данного примера это означает, что $\frac{2}{3}x = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n$.

Вычислим $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, воспользовавшись соответствующей формулой для арккосинуса (см. § 15):

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Значит, $\frac{2}{3}x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, откуда находим, что

$$x = \pm\frac{9\pi}{8} + 3\pi n.$$

в) Решения уравнения $\operatorname{tg} t = a$ имеют вид $t = \operatorname{arctg} a + \pi n$. Для данного примера это означает, что $4x - \frac{\pi}{6} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi n$. Вычислив $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$, получим $\frac{\pi}{6}$. Далее последовательно получаем:

$$4x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$4x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$4x = \frac{\pi}{3} + \pi n;$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbf{Z}.$$

Пример 2. Найти те корни уравнения $\sin 2x = \frac{1}{2}$, которые принадлежат отрезку $[0; \pi]$.

Решение. Сначала решим уравнение в общем виде: $x = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ (см. пример 1а). Далее придадим параметру n последовательно значения 0, 1, 2, ..., −1, −2, ... и подставим эти значения в общую формулу корней.

Если $n = 0$, то $x = (-1)^0\frac{\pi}{12} + 0 = \frac{\pi}{12}$. Это число принадлежит заданному отрезку $[0; \pi]$.

Если $n = 1$, то $x = (-1)^1\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{12}$. Это число принадлежит заданному отрезку $[0; \pi]$.

Если $n = 2$, то $x = (-1)^2\frac{\pi}{12} + \pi = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12}$. Это число не принадлежит заданному отрезку $[0; \pi]$. Тем более не будут принадлежать заданному отрезку те значения x, которые получаются из общей формулы при $n = 3, 4, \ldots$.

Пусть теперь $n = -1$. Тогда

$$x = (-1)^{-1}\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{7\pi}{12}.$$

Это число не принадлежит заданному отрезку $[0; \pi]$. Тем более не будут принадлежать заданному отрезку те значения x, которые получаются из общей формулы при $n = -2, -3, \ldots$.

Итак, заданному отрезку $[0; \pi]$ принадлежат те корни уравнения, которые получаются из общей формулы при следующих значениях параметра n: $n = 0$, $n = 1$. Эти корни таковы: $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$.

2. *Два основных метода решения тригонометрических уравнений*

В пункте 1 мы говорили лишь о простейших тригонометрических уравнениях вида $T(kx + m) = a$, где T — символ одной из тригонометрических функций. В более сложных случаях применяют метод введения новой переменной и метод разложения на множители.

Пример 3. Решить уравнения:

а) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$; б) $\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$.

Решение. а) Введем новую переменную: $z = \sin x$. Тогда уравнение примет вид $2z^2 - 5z + 2 = 0$, откуда находим: $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{1}{2}$.

Значит, либо $\sin x = 2$, либо $\sin x = \frac{1}{2}$. Первое уравнение не имеет корней, а из второго находим:

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n;\ x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n.$$

б) Воспользуемся тем, что $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Тогда заданное уравнение можно переписать в виде

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0.$$

После понятных преобразований получим:

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Введем новую переменную: $z = \cos x$. Тогда уравнение примет вид $2z^2 - z - 1 = 0$, откуда находим: $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2}$. Значит, либо $\cos x = 1$, либо $\cos x = -\frac{1}{2}$. Из первого уравнения находим: $x = 2\pi n$; из второго уравнения находим:

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n;\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

Ответ: а) $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$; б) $x = 2\pi n$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

Теперь поговорим о втором методе решения тригонометрических уравнений — *методе разложения на множители*. Смысл этого метода вам знаком: если уравнение $f(x) = 0$ удается преобразовать к виду $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$, то либо $f_1(x) = 0$, либо $f_2(x) = 0$. В подобных случаях обычно говорят так: *задача сводится к решению совокупности уравнений*:

$$f_1(x) = 0; \quad f_2(x) = 0.$$

Пример 4. Решить уравнение $\left(\sin x - \frac{1}{3}\right)\left(\cos x + \frac{2}{5}\right) = 0.$

Решение. Задача сводится к решению совокупности уравнений:

$$\sin x = \frac{1}{3}; \quad \cos x = -\frac{2}{5}.$$

Из этих уравнений находим соответственно:

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n; \quad x = \pm\arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi n.$$

Пример 5. Решить уравнение $2 \sin \frac{x}{2} \cos 5x - \cos 5x = 0.$

Решение. Имеем: $\cos 5x\left(2 \sin \frac{x}{2} - 1\right) = 0$. Значит, приходим к совокупности уравнений

$$\cos 5x = 0; \quad \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Из первого уравнения находим: $5x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$.

Из второго уравнения находим: $\frac{x}{2} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$; $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $n \in \mathbf{Z}$.

Замечание. Учтите, что переход от уравнения $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$ к совокупности уравнений $f_1(x) = 0$; $f_2(x) = 0$ не всегда безопасен. Рассмотрим, например, уравнение $\operatorname{tg} x\,(\sin x - 1) = 0$. Из уравнения $\operatorname{tg} x = 0$ находим: $x = \pi n$; из уравнения $\sin x = 1$ находим: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Но включить обе серии решений в ответ нельзя. Дело в том, что при значениях $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ входящий в заданное уравнение множитель $\operatorname{tg} x$ не имеет смысла, т. е. значения $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ не принадлежат области определения уравнения (области допустимых значений переменной — ОДЗ), это посторонние корни.

3. Однородные тригонометрические уравнения

Здесь мы познакомимся с довольно часто встречающимися на практике тригонометрическими уравнениями специального вида.

Определение. Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$ называют однородным тригонометрическим уравнением первой степени; уравнение вида $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ называют однородным тригонометрическим уравнением второй степени.

Сначала поговорим о решении однородных тригонометрических уравнений первой степени, причем рассмотрим только самый общий случай, когда оба коэффициента a и b отличны от нуля; ведь если, например, $a = 0$, уравнение принимает вид $b \cos x = 0$ и отдельного обсуждения не заслуживает. Аналогично при $b = 0$ получаем: $a \sin x = 0$, что тоже не требует отдельного обсуждения.

Итак, дано уравнение $a \sin x + b \cos x = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos x$, получим:

$$\frac{a \sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x};$$

$$a \operatorname{tg} x + b = 0.$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a};$$

$$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Обратите внимание, что делить обе части уравнения на одно и то же выражение можно только в том случае, когда мы уверены, что это выражение не обращается в нуль (на 0 делить нельзя). Уверены ли мы, что в рассматриваемом случае $\cos x$ отличен от нуля? Давайте проанализируем. Предположим, что $\cos x = 0$. Тогда однородное уравнение $a \sin x + b \cos x = 0$ примет вид $a \sin x = 0$, т. е. $\sin x = 0$ (вы ведь не забыли, что коэффициент a отличен от нуля). Получается, что и $\cos x = 0$, и $\sin x = 0$, а это невозможно, так как $\sin x$ и $\cos x$ обращаются в нуль в различных точках. Итак, в однородном тригонометрическом уравнении первой степени деление обеих частей уравнения на $\cos x$ — вполне благополучная операция, не приводящая к потере решений.

Уравнения вида $a \sin mx + b \cos mx = 0$ тоже называют однородными тригонометрическими уравнениями первой степени. Для их решения обе части уравнения делят почленно на $\cos mx$.

Пример 6. Решить уравнение $2\sin x - 3\cos x = 0$.

Решение. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos x$, получим:

$$2\,\mathrm{tg}\,x - 3 = 0;\quad \mathrm{tg}\,x = \frac{3}{2};\quad x = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{2} + \pi n.$$

Ответ: $x = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{2} + \pi n$.

Пример 7. Решить уравнение $\cos(2\pi - 2x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Мы знаем, что $\cos(-t) = \cos t$, значит,

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right).$$

По формулам приведения (см. § 9) имеем:

$$\cos(2\pi - 2x) = \cos 2x;\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin 2x.$$

Это позволяет переписать заданное уравнение в более простом виде: $\cos 2x = \sin 2x$, т. е. $\sin 2x - \cos 2x = 0$.

Разделим обе части уравнения почленно на $\cos 2x$:

$$\mathrm{tg}\,2x - 1 = 0;$$

$$\mathrm{tg}\,2x = 1;$$

$$2x = \mathrm{arctg}\,1 + \pi n;$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n;$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\quad n \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим теперь однородное тригонометрическое уравнение второй степени

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0.$$

Если коэффициент a отличен от нуля, т. е. в уравнении содержится член $\sin^2 x$ с каким-то коэффициентом, отличным от нуля, то, рассуждая как и выше, легко убедиться в том, что при интересующих нас значениях переменной $\cos x$ не обращается в нуль, а потому можно обе части уравнения разделить почленно на $\cos^2 x$. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{a\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{c\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x},$$

$$\text{т. е. } a\,\mathrm{tg}^2 x + b\,\mathrm{tg}\,x + c = 0.$$

Это — квадратное уравнение относительно новой переменной $z = \mathrm{tg}\, x$.

Пусть теперь в однородном тригонометрическом уравнении

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

коэффициент a равен 0, т. е. отсутствует член $a \sin^2 x$. Тогда уравнение принимает вид

$$b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0.$$

Это уравнение можно решить методом разложения на множители:

$$\cos x\, (b \sin x + c \cos x) = 0;$$
$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad b \sin x + c \cos x = 0.$$

Получились два уравнения, которые мы решать умеем.

Аналогично обстоит дело и в случае, когда $c = 0$, т. е. когда однородное уравнение имеет вид $a \sin^2 x + b \sin x \cos x = 0$ (здесь можно вынести за скобки $\sin x$).

Фактически мы выработали алгоритм решения однородного уравнения второй степени.

Алгоритм решения уравнения
$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

1. Посмотреть, есть ли в уравнении член $a \sin^2 x$.
2. Если член $a \sin^2 x$ в уравнении содержится (т. е. $a \neq 0$), то уравнение решается делением обеих его частей на $\cos^2 x$ и последующим введением новой переменной $z = \mathrm{tg}\, x$.
3. Если член $a \sin^2 x$ в уравнении не содержится (т. е. $a = 0$), то уравнение решается методом разложения на множители: за скобки выносят $\cos x$.

Так же обстоит дело и в однородных уравнениях вида

$$a \sin^2 mx + b \sin mx \cos mx + c \cos^2 mx = 0.$$

Пример 8. Решить уравнение $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$.

Решение. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos^2 x$, получим:

$$\mathrm{tg}^2 x - 3\, \mathrm{tg}\, x + 2 = 0.$$

Введя новую переменную $z = \mathrm{tg}\, x$, получим:

$$z^2 - 3z + 2 = 0;$$
$$z_1 = 1,\ z_2 = 2.$$

Значит, либо $\operatorname{tg} x = 1$, либо $\operatorname{tg} x = 2$. Из уравнения $\operatorname{tg} x = 1$ находим:

$$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n, \quad \text{т. е.} \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$$

Из уравнения $\operatorname{tg} x = 2$ находим: $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$.

Пример 9. Решить уравнение $\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

Решение. Здесь отсутствует член вида $a \sin^2 x$, значит, делить обе части уравнения на $\cos^2 x$ нельзя. Решим уравнение методом разложения на множители:

$$\cos x\left(\sqrt{3} \sin x + \cos x\right) = 0;$$

$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad \sqrt{3} \sin x + \cos x = 0.$$

Из первого уравнения находим: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Второе уравнение — однородное тригонометрическое уравнение первой степени. Решим его с помощью почленного деления обеих частей уравнения на $\cos x$:

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0;$$

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0;$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n;$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$; $n \in \mathbf{Z}$.

В заключение рассмотрим более сложный пример.

Пример 10. Решить уравнение

$$3 \sin^2 3x - 2\sqrt{3} \sin 3x \cos 3x + 5 \cos^2 3x = 2.$$

Решение. Чем это уравнение сложнее предыдущих? Во-первых, оно не является однородным, так как в правой его части содержится не 0, а 2. Во-вторых, в левой части уравнения под знаками синуса и косинуса находится не x, а $3x$.

С числом 2, содержащимся в правой части уравнения, поступим следующим образом. Известно, что $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ — это тождество верно для любого t. В частности, $\sin^2 3x + \cos^2 3x = 1$. Но тогда $2\sin^2 3x + 2\cos^2 3x = 2$. Заменив в правой части уравнения 2 на $2\sin^2 3x + 2\cos^2 3x$, получим:

$$3\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 5\cos^2 3x = 2\sin^2 3x + 2\cos^2 3x;$$

$$3\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 5\cos^2 3x - 2\sin^2 3x - 2\cos^2 3x = 0;$$

$$\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 3\cos^2 3x = 0.$$

Как видите, удалось преобразовать заданное уравнение в однородное тригонометрическое уравнение второй степени. Оно содержит в своем составе член $\sin^2 3x$, значит, применим способ почленного деления на $\cos^2 3x$:

$$\operatorname{tg}^2 3x - 2\sqrt{3}\operatorname{tg} 3x + 3 = 0.$$

Введя новую переменную $z = \operatorname{tg} 3x$, получим квадратное уравнение

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 3 = 0.$$

Для решения этого уравнения можно использовать формулу корней квадратного уравнения, но изящнее сделать так: заметив, что

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 3 = \left(z - \sqrt{3}\right)^2,$$

преобразовать квадратное уравнение к виду $\left(z - \sqrt{3}\right)^2 = 0$, откуда находим, что $z = \sqrt{3}$.

Итак,

$$\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3};$$

$$3x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n;$$

$$3x = \frac{\pi}{3} + \pi n;$$

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

ГЛАВА 4. Преобразование тригонометрических выражений

§ 19. Синус и косинус суммы и разности аргументов

В этой главе речь пойдет о преобразовании тригонометрических выражений. Для этого используются различные тригонометрические формулы. Пожалуй, самыми важными являются следующие две формулы (доказательство технически довольно сложно, и мы его здесь не приводим):

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x\cos y+\cos x\sin y,\\ \cos(x+y) &= \cos x\cos y-\sin x\sin y.\end{aligned}}$$

Эти формулы обычно называют *синус суммы* и *косинус суммы*. А считаются они самыми важными потому, что, как мы увидим далее, из этих формул без особого труда выводятся практически все формулы тригонометрии.

Рассмотрим выражение $\sin(x-y)$. Если переписать его в виде $\sin(x+(-y))$, то появляется возможность применить формулу синуса суммы для аргументов x и $-y$:

$$\sin(x+(-y)) = \sin x\cos(-y)+\cos x\sin(-y). \tag{1}$$

А теперь воспользуемся тем, что

$$\cos(-y)=\cos y, \quad \sin(-y)=-\sin y.$$

Это позволит правую часть равенства (1) переписать в виде

$$\sin x\cos y-\cos x\sin y.$$

Таким образом, получилась формула *синуса разности*:

$$\boxed{\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y.}$$

Аналогичные рассуждения позволяют вывести формулу *косинуса разности*:

$$\cos(x-y)=\cos(x+(-y))=\cos x\cos(-y)-\sin x\sin(-y)=$$
$$=\cos x\cos y+\sin x\sin y.$$

Итак,

$$\boxed{\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.}$$

Пример 1. Вычислить $\sin 75°$ и $\cos 75°$.

Решение. Воспользуемся тем, что $75° = 45° + 30°$, и тем, что значения синуса и косинуса углов 45° и 30° известны:

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};\quad \sin 30° = \frac{1}{2};\quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Имеем:

$$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° + \cos 45° \cdot \sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° - \sin 45° \cdot \sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\sin 75° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\cos 75° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Пример 2. Доказать, что

а) $\sin(\pi + x) = -\sin x$; в) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$;

б) $\cos(\pi + x) = -\cos x$; г) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

Решение.

а) $\sin(\pi + x) = \sin\pi\cos x + \cos\pi\sin x = 0 \cdot \cos x + (-1)\cdot\sin x = -\sin x$;

б) $\cos(\pi + x) = \cos\pi\cos x - \sin\pi\sin x = (-1)\cdot\cos x - 0\cdot\sin x = -\cos x$;

в) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin\dfrac{\pi}{2}\cos x - \cos\dfrac{\pi}{2}\sin x = 1\cdot\cos x - 0\cdot\sin x = \cos x$;

г) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos\dfrac{\pi}{2}\cos x + \sin\dfrac{\pi}{2}\sin x = 0\cdot\cos x + 1\cdot\sin x = \sin x$. ◀

Замечание. Это известные вам формулы приведения (см. § 9). Все формулы приведения для синуса и косинуса без труда выводятся с помощью формул синуса и косинуса суммы и разности аргументов.

Пример 3. Вычислить $\sin x$ и $\cos x$, если $x = 255°$.

Решение. $\sin 255° = \sin(180° + 75°) = -\sin 75°$;

$$\cos 255° = \cos(180° + 75°) = -\cos 75°.$$

В примере 1 мы установили, что

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}; \quad \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Значит,

$$\sin 255^\circ = -\sin 75^\circ = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

$$\cos 255^\circ = -\cos 75^\circ = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Пример 4. Известно, что

$$\sin x = \frac{3}{5}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}; \quad \cos y = -\frac{3}{5}, \quad \pi < y < \frac{3\pi}{2}.$$

Вычислить: а) $\sin(x+y)$; б) $x+y$.

Решение. а) Воспользуемся формулой синуса суммы:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \qquad (2)$$

Значения $\sin x$ и $\cos y$ заданы, нужно вычислить значения $\cos x$ и $\sin y$.

Имеем: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. По условию аргумент x принадлежит первой четверти, а в ней косинус положителен. Поэтому из равенства $\cos^2 x = \frac{16}{25}$ находим, что $\cos x = \frac{4}{5}$.

Имеем: $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. По условию аргумент y принадлежит третьей четверти, а в ней синус отрицателен. Поэтому из равенства $\sin^2 y = \frac{16}{25}$ находим, что $\sin y = -\frac{4}{5}$.

Подставим заданные и найденные значения в правую часть формулы (2):

$$\sin(x+y) = \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -1.$$

б) В условии сказано, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$.

Сложив эти два двойных неравенства, получим:

$$\pi < x + y < 2\pi.$$

Итак, $\sin(x+y) = -1$ и $\pi < x+y < 2\pi$. Значит, $x + y = \frac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) -1; б) $\frac{3\pi}{2}$.

Пример 5. Вычислить:

а) $\sin\frac{4\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}+\cos\frac{4\pi}{15}\sin\frac{\pi}{15}$;

б) $\cos 37^\circ \cos 8^\circ - \sin 37^\circ \sin 8^\circ$;

в) $\sin 44^\circ \cos 14^\circ - \sin 46^\circ \cos 76^\circ$.

Решение. а) Заданное выражение можно «свернуть» в синус суммы аргументов $\frac{4\pi}{15}$ и $\frac{\pi}{15}$:

$$\sin\frac{4\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}+\cos\frac{4\pi}{15}\sin\frac{\pi}{15}=\sin\left(\frac{4\pi}{15}+\frac{\pi}{15}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

б) Заданное выражение можно «свернуть» в косинус суммы аргументов 37° и 8°:

$$\cos 37^\circ \cos 8^\circ - \sin 37^\circ \sin 8^\circ = \cos(37^\circ + 8^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

в) По формулам приведения находим:

$$\sin 46^\circ = \sin(90^\circ - 44^\circ) = \cos 44^\circ;$$
$$\cos 76^\circ = \cos(90^\circ - 14^\circ) = \sin 14^\circ.$$

Это значит, что в заданном выражении можно заменить $\sin 46^\circ$ на $\cos 44^\circ$, а $\cos 76^\circ$ на $\sin 14^\circ$. Тогда заданное выражение примет вид

$$\sin 44^\circ \cdot \cos 14^\circ - \cos 44^\circ \cdot \sin 14^\circ.$$

Это синус разности аргументов 44° и 14°:

$$\sin 44^\circ \cdot \cos 14^\circ - \cos 44^\circ \cdot \sin 14^\circ = \sin(44^\circ - 14^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Ответ: а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$.

Пример 6. а) Упростить выражение $\sqrt{3}\cos x - \sin x$;

б) решить уравнение $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$.

Решение. а) Если переписать заданное выражение в виде $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right)$ и вспомнить, что $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$, а $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$, то можно увидеть, что выражение в скобках представляет собой правую часть формулы косинуса суммы для аргументов $\frac{\pi}{6}$ и x:

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right).$$

б) В пункте а) мы получили, что

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right).$$

Значит, заданное уравнение можно переписать в виде

$$2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 1.$$

Решая это уравнение, последовательно получаем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{1}{2};$$

$$\frac{\pi}{6} + x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n;$$

$$\frac{\pi}{6} + x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;$$

$$x = -\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

Учтем, что $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$, а $-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$. Это позволит записать решение уравнения не в виде одной, а в виде двух серий, но зато они выглядят понятнее: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Ответ: а) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$; б) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 7. Решить уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sqrt{3}$.

Решение.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x\right) +$$

$$+ \left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x - \frac{1}{2}\cdot\sin x +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x + \frac{1}{2}\cdot\sin x = \sqrt{3}\cos x.$$

Теперь заданное уравнение можно переписать в виде $\sqrt{3}\cos x =$ $= \sqrt{3}$, т. е. $\cos x = 1$, откуда получаем: $x = 2\pi n$.

Ответ: $x = 2\pi n,\quad n \in Z$.

§ 20. Тангенс суммы и разности аргументов

В § 19 мы получили формулы, выражающие синус и косинус суммы и разности аргументов через синусы и косинусы аргументов. В этом параграфе речь пойдет о том, как тангенс суммы или разности аргументов выражается через тангенсы аргументов. Соответствующие формулы выглядят следующим образом:

$$\boxed{\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y};}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.}$$

При этом, разумеется, предполагается, что все тангенсы имеют смысл, т. е. что $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$ (для первой формулы), $x - y \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$ (для второй формулы).

Доказательства этих формул достаточно сложны, мы приведем одно из них в конце параграфа. Но сначала рассмотрим ряд примеров, показывающих, как использовать эти формулы на практике.

Пример 1. Вычислить:

а) $\operatorname{tg} 75°$; б) $\operatorname{tg} 15°$; в) $\frac{\operatorname{tg} 27° + \operatorname{tg} 18°}{1 - \operatorname{tg} 27° \operatorname{tg} 18°}$.

Решение. а) Воспользуемся тем, что $75° = 45° + 30°$. Получим:

$$\operatorname{tg} 75° = \operatorname{tg}(45° + 30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 30°}{1 - \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°} =$$

$$= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}.$$

Есть смысл избавиться от иррациональности в знаменателе, домножив числитель и знаменатель полученной дроби на $3 + \sqrt{3}$:

$$\frac{(3+\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{(3+\sqrt{3})^2}{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{9+6\sqrt{3}+3}{9-3} = \frac{12+6\sqrt{3}}{6} =$$

$$= \frac{6(2+\sqrt{3})}{6} = 2 + \sqrt{3}.$$

Итак, $\operatorname{tg} 75° = 2 + \sqrt{3}$.

б) Можно воспользоваться тем, что $15° = 45° - 30°$, и далее рассуждать так же, как в пункте а) (сделайте это!). Но мы поступим по-другому:

$$\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(90° - 75°) = \operatorname{ctg} 75°;$$

$$\operatorname{ctg} 75° = \frac{1}{\operatorname{tg} 75°}.$$

В пункте а) мы установили, что $\operatorname{tg} 75° = 2 + \sqrt{3}$. Значит,

$$\operatorname{tg} 15° = \frac{1}{\operatorname{tg} 75°} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 2 - \sqrt{3}.$$

Итак, $\operatorname{tg} 15° = 2 - \sqrt{3}$.

в) Заметим, что заданное выражение представляет собой правую часть формулы тангенса суммы для аргументов 27° и 18°. Значит,

$$\frac{\operatorname{tg} 27° + \operatorname{tg} 18°}{1 - \operatorname{tg} 27° \operatorname{tg} 18°} = \operatorname{tg}(27° + 18°) = \operatorname{tg} 45° = 1.$$

Ответ: а) $2 + \sqrt{3}$; б) $2 - \sqrt{3}$; в) 1.

Пример 2. Доказать тождество $\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

Решение. Применим к правой части проверяемого тождества формулу тангенса разности:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \operatorname{tg} x} = \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}.$$

Замечание. Когда речь идет о доказательстве тождества или о преобразовании выражения, всегда предполагается, что переменные принимают только допустимые значения. Так, в рассмотренном примере доказанное тождество справедливо при следующих условиях: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{4} - x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $n \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 3. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, если известно, что

$$\cos x = -\frac{3}{5},\ \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

Решение. Воспользуемся тождеством, полученным в предыдущем примере:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}. \quad (1)$$

Если мы вычислим $\operatorname{tg} x$, то вычислим и $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

Значение $\cos x$ задано, значение $\operatorname{tg} x$ найдем с помощью соотношения $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$. Получим:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{25}{9} - 1 = \frac{16}{9}.$$

По условию аргумент x принадлежит второй четверти, а в ней тангенс отрицателен. Поэтому из равенства $\operatorname{tg}^2 x = \frac{16}{9}$ находим: $\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}$.

Подставим найденное значение $\operatorname{tg} x$ в правую часть формулы (1):

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{1 + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{3}} = \frac{7}{3} : \left(-\frac{1}{3}\right) = -7.$$ ◁■

В заключение, как было обещано, докажем формулу тангенса суммы. Имеем:

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}.$$

Разделим в полученной дроби числитель и знаменатель почленно на $\cos x \cos y$ (это возможно, поскольку $\cos x \cos y \neq 0$ при допустимых значениях x, y):

$$\frac{\dfrac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \dfrac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\dfrac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \dfrac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\sin y}{\cos y}}{1 - \dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot \dfrac{\sin y}{\cos y}} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Итак, $\operatorname{tg}(x + y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$, что и требовалось доказать.

§ 21. Формулы двойного аргумента

Здесь речь пойдет о формулах тригонометрии, позволяющих выразить $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$ через $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$. Эти формулы обычно называют *формулами двойного аргумента*. Название, может быть, не очень удачное, как, впрочем, и такие названия, как формулы приведения, синус суммы, косинус разности и т. д. Но это не суть важно: главное, что есть некий словесный символ, позволяющий понять, о чем идет речь.

Рассмотрим выражение $\sin 2x$, представив при этом $2x$ в виде $x + x$. Это позволит применить к выражению $\sin(x + x)$ формулу синуса суммы (см. § 19):

$$\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x.$$

Итак,

$$\boxed{\sin 2x = 2 \sin x \cos x.}$$

Рассмотрим выражение $\cos 2x$, представив при этом $2x$ в виде $x + x$. Это позволит применить к выражению $\cos(x + x)$ формулу косинуса суммы (см. § 19):

$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Итак,

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.}$$

Рассмотрим выражение $\operatorname{tg} 2x$, представив при этом $2x$ в виде $x + x$. Это позволит применить к выражению $\operatorname{tg}(x + x)$ формулу тангенса суммы (см. § 20):

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x + x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

Итак,

$$\boxed{\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}.}$$

Формулы синуса двойного аргумента и косинуса двойного аргумента справедливы для любых значений аргумента (никаких ограничений нет), тогда как формула тангенса двойного аргумента справедлива лишь для тех значений аргумента x, для которых определены $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} 2x$, а также отличен от нуля знаменатель дроби, т. е. $1 - \operatorname{tg}^2 x \neq 0$.

Разумеется, все полученные формулы можно применять и в тех случаях, когда место аргумента x занимает более сложное выражение. Например, справедливы следующие соотношения:

$$\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x;$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2};$$

$$\cos 48^\circ = \cos^2 24^\circ - \sin^2 24^\circ;$$

$$\cos (2x + 6y) = \cos^2 (x + 3y) - \sin^2 (x + 3y);$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3} - 2t\right) = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - t\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{3} - t\right)}.$$

И, как всегда, любую из трех полученных в этом параграфе формул двойного аргумента можно использовать как справа налево, так и слева направо.

Например, вместо $2 \sin 3x \cos 3x$ можно написать $\sin 6x$, вместо $\cos^2 2{,}5t - \sin^2 2{,}5t$ можно написать $\cos 5t$.

Пример 1. Доказать тождества:

а) $1 + \sin 2x = (\cos x + \sin x)^2$;

б) $1 - \sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$.

Решение. а) Воспользуемся тем, что $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, и формулой синуса двойного аргумента. Получим:

$$1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = (\cos x + \sin x)^2.$$

б) $1 - \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = (\cos x - \sin x)^2$. ◀

Пример 2. Сократить дробь $\dfrac{1+\sin 2x}{\cos 2x}$.

Решение. В числителе дроби воспользуемся доказанным в примере 1 тождеством, а в знаменателе — формулой косинуса двойного аргумента:

$$\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{(\cos x+\sin x)^2}{\cos^2 x-\sin^2 x}=$$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)^2}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}.$$

Пример 3. Вычислить:

а) $\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}$; б) $\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}$.

Решение. а) Заданное выражение представляет собой правую часть формулы косинуса двойного аргумента. Заметив это, получим:

$$\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}=\cos\frac{2\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

б) Заданное выражение представляет собой правую часть формулы синуса двойного аргумента, но только не хватает множителя 2. Введя его, получим:

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=0{,}5\cdot\left(2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\right)=0{,}5\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)=$$

$$=0{,}5\sin\frac{\pi}{6}=0{,}5\cdot 0{,}5=0{,}25.$$

Ответ: а) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; б) 0,25.

Пример 4. Зная, что $\cos x=\dfrac{3}{5}$ и $x\in\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$, вычислить:

а) $\cos 2x$; б) $\sin 2x$; в) $\operatorname{tg} 2x$.

Решение. а) $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}$.

Теперь нетрудно вычислить $\cos 2x$:

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=\left(\frac{3}{5}\right)^2-\frac{16}{25}=-\frac{7}{25}.$$

б) Для вычисления $\sin 2x$ воспользуемся формулой

$$\sin 2x=2\sin x\cos x.$$

Значение $\cos x$ дано в условии, а значение $\sin x$ найдем следующим образом. Во-первых, мы уже знаем, что $\sin^2 x = \frac{16}{25}$. Это значит, что $\sin x = \frac{4}{5}$ или $\sin x = -\frac{4}{5}$.

Во-вторых, по условию аргумент x принадлежит четвертой четверти, а в ней синус отрицателен. Это значит, что $\sin x = -\frac{4}{5}$.

Теперь нетрудно вычислить $\sin 2x$:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

в) $\operatorname{tg} 2x$ вычислим, воспользовавшись определением тангенса:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{-\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}.$$

Ответ: а) $-\frac{7}{25}$; б) $-\frac{24}{25}$; в) $\frac{24}{7}$.

Пример 5. Решить уравнение $\sin 4x - \cos 2x = 0$.

Решение. Если в левой части уравнения к выражению $\sin 4x$ применить формулу синуса двойного аргумента, то удастся разложить левую часть на множители:

$$\sin 4x - \cos 2x = 0;$$

$$2 \sin 2x \cos 2x - \cos 2x = 0;$$

$$\cos 2x\ (2 \sin 2x - 1) = 0;$$

$$\cos 2x = 0 \quad \text{или} \quad 2 \sin 2x - 1 = 0.$$

Из уравнения $\cos 2x = 0$ находим:

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}.$$

Из уравнения $2 \sin 2x - 1$ находим:

$$\sin 2x = \frac{1}{2};$$

$$2x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n;$$

$$2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$; $n \in \mathbf{Z}$.

Если в формуле $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ заменить $\sin^2 x$ на $1 - \cos^2 x$, получим:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1.$$

Таким образом, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, значит,

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.}$$

Если в формуле $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ заменить $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получим:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x.$$

Таким образом, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, значит,

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.}$$

Полученные две формулы обычно называют *формулами понижения степени.*

Замечание. Откуда появилось такое название? Дело в том, что в левой части обоих тождеств содержится вторая степень косинуса или синуса, а в правой части — первая степень косинуса, т. е. степень понизилась. Но при применении этих формул будьте внимательны: степень понижается, зато аргумент удваивается.

Пример 6. Зная, что $\cos x = -\frac{5}{13}$ и $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, вычислить:

а) $\cos \frac{x}{2}$; б) $\sin \frac{x}{2}$; в) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Решение. а) Воспользуемся формулой понижения степени

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}.$$

Получим:

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\frac{5}{13}}{2} = \frac{4}{13}.$$

По условию $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, значит, $\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$. Таким образом, аргумент $\frac{x}{2}$ принадлежит первой четверти, а в ней косинус положителен. Поэтому из уравнения $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{4}{13}$ получаем: $\cos \frac{x}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

б) Воспользуемся формулой понижения степени

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}.$$

Получим:

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\frac{5}{13}}{2} = \frac{9}{13}.$$

Выше мы уже установили, что аргумент $\frac{x}{2}$ принадлежит первой четверти, а в ней синус положителен. Поэтому из уравнения $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{9}{13}$ получаем: $\sin \frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

в) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \dfrac{\frac{3}{\sqrt{13}}}{\frac{2}{\sqrt{13}}} = \dfrac{3}{2}$.

Ответ: а) $\frac{2}{\sqrt{13}}$; б) $\frac{3}{\sqrt{13}}$; в) 1,5.

Пример 7. Доказать тождество $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1+\sin 2x}{2}$.

Решение. Применим к левой части доказываемого тождества формулу понижения степени:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 - \cos\left(2\cdot\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right)}{2}.$$

Замечаем, воспользовавшись формулой приведения, что

$$\cos\left(2\cdot\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = -\sin 2x.$$

Таким образом, $1 - \cos\left(2\cdot\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right) = 1 + \sin 2x$, а это значит, что

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1+\sin 2x}{2}.$$

Пример 8. Решить уравнение $\cos^2 3x = \frac{3}{4}$.

Решение. Можно, конечно, извлечь из обеих частей уравнения квадратный корень и получить два более простых уравнения: $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, — а затем каждое из этих уравнений решить по соответствующей формуле. Но удобнее воспользоваться формулой понижения степени

$$\cos^2 3x = \frac{1 + \cos 6x}{2}.$$

Тогда заданное уравнение примет вид $\frac{1 + \cos 6x}{2} = \frac{3}{4}$, откуда находим:

$$\cos 6x = \frac{1}{2};$$

$$6x = \pm\arccos \frac{1}{2} + 2\pi n;$$

$$6x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;$$

$$x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}.$$

◁■

Пример 9. Доказать, что если $x \neq \pi + 2\pi n$, то справедливы следующие тождества:

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{\frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} =$$

$$= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos x}{1} = \cos x;$$

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{\dfrac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin x.$$

Почему сделано ограничение $x \neq \pi + 2\pi n$? Потому что если $x = \pi + 2\pi n$, то $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, и тогда $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не определен.

§ 22. Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения

Продолжим изучение формул тригонометрии, но сначала обсудим один вопрос, который, наверное, вы уже задавали своему учителю: формул тригонометрии очень много, неужели все эти формулы мы должны помнить, как таблицу умножения? Запоминать все формулы не нужно! Вы должны, во-первых, иметь представление о том, что эти тригонометрические формулы существуют, и, во-вторых, научиться применять их на практике. Главное — выписать нужные формулы, удачно их расположить и держать перед глазами, когда решаете тригонометрический пример. В конце главы 4 мы составим такую «шпаргалку».

В этом параграфе речь пойдет о формулах, особенно полезных при решении тригонометрических уравнений, поскольку они позволяют сумму или разность синусов или косинусов разложить на множители.

Рассмотрим выражение $\sin(s+t) + \sin(s-t)$. Применив формулы синуса суммы и синуса разности, получим:

$$(\sin s\cos t + \cos s\sin t) + (\sin s\cos t - \cos s\sin t) = 2\sin s\cos t.$$

Итак,

$$\sin(s+t) + \sin(s-t) = 2\sin s\cos t. \qquad (1)$$

Пусть $x = s + t$, $y = s - t$. Если эти равенства сложить, получим: $x + y = 2s$, т. е. $s = \frac{x+y}{2}$. Если же из равенства $x = s + t$ вычесть равенство $y = s - t$, получим: $x - y = 2t$, т. е. $t = \frac{x-y}{2}$.

А теперь заменим в формуле (1) $s+t$ на x, $s-t$ на y, s на $\frac{x+y}{2}$, t на $\frac{x-y}{2}$. Тогда формула (1) примет вид

$$\boxed{\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.} \qquad (2)$$

Например,

$$\sin 6x+\sin 4x=2\sin\frac{6x+4x}{2}\cos\frac{6x-4x}{2}=2\sin 5x\cos x;$$

$$\sin 43^\circ+\sin 17^\circ=2\sin\frac{43^\circ+17^\circ}{2}\cos\frac{43^\circ-17^\circ}{2}=$$

$$=2\sin 30^\circ\cos 13^\circ=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 13^\circ=\cos 13^\circ.$$

Воспользовавшись тем, что $-\sin y=\sin(-y)$, и формулой (2) суммы синусов, находим, что

$$\sin x-\sin y=\sin x+\sin(-y)=$$

$$=2\sin\frac{x+(-y)}{2}\cos\frac{x-(-y)}{2}=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.$$

Итак,

$$\boxed{\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.} \qquad (3)$$

Например,

$$\sin 3x-\sin 5x=2\sin\frac{3x-5x}{2}\cos\frac{3x+5x}{2}=$$

$$=2\sin(-x)\cos 4x=-2\sin x\cos 4x.$$

Рассмотрим выражение $\cos(s+t)+\cos(s-t)$. Применив формулы косинуса суммы и косинуса разности, получим:

$$(\cos s\cos t-\sin s\sin t)+(\cos s\cos t+\sin s\sin t)=2\cos s\cos t.$$

Итак, $\cos(s+t)+\cos(s-t)=2\cos s\cos t$.

Рассуждая далее, как выше при переходе от формулы (1) к формуле (2), получим:

$$\boxed{\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.} \qquad (4)$$

Например,

$$\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}=2\cos\frac{\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{8}-\frac{3\pi}{8}}{2}=$$

$$=2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}.$$

Рассмотрим выражение $\cos(s+t)-\cos(s-t)$. Применив формулы косинуса суммы и косинуса разности, получим:

$$(\cos s\cos t-\sin s\sin t)-(\cos s\cos t+\sin s\sin t)=-2\sin s\sin t.$$

Итак, $\cos(s+t)-\cos(s-t)=-2\sin s\sin t$.

Рассуждая далее, как выше при переходе от формулы (1) и формуле (2) получим:

$$\boxed{\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.} \qquad (5)$$

Например,

$$\cos(2x+y)-\cos(4x-y)=$$

$$=-2\sin\frac{(2x+y)+(4x-y)}{2}\sin\frac{(2x+y)-(4x-y)}{2}=$$

$$=-2\sin 3x\sin(-x+y)=2\sin 3x\sin(x-y).$$

Пример 1. Решить уравнения:

а) $\sin 5x+\sin x=0$; б) $\sin 17x=\sin 7x$; в) $\cos 3x=\sin x$.

Решение. а) Преобразовав сумму синусов в произведение по формуле (2), получим:

$$\sin 5x+\sin x=2\sin 3x\cos 2x.$$

Теперь заданное уравнение можно переписать так:

$$2\sin 3x\cos 2x=0.$$

Значит, либо $\sin 3x=0$, либо $\cos 2x=0$. Из уравнения $\sin 3x=0$ находим:

$$3x=\pi n;\ x=\frac{\pi n}{3}.$$

Из уравнения $\cos 2x=0$ находим:

$$2x=\frac{\pi}{2}+\pi n;\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}.$$

б) Имеем последовательно:

$$\sin 17x-\sin 7x=0;$$
$$2\sin 5x\cos 12x=0;$$
$$\sin 5x=0;\ \cos 12x=0.$$

Из уравнения $\sin 5x = 0$ находим: $5x = \pi n$; $x = \frac{\pi n}{5}$.

Из уравнения $\cos 12x = 0$ находим:

$$12x = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{12}.$$

в) Здесь придется воспользоваться формулой приведения $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, чтобы вместо разности синуса и косинуса получить разность косинусов, для которой применима формула (5):

$$\cos 3x - \sin x = 0;$$

$$\cos 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0;$$

$$-2\sin\frac{3x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2}\sin\frac{3x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2} = 0;$$

$$-2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0;\ \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Из первого уравнения находим: $x + \frac{\pi}{4} = \pi n$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$.

Из второго уравнения находим: $2x - \frac{\pi}{4} = \pi n$; $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi n}{3}$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; б) $x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{12}$, $x = \frac{\pi n}{5}$;

в) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$.

(Напомним: всюду подразумевается, что $n \in \mathbb{Z}$.)

Пример 2. Решить уравнение $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

Решение. Сгруппируем первое и третье слагаемые левой части уравнения:

$$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 0.$$

Далее имеем:

$$2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 0;$$
$$\sin 2x\,(2\cos x + 1) = 0;$$
$$\sin 2x = 0;\ \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Из первого уравнения находим: $2x = \pi n$; $x = \frac{\pi n}{2}$.

Из второго уравнения находим:

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n;\quad x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n;$$

$$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n;\quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $n \in Z$.

Рассмотрим выражение $A\sin x + B\cos x$; пусть для определенности A и B — положительные числа.

Введем обозначение: $C = \sqrt{A^2 + B^2}$. Заметим, что

$$\left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2 = 1.$$

В самом деле,

$$\left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2 = \frac{A^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^2} = \frac{A^2 + B^2}{C^2} = \frac{C^2}{C^2} = 1.$$

Это значит, что пара чисел $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ удовлетворяет уравнению $x^2 + y^2 = 1$, т. е. точка с координатами $\left(\frac{A}{C}; \frac{B}{C}\right)$ лежит на числовой (единичной) окружности. Но тогда $\frac{A}{C}$ есть косинус, а $\frac{B}{C}$ — синус некоторого аргумента t, т. е. $\frac{A}{C} = \cos t$, $\frac{B}{C} = \sin t$.

Учитывая все это, поработаем с выражением $A\sin x + B\cos x$:

$$A\sin x + B\cos x = C\left(\frac{A}{C}\sin x + \frac{B}{C}\cos x\right) =$$
$$= C(\cos t\sin x + \sin t\cos x) = C\sin(x + t).$$

Итак,

$$\boxed{A\sin x + B\cos x = C\sin(x + t),\ \text{где}\ C = \sqrt{A^2 + B^2}.}$$

Аналогично можно выражение $A\sin x - B\cos x$, где $A > 0$, $B > 0$, преобразовать к виду $C\sin(x - t)$.

Обычно аргумент t называют *вспомогательным (дополнительным) аргументом*. Как его находят, покажем в примере 3.

Пример 3. Преобразовать в произведение выражение $5 \sin x - 12 \cos x$.

Решение. Здесь $A = 5$, $B = -12$, $C = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13$.

Имеем: $5 \sin x - 12 \cos x = 13\left(\frac{5}{13} \sin x - \frac{12}{13} \cos x\right)$.

Введем вспомогательный аргумент t, удовлетворяющий соотношениям: $\cos t = \frac{5}{13}$, $\sin t = \frac{12}{13}$; можно считать, что $t = \arcsin \frac{12}{13}$. Тогда

$$\frac{5}{13} \sin x - \frac{12}{13} \cos x = \sin x \cos t - \cos x \sin t = \sin (x - t).$$

Итак,

$$5 \sin x - 12 \cos x = 13 \sin (x - t), \text{ где } t = \arcsin \frac{12}{13}.$$

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 5 \sin x - 12 \cos x.$$

Решение. Имеем (см. пример 3): $y = 13 \sin (x - t)$.

Теперь ясно, что $y_{\text{наим}} = -13$, $y_{\text{наиб}} = 13$ (поскольку синус принимает значения от -1 до 1).

Ответ: $y_{\text{наим}} = -13$, $y_{\text{наиб}} = 13$.

Пример 5. Решить уравнение $5 \sin x - 12 \cos x = 13$.

Решение. В этом примере, как и в примере 4, есть смысл преобразовать выражение $5 \sin x - 12 \cos x$ к виду $13 \sin (x - t)$. Получим:

$$13 \sin (x - t) = 13;$$

$$\sin (x - t) = 1;$$

$$x - t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$x = t + \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

где $t = \arcsin \frac{12}{13}$ (см. пример 3).

Ответ: $x = \arcsin \frac{12}{13} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Замечание. С равным успехом мы могли считать, что $\frac{A}{C} = \sin t$, $\frac{B}{C} = \cos t$. Тогда

$$A \sin x + B \cos x = C\left(\frac{A}{C} \sin x + \frac{B}{C} \cos x\right) =$$

$$= C (\sin t \sin x + \cos t \cos x) = C \cos (x - t).$$

§ 23. Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы

Сравните название этого параграфа с названием § 22, в котором речь шла о преобразовании суммы (или разности) синусов или косинусов в произведение. Известно, что любая математическая формула на практике применяется как справа налево, так и слева направо. Поэтому неудивительно, что в тригонометрии приходится осуществлять и «движение в обратном направлении»: преобразовывать произведение тригонометрических функций в сумму. Об этом и пойдет речь в настоящем параграфе.

В § 22 мы видели, что $\sin(s+t)+\sin(s-t)=2\sin s\cos t$.

Отсюда получаем:

$$\boxed{\sin s\cos t=\frac{\sin(s+t)+\sin(s-t)}{2}.}$$

В § 22 мы видели, что $\cos(s+t)+\cos(s-t)=2\cos s\cos t$.

Отсюда получаем:

$$\boxed{\cos s\cos t=\frac{\cos(s+t)+\cos(s-t)}{2}.}$$

В § 22 мы видели, что $\cos(s+t)-\cos(s-t)=-2\sin s\sin t$.

Отсюда получаем:

$$\boxed{\sin s\sin t=\frac{\cos(s-t)-\cos(s+t)}{2}.}$$

Таковы три формулы, позволяющие преобразовать произведение тригонометрических функций в сумму.

Пример 1. Преобразовать произведение в сумму:

а) $\sin 5x\cos 3x$; в) $\cos(3x+y)\cos(x-3y)$;

б) $\sin 3x\cos 5x$; г) $\sin 27°\sin 57°$.

Решение.

а) $\sin 5x\cos 3x=\dfrac{\sin(5x+3x)+\sin(5x-3x)}{2}=\dfrac{\sin 8x+\sin 2x}{2}$.

$$\text{б) } \sin 3x\cos 5x=\frac{\sin(3x+5x)+\sin(3x-5x)}{2}=$$

$$=\frac{\sin 8x+\sin(-2x)}{2}=\frac{\sin 8x-\sin 2x}{2}.$$

$$\text{в) } \cos(3x+y)\cos(x-3y) =$$
$$= \frac{\cos((3x+y)+(x-3y)) + \cos((3x+y)-(x-3y))}{2} =$$
$$= \frac{\cos(4x-2y)+\cos(2x+4y)}{2}.$$
$$\text{г) } \sin 27^\circ \sin 57^\circ = \frac{\cos(27^\circ - 57^\circ) - \cos(27^\circ + 57^\circ)}{2} =$$
$$= \frac{\cos(-30^\circ) - \cos 84^\circ}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos 84^\circ\right).$$

Пример 2. Найти значение выражения $\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$, если известно, что $\cos x = \frac{2}{3}$.

Решение.
$$\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos x).$$

Значение $\cos x$ дано в условии, значение $\cos 2x$ легко найти, воспользовавшись формулой $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, откуда получаем:
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}.$$

Таким образом,
$$\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{9}+\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{18}.$$

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

Завершая главу 4, соберем все основные формулы тригонометрии и расположим их так, чтобы ими было удобно пользоваться. Разумеется, все эти формулы применяются только при допустимых значениях аргументов.

1. *Формулы, связывающие тригонометрические функции одного и того же аргумента:*

1) $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$; 4) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

2) $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$; 5) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$;

3) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$; 6) $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$.

2. *Формулы, связывающие функции аргументов, из которых один вдвое больше другого:*

1) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$;

2) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$;

3) $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$;

4) $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$;

5) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$.

3. *Формулы сложения аргументов:*

1) $\sin (x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$;

2) $\sin (x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$;

3) $\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$;

4) $\cos (x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$;

5) $\operatorname{tg} (x + y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$;

6) $\operatorname{tg} (x - y) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.

4. *Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения:*

1) $\sin x + \sin y = 2 \sin \dfrac{x + y}{2} \cos \dfrac{x - y}{2}$;

2) $\sin x - \sin y = 2 \sin \dfrac{x - y}{2} \cos \dfrac{x + y}{2}$;

3) $\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x + y}{2} \cos \dfrac{x - y}{2}$;

4) $\cos x - \cos y = -2 \sin \dfrac{x + y}{2} \sin \dfrac{x - y}{2}$.

5. *Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы:*

1) $\sin x \cos y = \dfrac{\sin (x + y) + \sin (x - y)}{2}$;

2) $\cos x \cos y = \dfrac{\cos (x + y) + \cos (x - y)}{2}$;

3) $\sin x \sin y = \dfrac{\cos (x - y) - \cos (x + y)}{2}$.

6. *Формулы приведения* (см. правило на с. 64).

ГЛАВА 5 Производная

Мы приступаем к изучению раздела математики, который обычно называют «Математический анализ». Естественно, что в школе мы ограничимся изучением лишь отдельных элементов математического анализа. Это будет первое знакомство с серьезным разделом высшей математики, в котором исследуют, как ведет себя функция не только в целом, во всей своей области определения (глобальный подход), но и около конкретной точки (локальный подход). Такой анализ практически всегда связан с понятием *предела функции*, с которым мы познакомимся в § 26, а затем изучим *производную* — важную математическую модель, давшую название всей главе. Построение этой модели основано на понятии предела.

§ 24. Предел последовательности

Что такое числовая последовательность и как она задается, вам известно из курса алгебры 9-го класса. Напомним соответствующее определение.

Определение 1. Функцию вида $y = f(x)$, $x \in N$ называют **функцией натурального аргумента** или **числовой последовательностью** и обозначают $y = f(n)$ или $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$, или (y_n).

Последовательности можно задавать различными способами, например *словесно*, когда правило задания последовательности описано словами. Так, словесно задается последовательность простых чисел:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots .$$

Считают, что последовательность задана *аналитически*, если указана формула ее n-го члена.

Приведем три примера.

1) $y_n = n^2$. Это аналитическое задание последовательности

$$1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots .$$

Указав конкретное значение n, нетрудно найти член последовательности с соответствующим номером. Если, например, $n = 9$, то $y_9 = 9^2$, т. е. $y_9 = 81$; если $n = 27$, то $y_{27} = 27^2$, т. е. $y_{27} = 729$. Напротив, если взят определенный член последовательности, можно указать его номер. Например, если $y_n = 625$, то из уравнения $n^2 = 625$ находим, что $n = 25$. Это значит, что 25-й член заданной последовательности равен 625.

2) $y_n = C$. Здесь речь идет о последовательности

$$C, C, C, \dots , C, \dots .$$

Такую последовательность называют постоянной (или *стационарной*).

3) $y_n = 2^n$. Это аналитическое задание последовательности

$$2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots , 2^n, \dots .$$

Определение 2. Последовательность (y_n) называют **ограниченной сверху**, если все ее члены не больше некоторого числа.

Иными словами, последовательность (y_n) *ограничена сверху*, если существует число M такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \leqslant M$. Число M называют *верхней границей последовательности*.

Например, последовательность $-1, -4, -9, -16, \dots , -n^2, \dots$ ограничена сверху. В качестве верхней границы можно взять число -1 или любое число, которое больше чем -1, например 0.

Определение 3. Последовательность (y_n) называют **ограниченной снизу**, если все ее члены не меньше некоторого числа.

Иными словами, последовательность (y_n) *ограничена снизу*, если существует число m такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \geqslant m$. Число m называют *нижней границей последовательности*.

Например, последовательность $1, 4, 9, 16, \dots , n^2, \dots$ ограничена снизу. В качестве нижней границы можно взять число 1 или любое число, которое меньше 1, например $\frac{1}{2}$.

Если последовательность ограничена и снизу и сверху, то ее называют **ограниченной последовательностью**.

Свойство ограниченности последовательности становится особенно наглядным, если члены последовательности отметить точками на числовой прямой. Ограниченность последовательности означает, что все члены последовательности (точнее, соответствующие им точки прямой) принадлежат некоторому отрезку. Так, изобразив члены последовательности $y_n = \dfrac{1}{n}$ точками на числовой прямой, замечаем, что все они принадлежат отрезку [0; 1] (рис. 112). Значит, $y_n = \dfrac{1}{n}$ — ограниченная последовательность.

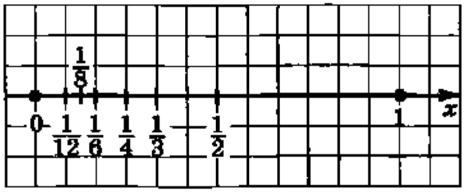


Рис. 112

Определение 4. Последовательность y_n называют **возрастающей**, если каждый ее член больше предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < \ldots < y_n < y_{n+1} < \ \ldots .$$

Например, 1, 3, 5, 7, ... , $2n - 1$, ... — возрастающая последовательность.

Определение 5. Последовательность y_n называют **убывающей**, если каждый ее член меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > \ldots > y_n > y_n > \ \ldots .$$

Например, $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots$ — убывающая последовательность.

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином — **монотонные последовательности.**

Приведем еще несколько примеров.

1) $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, \ldots, (-1)^{n-1}, \dfrac{1}{n}, \ldots$. Эта последовательность не является ни возрастающей, ни убывающей (немонотонная последовательность).

2) $y_n = 2^n$. Речь идет о последовательности 2, 4, 8, 16, 32, ... Это возрастающая последовательность.

Вообще *если* $a > 1$, *то последовательность* $y_n = a^n$ *возрастает.*

3) $y_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. Речь идет о последовательности $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{81}, \ldots$. Это убывающая последовательность.

Вообще *если* $0 < a < 1$, *то последовательность* $y_n = a^n$ *убывает.*

Рассмотрим две числовые последовательности (y_n) и (x_n).

$$(y_n)\text{: } 1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 2n - 1, \ldots ;$$

$$(x_n)\text{: } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots .$$

Рис. 113

Изобразим члены этих последовательностей точками на числовой прямой (рис. 113 для (y_n) и рис. 112 для (x_n)). Замечаем, что члены последовательности (x_n) как бы «сгущаются» около точки 0, а у последовательности (y_n) такой «точки сгущения» нет. В подобных случаях математики говорят так: последовательность (x_n) *сходится*, а последовательность (y_n) *расходится*.

Возникает естественный вопрос: как узнать, является ли конкретная точка, взятая на прямой, «точкой сгущения» для членов заданной последовательности?

Сразу уточним: математики не используют термин «точка сгущения для членов заданной последовательности», они предпочитают использовать термин «предел последовательности».

Определение 6. Число b называют **пределом последовательности** (y_n), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

В этом случае пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ (читают: *предел последовательности* (y_n) *при стремлении* n *к бесконечности равен* b; но обычно слова «при стремлении n к бесконечности» опускают).

Используют и такую запись: $y_n \to b$ (читают: y_n стремится к b, или y_n сходится к b).

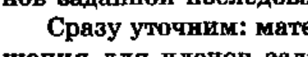


Рис. 114

Разъясним суть использованного выше термина «окрестность»: интервал $(a - r;\ a + r)$ будем называть **окрестностью точки** a (рис. 114), а число r — **радиусом окрестности**. Например, (5,9; 6,1) — окрестность точки 6, причем радиус окрестности равен 0,1.

Для рассмотренной выше последовательности $x_n = \frac{1}{n}$ можно записать соотношение

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.}$$

Так же обстоит дело с последовательностью

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots,\ \left(\frac{1}{2}\right)^n,\ \ldots .$$

Имеет место соотношение $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$

Вообще

$$\boxed{\text{если } |q| < 1, \text{ то } \lim_{n \to \infty} q^n = 0.}$$

А что будет с последовательностью q^n, если $|q| > 1$? Пусть, например, $q = 2$, т. е. речь идет о последовательности 2, 2^2, 2^3, 2^4, ... , 2^n, ... Эта последовательность явно не имеет предела (нет «точки сгущения»). Вообще справедливо утверждение:

если $|q| > 1$, *то последовательность* $y_n = q^n$ *расходится.*

Дадим несколько пояснений к определению 6.

Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$. Возьмем интервал $(b - r_1;\ b + r_1)$, т. е. окрестность точки b; r_1 — радиус этой окрестности ($r_1 > 0$). Существует номер n_1, начиная с которого вся последовательность содержится в указанной окрестности: $y_{n_1} \in (b - r_1;\ b + r_1)$, $y_{n_1+1} \in (b - r_1;\ b + r_1)$, $y_{n_1+2} \in (b - r_1;\ b + r_1)$ и т. д.

А что будет, если взять интервал $(b - r_2;\ b + r_2)$, где $0 < r_2 < r_1$, т. е. если уменьшить радиус окрестности? Опять найдется номер n_2, начиная с которого вся последовательность содержится в указанной окрестности, но этот номер будет больше, т. е. $n_2 > n_1$.

Если число b — предел последовательности, то, образно выражаясь, окрестность точки b — это «ловушка» для последовательности: начиная с некоторого номера n_0 эта ловушка «заглатывает» y_{n_0} и все последующие члены последовательности. Чем «тоньше» ловушка, т. е. чем меньшая выбирается окрестность, тем дольше «сопротивляется» последовательность, но потом все равно «подписывает акт о капитуляции» — попадает, начиная с некоторого номера, в выбранную окрестность.

Сходящиеся последовательности обладают рядом свойств. Мы дадим лишь формулировки этих свойств.

Свойство 1. *Если последовательность сходится, то только к одному пределу.*

Свойство 2. *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

Заметим, что обратное утверждение неверно: например, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... , 1, 2, 3, ... — ограниченная последовательность, но она не сходится.

Оказывается, если последовательность не только ограничена, но и монотонна (убывает или возрастает), то она обязательно сходится; это доказал в XIX в. немецкий математик Карл Вейерштрасс.

Свойство 3. *Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится* (теорема Вейерштрасса).

Приведем классический пример из геометрии, в котором используется теорема Вейерштрасса. Возьмем окружность и будем последовательно вписывать в нее правильные многоугольники: 4-угольник, 8-угольник, 16-угольник и т. д. Последовательность площадей (периметров) этих правильных многоугольников возрастает и ограничена: снизу числом 0, а сверху, например, числом, выражающим площадь (периметр) описанного около окружности квадрата. Значит, построенная последовательность сходится, ее предел принимается за площадь круга (за длину окружности). Именно с помощью таких рассуждений и получена в математике формула площади круга $S = \pi r^2$ (установлено, что πr^2 — предел последовательности площадей вписанных в окружность радиуса r правильных многоугольников) и формула длины окружности $l = 2\pi r$.

Выше мы отметили, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0; \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0, \quad \text{если } |q| < 1.$$

Добавим еще одно соотношение: $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$.

Иными словами, *предел стационарной последовательности равен значению любого члена последовательности.*

Для вычисления пределов последовательностей в более сложных случаях используются указанные соотношения и следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема. **Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$, то**

1) предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = b + c;$$

2) предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = bc;$$

3) предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{b}{c}, \ c \neq 0;$$

4) постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty} (kx_n) = kb.$$

Пример. Найти пределы последовательностей:

а) $x_n = \frac{1}{n^2}$; в) $t_n = \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3$;

б) $z_n = \frac{k}{n^4}$; г) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 4}$.

Решение. а) Имеем: $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$. Применив правило «предел произведения», получим:

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \to \infty}\frac{1}{n} \cdot \lim_{n \to \infty}\frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0.$$

б) $$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{k}{n^4}\right) = \lim_{n \to \infty}\left(k \cdot \frac{1}{n^4}\right) = k \cdot \lim_{n \to \infty}\frac{1}{n} \cdot \lim_{n \to \infty}\frac{1}{n} \cdot \lim_{n \to \infty}\frac{1}{n} \cdot \lim_{n \to \infty}\frac{1}{n} =$$
$$= k \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

Вообще для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение

$$\boxed{\lim_{n \to \infty}\left(\frac{k}{n^m}\right) = 0.}$$

в) Применив правило «предел суммы», получим:

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3\right) = \lim_{n \to \infty}\frac{2}{n} - \lim_{n \to \infty}\frac{5}{n^2} + \lim_{n \to \infty}3 = 0 - 0 + 3 = 3.$$

г) Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на n^2:

$$\lim_{n \to \infty}\frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{4}{n^2}} = \lim_{n \to \infty}\frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}}.$$

Теперь можно воспользоваться правилом «предел дроби (частного)». Предел числителя равен 2, предел знаменателя равен 1, предел дроби равен 2.

Ответ: а) 0; б) 0; в) 3; г) 2.

§ 25. Сумма бесконечной геометрической прогрессии

Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots\ .$$

т. е. последовательность (b_n), каждый член которой получается из предыдущего умножением на одно и то же отличное от нуля число q (знаменатель прогрессии).

Будем последовательно вычислять суммы двух, трех, четырех и т. д. членов прогрессии:

$$S_1 = b_1;$$
$$S_2 = b_1 + b_2;$$
$$S_3 = b_1 + b_2 + b_3;$$
$$S_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4;$$
$$\dots$$
$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n;$$
$$\dots$$

Получилась последовательность $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$. Как всякая числовая последовательность, она может сходиться или расходиться. Если последовательность S_n сходится к пределу S, то число S называют *суммой геометрической прогрессии* (обратите внимание: не суммой n членов геометрической прогрессии, как мы говорили в 9-м классе, а суммой геометрической прогрессии). Если же эта последовательность расходится, то о сумме геометрической прогрессии не говорят, хотя о сумме первых n членов геометрической прогрессии можно, разумеется, говорить и в этом случае.

Напомним формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии: если $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$, то $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Рассмотрим случай, когда знаменатель q геометрической прогрессии удовлетворяет неравенству $|q| < 1$. Докажем, что в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{b_1}{1 - q}$.

Прежде всего воспользуемся тем, что постоянный множитель $\dfrac{b_1}{q-1}$ можно вынести за знак предела. Получим:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1}{q - 1}(q^n - 1) = \frac{b_1}{q - 1} \cdot \lim_{n\to\infty}(q^n - 1).$$

Далее воспользуемся тем, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ (при $|q| < 1$), и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(q^n - 1) = 0 - 1 = -1$. Тогда

$$\frac{b_1}{q - 1} \cdot \lim_{n\to\infty}(q^n - 1) = \frac{b_1}{q - 1} \cdot (-1) = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Но $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, по определению, является суммой геометрической прогрессии. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Если знаменатель q геометрической прогрессии (b_n) удовлетворяет неравенству $|q| < 1$, то сумма S прогрессии вычисляется по формуле $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Пример 1. Найти сумму геометрической прогрессии

$$4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \dots\ .$$

Решение. Здесь $b_1 = 4$, $q = \dfrac{1}{2}$. Поскольку знаменатель прогрессии удовлетворяет неравенству $|q| < 1$, мы имеем право воспользоваться только что полученной формулой $S = \dfrac{b_1}{1-q}$. Значит, $S = \dfrac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$. Обратите внимание, что нам удалось найти сумму бесконечного множества слагаемых:

$$4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 8.$$

Ответ: $S = 8$.

Пример 2. Сумма геометрической прогрессии, у которой $|q| < 1$, равна 9, а сумма квадратов ее членов 40,5. Найти пятый член прогрессии.

Решение. <u>Первый этап</u>. *Составление математической модели.*

Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ со знаменателем q, удовлетворяющим условию $|q| < 1$; ее сумма вычисляется по формуле $\dfrac{b_1}{1-q}$. По условию эта сумма равна 9. Таким образом, получаем уравнение $\dfrac{b_1}{1-q} = 9$.

Последовательность $b_1^2, b_2^2, b_3^2, \dots, b_n^2, \dots$ также является геометрической прогрессией: ее первый член равен b_1^2, знаменатель равен q^2, причем $q^2 < 1$. Сумма этой прогрессии вычисляется по формуле $\dfrac{b_1^2}{1-q^2}$. По условию эта сумма равна 40,5. Таким образом, получаем уравнение $\dfrac{b_1^2}{1-q^2} = 40{,}5$.

В итоге задача сводится к решению системы уравнений относительно переменных b_1 и q:

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q} = 9, \\ \dfrac{b_1^2}{1-q^2} = 40{,}5. \end{cases}$$

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Для решения системы используем метод подстановки: выразим из первого уравнения переменную b_1. Получим: $b_1 = 9(1 - q)$. Подставим это выражение вместо b_1 во второе уравнение системы.

$$\frac{81(1-q)^2}{1-q^2} = 40{,}5.$$

Далее последовательно находим:

$$\frac{2(1-q)}{1+q} = 1; \quad 2 - 2q = 1 + q; \quad q = \frac{1}{3};$$

$$b_1 = 9(1-q) = 9\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 6.$$

Итак, $\begin{cases} b_1 = 6, \\ q = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Требуется найти b_5. Имеем: $b_5 = b_1 q^4 = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{2}{27}$.

Ответ: $b_5 = \frac{2}{27}$.

Пример 3. Представить в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную периодическую дробь: а) 0,(23); б) 1,4(23).

Решение. а) $0{,}(23) = 0{,}23\,23\,23\,23\ldots =$

$$= \frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \frac{23}{100^3} + \frac{23}{100^4} + \ldots .$$

Заметим, что фактически надо найти сумму S бесконечной геометрической прогрессии, у которой $b_1 = \frac{23}{100}$, $q = \frac{1}{100}$.

Имеем: $S = \dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{\frac{23}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \dfrac{23}{99}$.

Значит, $0,(23) = \frac{23}{99}$.

б) $1{,}4(23) = 1{,}4232323\ldots = 1 + \frac{4}{10} + \frac{23}{1000} + \frac{23}{100\,000} + \frac{23}{10\,000\,000} + \ldots = 1 + \frac{2}{5} + \frac{23}{1000}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \ldots\right) = 1 + \frac{2}{5} + \frac{23}{1000} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{1}{100}} = 1 + \frac{2}{5} + \frac{23}{990} = 1\frac{419}{990}$.

§ 26. Предел функции

1. Предел функции на бесконечности

Пусть дана функция $y = f(x)$, в области определения которой содержится луч $[a; +\infty)$, и пусть прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ (рис. 115). Для описания этой геометрической модели используют короткую запись:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

(читают: *предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к плюс бесконечности равен b*).

Если же дана функция $y = f(x)$, в области определения которой содержится луч $(-\infty; a]$, и прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ (рис. 116), то в этом случае используют запись:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

(читают: *предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к минус бесконечности равен b*).

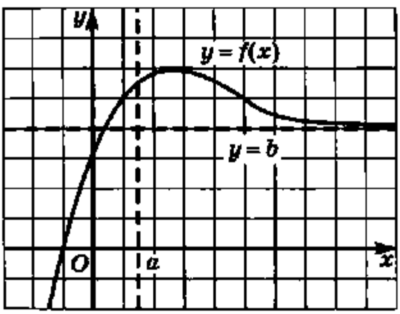


Рис. 115

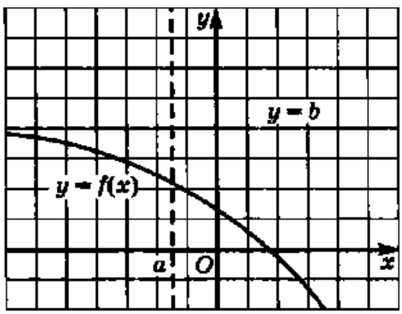


Рис. 116

Если одновременно выполняются соотношения:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \text{и} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad \text{(рис. 117), —}$$

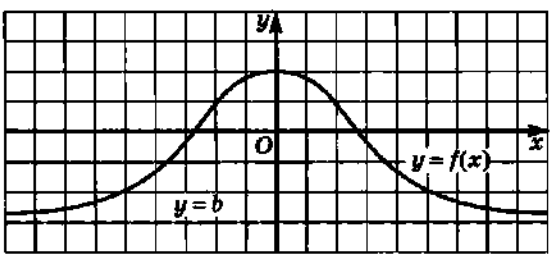


Рис. 117

то их можно объединить одной записью: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$. Но обычно используют более экономную запись:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

(читают: *предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к бесконечности равен b*).

Пример 1. Построить график функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) $y = f(x)$ — непрерывная функция;
3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$;
4) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$.

Решение. Нам нужно построить график непрерывной функции, определенной на $(-\infty; +\infty)$, у которой есть две горизонтальные асимптоты: $y = 0$ при $x \to -\infty$ и $y = 4$ при $x \to +\infty$. Один из возможных вариантов такого графика представлен на рисунке 118, другой — на рисунке 119.

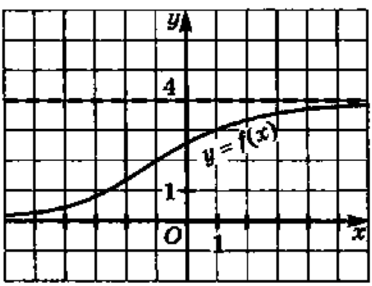


Рис. 118

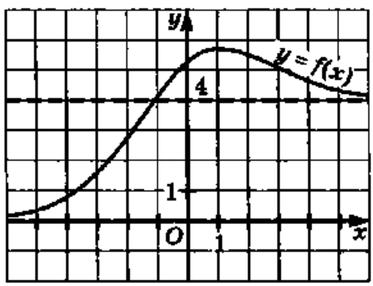


Рис. 119

Для вычисления предела функции на бесконечности используют несколько утверждений. Приведем их без доказательства.

1) ***Для любого натурального показателя m справедливо соотношение***

$$\boxed{\lim_{x \to \infty}\left(\frac{1}{x^m}\right) = 0.}$$

Это можно истолковать с геометрической точки зрения: график функции $y = \frac{1}{x^m}$ (рис. 120, 121) имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$.

2) *Если* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = c$, то

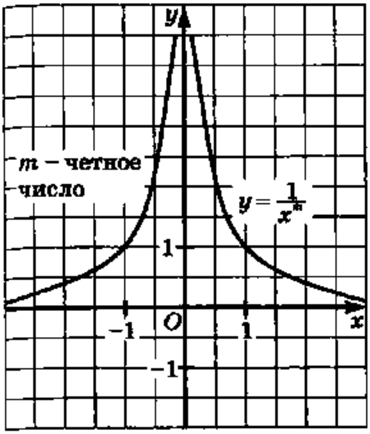


Рис. 120

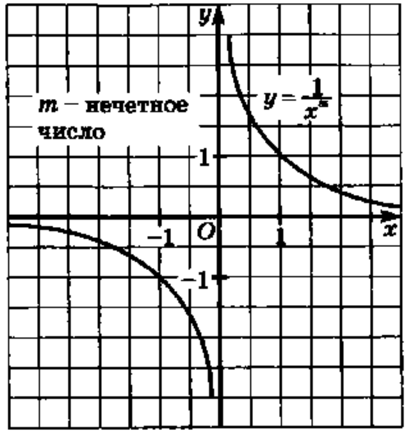


Рис. 121

а) ***предел суммы равен сумме пределов***:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)+g(x))=b+c;$$

б) ***предел произведения равен произведению пределов***:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)g(x)=bc;$$

в) ***предел частного равен частному пределов (разумеется, при условии, что $c\neq 0$)***:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b}{c};$$

г) ***постоянный множитель можно вынести за знак предела***:

$$\lim_{x\to\infty}kf(x)=kb.$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{x^2-4}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}.$$

Поскольку предел числителя равен $2+0=2$, а предел знаменателя равен $1-0=1$, то предел дроби равен $\frac{2}{1}=2$.

Ответ: 2.

2. Предел функции в точке

Рассмотрим функции, графики которых изображены на рисунках 122—124. Во всех трех случаях, казалось бы, изображена одна и та же кривая. Но разумеется, это три **разные функции**, они отличаются друг от друга своим поведением в точке $x = a$. Для функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 122, значение $f(a)$ не существует, функция в указанной точке не определена. Для функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 123, значение $f(a)$ существует, но оно «неудачное», так как отличается от, казалось бы, естественного значения b. Наконец, для функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 124, значение $f(a)$ существует, и оно «удачное»: $f(a) = b$. Итак, на рисунках 122—124 представлены графики трех различных функций. Если же точку $x = a$ исключить из рассмотрения, то функции совпадут: при $x < a$ и при $x > a$ графики одинаковы.

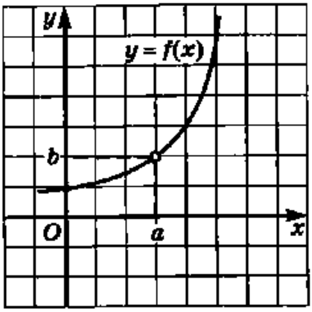


Рис. 122

Для всех трех случаев используется одна и та же запись:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

(читают: *предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен b*).

Содержательный смысл приведенной выше записи заключается в следующем: если значения аргумента выбирать все ближе и ближе к значению $x = a$, то соответствующие значения функции все меньше и меньше будут отличаться от предельного значения b. При этом, подчеркнем еще раз, *сама точка $x = a$ исключается из рассмотрения*.

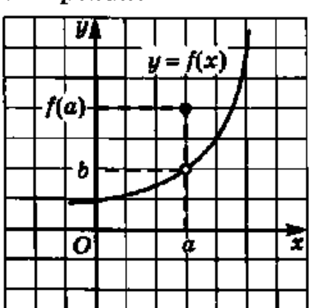


Рис. 123

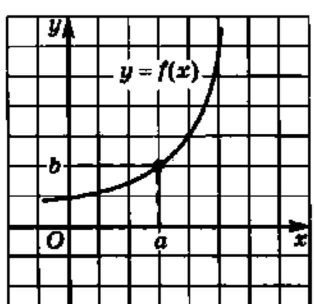


Рис. 124

Теперь ответьте на вопрос: какую из рассмотренных трех функций естественно считать непрерывной в точке $x = a$? Ответ очевиден: непрерывной естественно считать третью функцию (рис. 124), которая удовлетворяет условию $f(a) = b$, т. е.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

В каких случаях мы с вами до сих пор использовали понятие «непрерывная функция»? Мы говорили, что функция непрерывна, если видели, что ее график представляет собой сплошную линию. На самом деле график функции изображают в виде сплошной линии только тогда, когда установлена непрерывность функции.

Определение 1. Функцию $y = f(x)$ называют **непрерывной в точке $x = a$**, если выполняется соотношение

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a).}$$

Иными словами, функцию $y = f(x)$ называют *непрерывной в точке* $x = a$, если предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен значению функции в точке $x = a$.

Функцию $y = f(x)$ называют **непрерывной на промежутке X**, если она непрерывна в каждой точке промежутка.

В курсе алгебры 7—9-го классов мы отмечали, что функции $y = C$, $y = kx + m$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = |x|$, $y = x^n$, где n — натуральное число, непрерывны на всей числовой прямой. Отмечали также, что функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна на луче $[0; +\infty)$, а функция $y = x^{-n}$ (n — натуральное число) непрерывна на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, но претерпевает разрыв в точке $x = 0$. В главе 2, говоря о тригонометрических функциях, мы отмечали непрерывность функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ на всей числовой прямой, а также непрерывность функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ в каждом промежутке, принадлежащем области их определения. До сих пор мы опирались на наглядные представления и интуицию. В курсе высшей математики доказано, что все упомянутые утверждения верны, так что ими можно пользоваться, образно говоря, на законных основаниях.

Имеет место более сильное утверждение:

Если выражение $f(x)$ составлено из рациональных, иррациональных, тригонометрических выражений, то функция $y = f(x)$ непрерывна в любой точке, в которой определено выражение $f(x)$.

Рассмотрим несколько примеров на вычисление пределов функций.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x \to 1}(x^3 - 2x^2 + 5x + 3)$.

Решение. Выражение $x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ определено в любой точке x, в частности в точке $x = 1$. Следовательно, функция $y = x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ непрерывна в точке $x = 1$, а потому предел функции при стремлении x к 1 равен значению функции в точке $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1}(x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7.$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x+4}}$.

Решение. Выражение $f(x) = \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x+4}}$ определено в любой точке $x \geqslant 0$, в частности в точке $x = 2$. Следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = 2$, а потому предел функции при стремлении x к 2 равен значению функции в точке $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x+4}} = \frac{\sin 2\pi}{\sqrt{2+4}} = \frac{0}{\sqrt{2+4}} = 0.$$

Вы заметили, наверное, что в рассмотренных примерах вычисление пределов не вызвало затруднений: достаточно было найти значение функции в точке, к которой стремится аргумент x. Но бывают случаи, когда этот прием не срабатывает.

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12}$.

Решение. Если подставить значение $x = -3$ в заданное выражение, то и в числителе, и в знаменателе получится 0, а на 0 делить нельзя. Но заданную алгебраическую дробь можно сократить:

$$\frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \frac{(x-3)(x+3)}{4(x+3)} = \frac{x-3}{4}.$$

Значит, функции $y = \frac{x^2 - 9}{4x + 12}$ и $y = \frac{x-3}{4}$ совпадают при условии $x \neq -3$. Но напомним еще раз, что при вычислении предела функции при $x \to -3$ саму точку $x = -3$ исключают из рассмотрения. Значит,

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \lim_{x \to -3} \frac{x-3}{4}.$$

Осталось вычислить $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x-3}{4}$. Поскольку функция $y = \frac{x-3}{4}$ непрерывна в точке $x = -3$, получаем:

$$\lim_{x \to -3} \frac{x-3}{4} = \frac{-3-3}{4} = -1{,}5.$$

Для вычисления предела функции в точке, как и для вычисления предела последовательности и предела функции на бесконечности, используется теорема об арифметических операциях над пределами, которую мы приводим без доказательства.

Теорема. **Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, то:**

1) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = b + c$;

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = bc$;

3) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$ **(при условии, что $c \neq 0$);**

4) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = kb$.

Пример 6. Построить график функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 0$;

3) $f(-2) = 1$, $f(0) = 4$;

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$;

5) $f(x) < 0$ при $x < -2$.

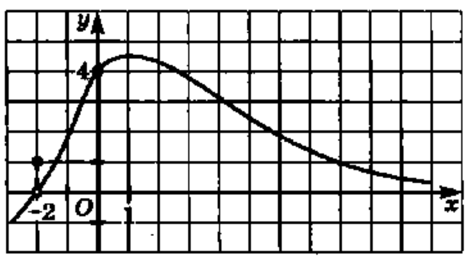


Рис. 125

Р е ш е н и е. Один из возможных вариантов представлен на рисунке 125.

3. Приращение аргумента. Приращение функции

Изучая поведение функции $y = f(x)$ около конкретной точки x_0, важно знать, как меняется значение функции при изменении значения аргумента. Для этого используют понятия приращений аргумента и функции.

Определение 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точках x_0 и x_1. Разность $x_1 - x_0$ называют **приращением аргумента** (при переходе от точки x_0 к x_1), а разность $f(x_1) - f(x_0)$ называют **приращением функции**.

Приращение аргумента обозначают Δx (читают: *дельта икс*; Δ — прописная буква греческого алфавита «дельта»; соответствующая строчная буква пишется так: δ). Приращение функции обозначают Δy или Δf.

Итак, $x_1 - x_0 = \Delta x$, значит, $x_1 = x_0 + \Delta x$.

$f(x_1) - f(x_0) = \Delta y$ (или Δf), значит,

$$\boxed{\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).}$$

Пример 7. Найти приращение функции $y = x^2$ при переходе от точки $x_0 = 1$ к точке:

а) $x = 1{,}1$; б) $x = 0{,}98$.

Решение. а) Введем обозначение: $f(x) = x^2$.

Имеем: $f(1) = 1^2 = 1$; $f(1{,}1) = 1{,}1^2 = 1{,}21$;

$$\Delta y = f(1{,}1) - f(1) = 1{,}21 - 1 = 0{,}21.$$

б) $f(1) = 1$; $f(0{,}98) = 0{,}98^2 = 0{,}9604$;

$$\Delta y = f(0{,}98) - f(1) = 0{,}9604 - 1 = -0{,}0396.$$

Обратите внимание на полученный ответ: приращение функции (как, впрочем, и приращение аргумента) может быть и положительным и отрицательным числом, так что не истолковывайте термин «приращение» как «прирост».

А теперь посмотрим на определение непрерывной функции с точки зрения приращений аргумента и функции. Определение непрерывности функции в точке $x = a$ выглядит так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Здесь $x \to a$, значит, $(x - a) \to 0$, т. е. $\Delta x \to 0$. При этом $f(x) \to f(a)$, значит, $(f(x) - f(a)) \to 0$, т. е. $\Delta y \to 0$.

Получаем новое истолкование понятия непрерывности функции в точке.

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, если в этой точке выполняется следующее условие:

если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$.

Выше мы отметили, что функцию называют непрерывной на промежутке X, если она непрерывна в каждой точке промежутка. Уточним, что означает непрерывность функции в концевой точке промежутка, например, как понимать непрерывность функции в точках a и b отрезка $[a; b]$. Для точки a данное выше определение непрерывности в терминах приращений будет выглядеть так: если $\Delta x \to 0$, $\Delta x > 0$, то $\Delta y \to 0$. Для точки b определение непрерывности в терминах приращений будет выглядеть так: если $\Delta x \to 0$, $\Delta x < 0$, то $\Delta y \to 0$. В частности, функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна не только в любой точке $x > 0$, но и в точке $x = 0$ (в указанном выше смысле). Поэтому функцию $y = \sqrt{x}$ считают непрерывной на всем луче $[0; +\infty)$.

Пример 8. Для функции $y = kx + m$ найти:

а) приращение функции при переходе от фиксированной точки x к точке $x + \Delta x$;

б) предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Решение. а) $f(x) = kx + m$;

$$f(x + \Delta x) = k(x + \Delta x) + m;$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (k(x + \Delta x) + m) - (kx + m) =$$
$$= (kx + k \cdot \Delta x + m) - (kx + m) = k \cdot \Delta x.$$

Итак, для заданной линейной функции $y = kx + m$ получили:

$$\Delta y = k \cdot \Delta x.$$

б) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{k \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k = k.$

Итак, для заданной линейной функции $y = kx + m$ получили:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k.$$

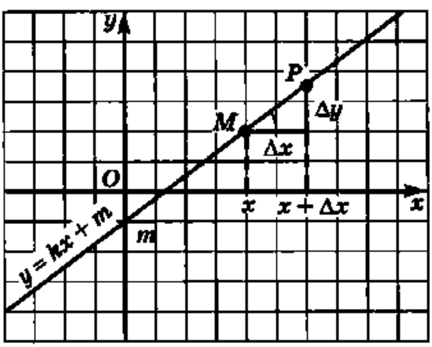


Рис. 126

На рисунке 126 изображен график линейной функции $y = kx + m$, отмечены приращения аргумента и функции при переходе от точки x к точке $x + \Delta x$. Видим, что $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ — тангенс угла между прямой $y = kx + m$ и положительным направлением оси x, т. е. угловой коэффициент прямой. Значит,

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$, что фактически и получено при решении примера 8, но с помощью формальных преобразований.

Пример 9. Для функции $y = x^2$ найти:

а) приращение функции при переходе от фиксированной точки x к точке $x + \Delta x$;

б) предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Решение. а) $f(x) = x^2$;

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2;$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 =$$
$$= (x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Итак, $\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$.

б) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$.

При вычислении последнего предела мы учли, что x — фиксированная точка, т. е. постоянное число, а Δx — переменная; отсюда и следует, что если $\Delta x \to 0$, то $(2x + \Delta x) \to 2x$.

Итак, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$.

§ 27. Определение производной

1. Задачи, приводящие к понятию производной

Часто бывает так, что, решая задачи, далекие друг от друга по содержанию, мы приходим к одной и той же математической модели. Сила математики состоит в том, что она разрабатывает способы оперирования той или иной математической моделью, которыми потом пользуются в различных областях знаний. Вы умеете работать со многими математическими моделями — уравнениями, неравенствами, системами уравнений и неравенств и др. В этом параграфе речь пойдет о принципиально новой для вас математической модели. Сначала рассмотрим две различные задачи, физическую и геометрическую, процесс решения которых как раз и приводит к возникновению новой математической модели.

Задача 1 (о скорости движения). По прямой, на которой заданы начало отсчета, единица измерения (метр) и направление, движется некоторое тело (материальная точка). Закон движения задан формулой $s = s(t)$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — положение тела на прямой (координата движущейся материальной точки) в момент времени t по отношению к началу отсчета. Найти скорость движения тела в момент времени t (в м/с).

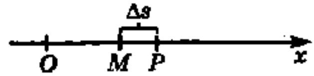


Рис. 127

Решение. Предположим, что в момент времени t тело находилось в точке M (рис. 127): $OM = s(t)$. Дадим аргументу t приращение Δt и рассмотрим ситуацию в момент времени $t + \Delta t$. Координата материальной точки стала другой, тело в этот момент будет находиться в точке P: $OP = s(t + \Delta t)$.

Значит, за Δt секунд тело переместилось из точки M в точку P. Имеем: $MP = OP - OM = s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s$. Итак, $MP = \Delta s$ (м), причем перемещение из точки M в точку P произошло за Δt секунд. Нетрудно найти среднюю скорость $v_{ср}$ движения тела за промежуток времени $[t; t + \Delta t]$:

$$v_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ (м/с)}.$$

А что такое скорость $v(t)$ в момент времени t (ее называют иногда *мгновенной скоростью*)? Можно сказать так: это предел средней скорости движения за промежуток времени $[t; t + \Delta t]$ при условии, что Δt выбирается все меньше и меньше; точнее: при условии, что $\Delta t \to 0$. Это значит, что $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{ср}$.

Подводя итог решению задачи 1, получаем:

$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.}$$

Прежде чем сформулировать вторую задачу и приступить к ее решению, выясним, что следует понимать под *касательной* к плоской кривой. Термином «касательная» мы уже пользовались (на интуитивном уровне) в курсе алгебры 7—9-го классов. Например, мы говорили, что парабола $y = x^2$ *касается* оси x в точке $x = 0$ или, что то же самое, ось x является *касательной* к параболе в точке $x = 0$ (рис. 128). И дело не в том, что ось x и парабола имеют только одну общую точку. Ведь ось y тоже имеет с параболой $y = x^2$ только одну общую точку, однако у вас не возникнет желания назвать ось y касательной к параболе. Обычно касательную определяют следующим образом.

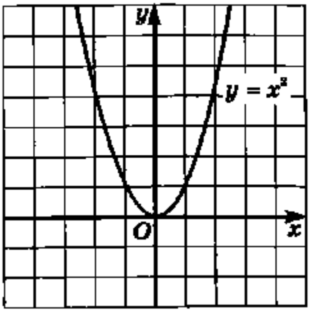


Рис. 128

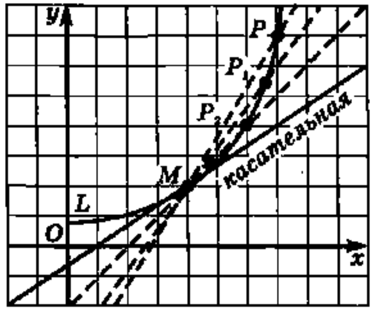


Рис. 129

Дана кривая L (рис. 129), на ней выбрана точка M. Возьмем еще одну точку на этой кривой — точку P. Проведем секущую MP. Далее будем приближать точку P по кривой L к точке M. Секущая MP будет изменять свое положение (MP, MP_1, MP_2 и т. д.), она как бы поворачивается вокруг точки M. Часто бывает так, что можно обнаружить в этом процессе прямую, представляющую собой некое предельное положение секущей; эту прямую — предельное положение секущей — называют **касательной к кривой L в точке M**.

Поставьте эксперимент: возьмите параболу $y = x^2$, проведите секущую OP, где O — вершина параболы, P — произвольная точка параболы. Возьмите точку P_1 поближе к O, проведите вторую секущую. Возьмите точку P_2 еще ближе к O, проведите третью секущую и т. д. Вы обнаружите, что предельным положением для построенных секущих будет ось x — это и есть касательная к параболе в ее вершине (что соответствует нашим интуитивным представлениям).

Задача 2 (*о касательной к графику функции*). Дан график функции $y = f(x)$. На нем выбрана точка $M(a; f(a))$, в этой точке к графику функции проведена касательная (мы предполагаем, что она существует). Найти угловой коэффициент касательной.

Решение. Дадим аргументу приращение Δx и рассмотрим на графике (рис. 130) точку P с абсциссой $a + \Delta x$. Ордината точки P равна $f(a + \Delta x)$. Угловой коэффициент секущей MP, т. е. тангенс угла между секущей и осью x, вычисляется по формуле $k_{\text{сек}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если мы теперь устремим Δx к нулю, то точка P начнет приближаться по кривой к точке M. Касательную мы охарактеризовали как предельное положение секущей при этом приближении. Значит, естественно считать, что угловой коэффициент касательной $k_{\text{кас}}$ будет вычисляться по формуле $k_{\text{кас}} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{\text{сек}}$.

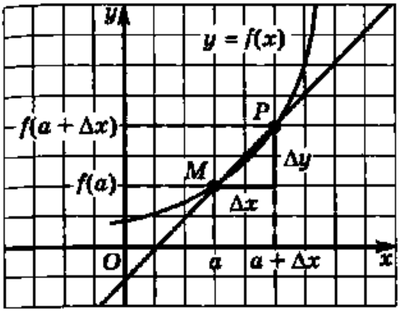


Рис. 130

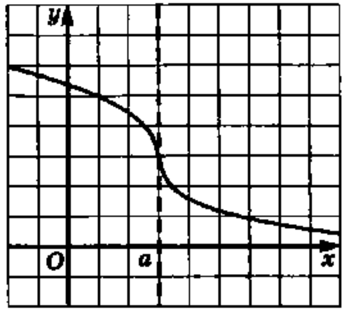


Рис. 131

Используя приведенную выше формулу для $k_{сек}$, получаем:

$$\boxed{k_{кас} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.}$$

Замечание. Приведенное решение неприменимо к случаю, когда касательная перпендикулярна оси абсцисс (см., например, рис. 131). Уравнение такой прямой имеет вид $x = a$, об угловом коэффициенте говорить в этом случае некорректно, поскольку он не существует.

Итак, две различные задачи привели к одной и той же математической модели — пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. Многие задачи физики, химии, экономики и т. д. приводят в процессе решения к такой же модели. Значит, эту математическую модель надо специально изучить, т. е.:

а) дать ее формальное определение и присвоить ей новый термин;

б) ввести для нее обозначение;

в) исследовать свойства новой модели.

Этим мы и займемся.

2. Определение производной

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале, содержащем внутри себя точку x_0. Дадим аргументу приращение Δx такое, чтобы не выйти из этого интервала. Найдем соответствующее приращение функции Δy (при переходе от точки x_0 к точке $x_0 + \Delta x$) и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют **производной функции $y = f(x)$ в точке x_0** и обозначают $f'(x_0)$.

Итак,

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).}$$

Для обозначения производной часто используют символ y'.

Отметим, что $y' = f'(x)$ — это новая функция, но, естественно, связанная с функцией $y = f(x)$, определенная во всех точках x, в которых существует указанный выше предел. Эту функцию называют так: **производная функции $y = f(x)$**.

В примере 8 § 26 мы доказали, что для линейной функции $y = kx + m$ справедливо равенство $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$. Это означает, что $y' = k$, или, подробнее,

$$\boxed{(kx + m)' = k.}$$

В частности,

$$\boxed{(x)' = 1.}$$

В примере 9 § 26 мы доказали, что для функции $y = x^2$ справедливо равенство $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$. Это означает, что $y' = 2x$, или, подробнее,

$$\boxed{(x^2)' = 2x.}$$

Рассмотренные в пункте 1 задачи 1 и 2 позволяют истолковать производную с физической и геометрической точек зрения.

Физический (механический) смысл производной состоит в следующем. Если $s = s(t)$ — закон прямолинейного движения тела, то производная выражает *мгновенную скорость* в момент времени t:

$$\boxed{v(t) = s'(t).}$$

На практике во многих отраслях науки используется обобщение полученного равенства: если некоторый процесс протекает по закону $s = s(t)$, то производная $s'(t)$ выражает скорость протекания процесса в момент времени t.

Геометрический смысл производной состоит в следующем. Если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси y, то $f'(a)$ выражает угловой коэффициент касательной:

$$\boxed{k = f'(a).}$$

Поскольку $k = \operatorname{tg}\alpha$, то верно равенство $f'(a) = \operatorname{tg}\alpha$ (рис. 132).

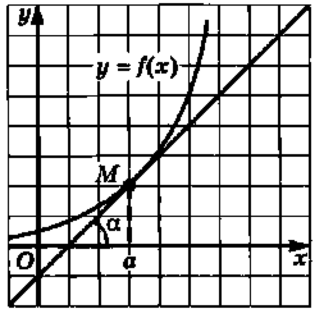


Рис. 132

А теперь истолкуем определение производной с точки зрения приближенных равенств. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в конкретной точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Это означает, что около точки x выполняется приближенное равенство $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$, т. е. $\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$.

Содержательный смысл полученного приближенного равенства заключается в следующем: приращение функции «почти пропорционально» приращению аргумента, причем коэффициентом пропорциональности является значение производной в заданной точке x. Например, для функции $y = x^2$ справедливо приближенное равенство $\Delta y \approx 2x \cdot \Delta x$.

Если внимательно проанализировать определение производной, то мы обнаружим, что в нем заложен алгоритм ее нахождения. Сформулируем его.

Алгоритм нахождения производной функции $y = f(x)$

1. Зафиксировать значение x, найти $f(x)$.
2. Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
4. Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
5. Вычислить $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

   Этот предел и есть $f'(x)$.

Пример 1. Найти производную постоянной функции $y = C$.

Решение. Здесь $f(x) = C$. Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Для фиксированного значения x имеем: $f(x) = C$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $f(x + \Delta x) = C$.

3) $\Delta y = C - C = 0$.

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$.

Ответ: $(C)' = 0$.

Пример 2. Найти производную функции $y = \dfrac{1}{x}$.

Решение. Здесь $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Для фиксированного значения x (разумеется, мы полагаем, что $x \neq 0$) имеем: $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $f(x + \Delta x) = \dfrac{1}{x + \Delta x}$ (при этом предполагаем, что x и $x + \Delta x$ — числа одного знака, чтобы в промежутке между x и $x + \Delta x$ не оказалась точка 0).

3) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \dfrac{1}{x + \Delta x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} = \dfrac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}$.

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)\Delta x} = \dfrac{-1}{x(x + \Delta x)}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\dfrac{1}{x^2}$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то ее называют *дифференцируемой в точке* x. Процедуру нахождения производной функции $y = f(x)$ называют *дифференцированием функции* $y = f(x)$.

Обсудим такой вопрос: как связаны между собой непрерывность и дифференцируемость функции в точке.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда к графику функции в точке $M(x; f(x))$ можно провести касательную, причем, напомним, угловой коэффициент касательной равен $f'(x)$. Такой график не может «разрываться» в точке M, т. е. функция обязана быть непрерывной в точке x.

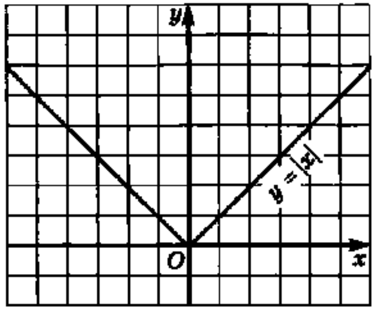


Рис. 133

Это были рассуждения «на пальцах». Приведем более строгое рассуждение. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то выполняется приближенное равенство $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$. Если в этом равенстве Δx устремить к нулю, то и Δy будет стремиться к нулю, а это и есть условие непрерывности функции в точке (см. пункт 3 в § 26).

Итак, *если функция дифференцируема в точке x, то она и непрерывна в этой точке.*

Обратное утверждение неверно. Например: функция $y = |x|$ непрерывна везде, в частности в точке $x = 0$ (рис. 133), но касательная к графику функции в «точке стыка» (0; 0) не существует. Если в некоторой точке к графику функции нельзя провести касательную, то в этой точке не существует производная.

Еще один пример. На рисунке 134 изображен график функции $y = \sqrt[3]{x}$. Эта функция непрерывна на всей числовой прямой, в том числе в точке $x = 0$. И касательная к графику функции существует в любой точке, в том числе в точке $x = 0$. Но в этой точке касательная совпадает с осью y, т. е. перпендикулярна оси абсцисс, ее уравнение имеет вид $x = 0$. Углового коэффициента у такой прямой нет, значит, не существует и $f'(0)$.

Итак, мы познакомились с новым свойством функции — дифференцируемостью. А как по графику функции можно сделать вывод о ее дифференцируемости?

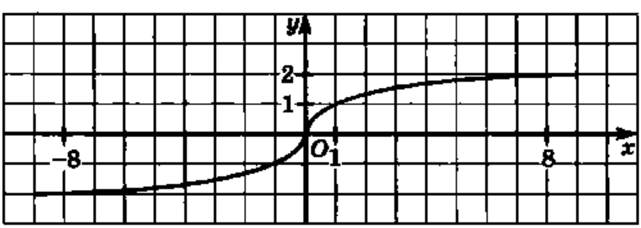


Рис. 134

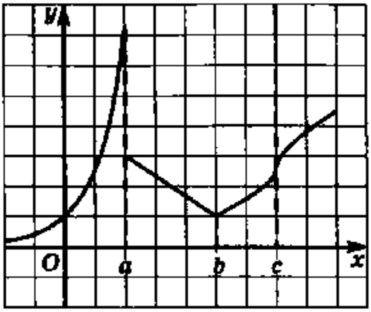


Рис. 135

Ответ фактически получен выше. Если в некоторой точке к графику функции можно провести касательную, не перпендикулярную оси абсцисс, то в этой точке функция дифференцируема. Если в некоторой точке касательная к графику функции не существует или она перпендикулярна оси абсцисс, то в этой точке функция недифференцируема. Так, по графику функции, изображенному на рисунке 135, можно сделать вывод: функция непрерывна всюду, кроме точки $x = a$; функция дифференцируема всюду, кроме точек $x = a$, $x = b$, $x = c$; в первых двух точках касательная не существует, а в третьей точке касательная параллельна оси y.

Если же говорить о непрерывности функции не в локальном смысле (в точке), а в глобальном (на множестве), то делаем такой вывод: функция непрерывна на открытом луче $(-\infty; a)$ и на луче $[a; +\infty)$, хотя подчеркнем еще раз, в самой точке $x = a$ она не является непрерывной.

§ 28. Вычисление производных

1. Формулы дифференцирования

Формулами дифференцирования обычно называют формулы для нахождения производных конкретных функций, например:

$$\boxed{\begin{gathered} C' = 0; \\ x' = 1; \\ (kx + m)' = k; \\ (x^2)' = 2x; \\ \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}. \end{gathered}}$$

Вы, конечно, узнали эти формулы — они были получены в § 27.

Список формул дифференцирования будет постепенно пополняться. Вот еще три формулы (первую из них мы докажем в конце пункта 1, а вторую и третью приведем без доказательства):

$$\boxed{\begin{gathered} \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \\ (\sin x)' = \cos x; \\ (\cos x)' = -\sin x. \end{gathered}}$$

Пример 1. Найти значение производной данной функции в данной точке:

а) $y = 3x + 5$, $x = 4$; г) $y = \sqrt{x}$, $x = 4$;

б) $y = x^2$, $x = -1$; д) $y = \sin x$, $x = 0$;

в) $y = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{2}$; е) $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{6}$.

Решение. а) Пусть $f(x) = 3x + 5$. Имеем: $(3x + 5)' = 3$; значит, производная равна 3 в любой точке x, в частности в заданной точке $x = 4$. Это можно записать так: $f'(4) = 3$.

б) Пусть $f(x) = x^2$. Имеем: $(x^2)' = 2x$; значит, $f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$.

в) Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$. Имеем: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; значит, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4$.

г) Пусть $f(x) = \sqrt{x}$. Имеем: $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; значит, $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

д) Пусть $f(x) = \sin x$. Имеем: $(\sin x)' = \cos x$; значит, $f'(0) = \cos 0 = 1$.

е) Пусть $f(x) = \cos x$. Имеем: $(\cos x)' = -\sin x$; значит, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

Когда в § 10 мы строили график функции $y = \sin x$, то обратили внимание на следующее обстоятельство: синусоида выходит из начала координат как бы под углом 45° (рис. 136). В то время мы не могли дать объяснения этому факту. Теперь «момент истины» наступил. Мы только что видели, что для функции $y = \sin x$ выполняется равенство $f'(0) = 1$. $f'(0)$ в данном случае — это угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке $x = 0$.

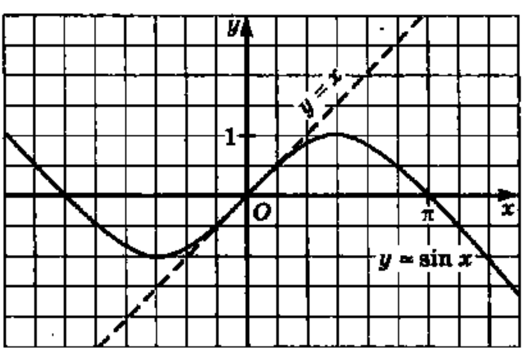


Рис. 136

Если угловой коэффициент прямой равен 1, то прямая образует с положительным направлением оси x угол 45°. Это обстоятельство и учитывается при построении графика функции $y = \sin x$.

Пример 2. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $x = 1$.

Решение. Пусть $f(x) = x^2$. Уравнение касательной, как уравнение всякой прямой, имеет вид $y = kx + m$. Найдем сначала k — это угловой коэффициент касательной, который равен $f'(1)$; здесь $f(x) = x^2$.

Имеем $(x^2)' = 2x$, значит, $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$. Итак, $k = 2$, т. е. уравнение касательной надо искать в виде $y = 2x + m$.

Осталось найти значение коэффициента m. Для этого воспользуемся тем, что касательная проходит через точку на параболе $y = x^2$ с абсциссой $x = 1$, т. е. через точку (1; 1). Подставим $x = 1$, $y = 1$ в уравнение $y = 2x + m$:

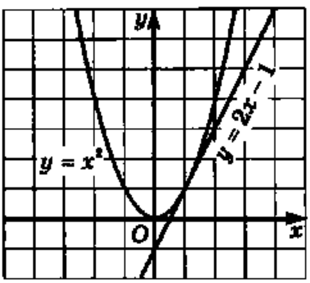


Рис. 137

$$1 = 2 \cdot 1 + m,$$
$$m = -1.$$

Итак, уравнение касательной имеет вид $y = 2x - 1$. На рисунке 137 изображена парабола $y = x^2$ и построена прямая $y = 2x - 1$; чертеж иллюстрирует тот факт, что эта прямая касается параболы в точке (1; 1).

Ответ: $y = 2x - 1$.

Теперь, как было обещано в начале параграфа, выведем формулу дифференцирования функции $y = \sqrt{x}$. Воспользуемся алгоритмом из § 27, полагая, что $f(x) = \sqrt{x}$.

1) Для фиксированного значения x (разумеется, мы берем $x > 0$) имеем: $f(x) = \sqrt{x}$;

2) $f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$;

3) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$;

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$. Здесь полезно применить искусственный прием: домножить числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$. Что это даст? В числителе мы получим «разность квадратов»: $\left(\sqrt{x + \Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2$, т. е. $(x + \Delta x) - x$, или Δx; сама дробь примет вид $\dfrac{\Delta x}{\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right) \cdot \Delta x}$, т. е. $\dfrac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$.

Итак, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$;

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Таким образом $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

В процессе рассуждений мы воспользовались тем, что если $\Delta x \to 0$, то $x + \Delta x \to x$ и $\sqrt{x+\Delta x} \to \sqrt{x}$.

2. Правила дифференцирования

Здесь речь пойдет о нахождении производных суммы, произведения, частного функций.

Теорема 1. **Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, то и их сумма имеет производную в точке x, причем производная суммы равна сумме производных:**

$$\boxed{(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).}$$

На практике эту теорему формулируют в виде следующего правила: *производная суммы равна сумме производных*. При этом речь может идти о дифференцировании суммы любого числа функций.

Например, $(x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$.

Теорема 2. **Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то и функция $y = kf(x)$ имеет производную в точке x, причем**

$$\boxed{(kf(x))' = kf'(x).}$$

На практике эту теорему формулируют в виде следующего правила: *постоянный множитель можно вынести за знак производной*.

Например,

$$(5x^2)' = 5(x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x;$$

$$\left(-\frac{\cos x}{3}\right)' = -\frac{1}{3}(\cos x)' = -\frac{1}{3}(-\sin x) = \frac{1}{3}\sin x.$$

Теорема 3. **Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, то и их произведение имеет производную в точке x, причем**

$$\boxed{(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).}$$

На практике эту теорему формулируют в виде следующего правила: *производная произведения двух функций равна сумме двух слагаемых; первое слагаемое есть произведение производной первой функции на вторую функцию, а второе слагаемое есть произведение первой функции на производную второй функции.*

Например,

$$((2x + 3)\sin x)' = (2x + 3)'\sin x + (2x + 3)(\sin x)' =$$
$$= 2\sin x + (2x + 3)\cos x.$$

Теорема 4. **Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x и в этой точке $g(x) \neq 0$, то функция $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ имеет производную в точке x, причем**

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.}$$

Например,

$$\left(\frac{x^2}{5 - 4x}\right)' = \frac{(x^2)' \cdot (5 - 4x) - x^2(5 - 4x)'}{(5 - 4x)^2} =$$
$$= \frac{2x(5 - 4x) - x^2(-4)}{(5 - 4x)^2} = \frac{10x - 4x^2}{(5 - 4x)^2}.$$

Дальнейший план изложения материала в этом пункте будет таким. Сначала мы выведем первые два правила дифференцирования — это сравнительно нетрудно. Затем рассмотрим ряд примеров на использование правил и формул дифференцирования, чтобы вы к ним привыкли. В самом конце пункта мы приведем доказательство третьего правила дифференцирования — для тех, кому это интересно.

Доказательство теоремы 1.

Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Введем обозначение: $f(x) + g(x) = h(x)$. Для фиксированного значения x имеем: $h(x) = f(x) + g(x)$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $h(x + \Delta x) = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)$.

3) $\Delta y = h(x + \Delta x) - h(x) = (f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)) - (f(x) + g(x)) = (f(x + \Delta x) - f(x)) + (g(x + \Delta x) - g(x)) = \Delta f + \Delta g$.

Итак, $\Delta y = \Delta f + \Delta g$.

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x) + g'(x)$.

Итак,

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$ ●

Доказательство теоремы 2.

Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Введем обозначение: $kf(x) = h(x)$. Для фиксированного значения x имеем: $h(x) = kf(x)$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $h(x + \Delta x) = kf(x + \Delta x)$.

3) $\Delta y = h(x + \Delta x) - h(x) = kf(x + \Delta x) - kf(x) = k(f(x + \Delta x) - f(x)) = k\Delta f$.

Итак, $\Delta y = k\Delta f$.

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{k\Delta f}{\Delta x} = k\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = k \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = kf'(x)$.

Итак,

$$(kf(x))' = kf'(x).$$ ●

Пример 3. Найти производную функции $y = 3x^2 - 4x + 2$.

Решение. $y' = (3x^2 - 4x + 2)' = (3x^2)' + (-4x + 2)' =$

$$= 3(x^2)' + (-4) = 3 \cdot 2x - 4 = 6x - 4.$$

Мы воспользовались первым и вторым правилами, а также формулами дифференцирования линейной функции $y = -4x + 2$ и функции $y = x^2$.

Ответ: $y' = 6x - 4$.

Пример 4. Найти производную функции:

а) $y = x^3$; б) $y = x^4$; в) $y = x^5$.

Решение. а) Представим x^3 в виде $x^2 \cdot x$ и применим правило дифференцирования произведения:

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot (x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

Итак, $(x^3)' = 3x^2$.

б) Представим x^4 в виде $x^3 \cdot x$ и применим правило дифференцирования произведения:

$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot (x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3.$$

Итак, $(x^4)' = 4x^3$.

в) Представим x^5 в виде $x^4 \cdot x$ и применим правило дифференцирования произведения:

$$(x^5)' = (x^4 \cdot x)' = (x^4)' \cdot x + x^4 \cdot (x)' = 4x^3 \cdot x + x^4 \cdot 1 = 5x^4.$$

Итак, $(x^5)' = 5x^4$.

Ответ: а) $(x^3)' = 3x^2$; б) $(x^4)' = 4x^3$; в) $(x^5)' = 5x^4$.

Теперь сравним пять формул: две формулы, которые мы знали раньше, и те три формулы, которые вывели в примере 4:

$$x' = 1;$$
$$(x^2)' = 2x;$$
$$(x^3)' = 3x^2;$$
$$(x^4)' = 4x^3;$$
$$(x^5)' = 5x^4.$$

Возникает естественная гипотеза: для любого натурального показателя n справедлива формула дифференцирования

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}.} \qquad (1)$$

«Естественная гипотеза» — это стилистический оборот из области интуиции. Интуиция хороша для открытия новых фактов, но не для их обоснования. Формулу (1) мы «прочувствовали», но строго не обосновали. Приведем (для интересующихся) строгое доказательство.

Мы знаем, что $x' = 1$. Эту формулу можно переписать так: $(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1}$. Значит, формула (1) верна для $n = 1$.

Предположим, что формула (1) верна для натурального числа $n = k$, т. е. предположим, что верно равенство $(x^k)' = kx^{k-1}$. Докажем, что тогда формула (1) верна и для следующего натурального числа $n = k + 1$, т. е. докажем, что $(x^{k+1})' = (k + 1)x^k$.

В самом деле,

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot (x)' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k + 1)x^k.$$

Итак, для $n = 1$ формула (1) верна — мы это проверили. Далее мы доказали, что если формула (1) верна для $n = k$, то она верна и для $n = k + 1$. Воспользуемся этим: формула (1) верна для $n = 1$, значит, она верна и для следующего числа $n = 2$; так как она верна для $n = 2$, то она верна и для следующего числа $n = 3$ и т. д. Значит, формула (1) верна для любого натурального числа n.

Использованный здесь метод рассуждений носит в математике название *метод математической индукции*.

Пример 5. Найти точки, в которых касательная к графику функции $y = x^3 - 3x + 2$ параллельна оси x.

Решение. $y' = (x^3 - 3x + 2)' = 3x^2 - 3$.

Если касательная параллельна оси x, то ее угловой коэффициент равен нулю. Но, с другой стороны, угловой коэффициент касательной равен значению производной в абсциссе точки касания. Значит, нужно найти точки, в которых производная, т. е. $3x^2 - 3$, обращается в нуль. Из уравнения $3x^2 - 3 = 0$ находим: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Так как $y = x^3 - 3x + 2$, то находим соответственно:

$$y_1 = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0;$$
$$y_2 = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = 4.$$

Итак, касательная, проведенная к графику функции $y = x^3 - 3x + 2$ в точке (1; 0) или в точке (−1; 4), будет параллельна оси x (в точке (1; 0) она даже совпадает с осью x). На рисунке 138 дана геометрическая иллюстрация полученного результата — построен график функции $y = x^3 - 3x + 2$. При этом мы учли, что $y = 2$ при $x = 0$ и что $y = 0$ при $x = -2$, т. е. график пересекает ось абсцисс в точке $x = -2$. ◁

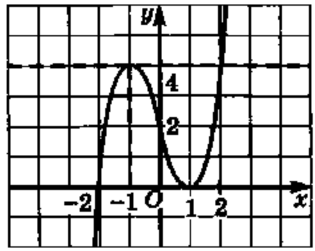


Рис. 138

Пример 6. Найти производную функции:
а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{ctg} x$.

Решение. а) Воспользуемся тем, что $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, и правилом дифференцирования частного (теорема 4). Получим:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак, мы вывели еще одну формулу дифференцирования:

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.}$$

Понятно, что эта формула справедлива лишь при допустимых значениях x, т. е. при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) Рассуждая аналогично (советуем провести соответствующие рассуждения), получим:

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.}$$ ◁

Завершая этот пункт, выведем правило дифференцирования произведения, т. е. функции $y = f(x)\,g(x)$.

Доказательство теоремы 3.

Воспользуемся алгоритмом нахождения производной, а также тем, что равенство $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f$ можно записать в виде $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f$.

1) Введем обозначение: $f(x)g(x) = h(x)$. Для фиксированного значения x имеем: $h(x) = f(x)g(x)$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем:

$$h(x + \Delta x) = f(x + \Delta x)\, g(x + \Delta x) = (f(x) + \Delta f)\,(g(x) + \Delta g) =$$
$$= f(x)\, g(x) + \Delta f\, g(x) + f(x)\, \Delta g + \Delta f \Delta g.$$

3) $\Delta y = h(x + \Delta x) - h(x) = (f(x)\, g(x) + \Delta f\, g(x) + f(x)\, \Delta g + \Delta f \Delta g) -$
$- f(x)\, g(x) = \Delta f\, g(x) + f(x)\, \Delta g + \Delta f \Delta g.$

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f g(x) + f(x)\Delta g + \Delta f \Delta g}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} g(x) + \frac{\Delta g}{\Delta x} f(x) + \frac{\Delta f}{\Delta x}\frac{\Delta g}{\Delta x}\Delta x.$

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} g(x) + \frac{\Delta g}{\Delta x} f(x) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x}\Delta x\right) =$

$= f'(x)\, g(x) + g'(x)\, f(x) + f'(x)\, g'(x) \cdot 0 = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x).$

Итак,

$$(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x).$$ ●

3. Дифференцирование функции $y = f(kx + m)$

Мы знаем, чему равны производные функций $y = x^n$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \sqrt{x}$. Нередко на практике приходится находить производные функций $y = \sin 2x$, $y = \cos\left(3 - \frac{x}{2}\right)$ и т. д. Возникает вопрос: если мы знаем, чему равна производная функции $y = f(x)$, то как вычислить производную функции $y = f(kx + m)$?

С функцией $y = \sin 2x$ можно поступить так. Известно, что $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Тогда

$$(\sin 2x)' = (2 \sin x \cos x)' = 2\,((\sin x)' \cos x + \sin x\,(\cos x)') =$$
$$= 2\,(\cos x \cos x + \sin x\,(-\sin x)) = 2\,(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cos 2x.$$

Итак, воспользовавшись правилом дифференцирования произведения и правилом вынесения постоянного множителя за знак производной, а также формулами синуса и косинуса двойного аргумента, мы доказали, что

$$(\sin 2x)' = 2 \cos 2x.$$

А как быть с производной функции $y = \sin 3x$ или $y = \cos 4x$? Неужели каждый раз придется применять соответствующие формулы тригонометрии? Не придется. Обратим внимание на выведенную формулу. Чем она отличается от формулы дифференцирования функции $y = \sin x$? Только тем, что появился дополнительный множитель 2, а в роли аргумента выступает $2x$. Точно так же будет обстоять дело и в других аналогичных случаях: используется известная формула дифференцирования и появляется дополнительный множитель, равный коэффициенту при x. Например, справедливы следующие формулы:

$$(\cos 4x)' = 4 \cdot (-\sin 4x);$$
$$(\sin 3x)' = 3 \cdot \cos 3x;$$

$$\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}};$$

$$((2x+1)^5)' = 2\cdot 5(2x+1)^4 = 10(2x+1)^4.$$

Вообще справедливо следующее утверждение (приведем его без доказательства):

Теорема 5. **Производная функции $y = f(kx + m)$ вычисляется по формуле**

$$\boxed{(f(kx+m))' = kf'(kx+m).}$$

Пример 7. Найти значение производной функции $y = f(x)$, где $f(x) = \sqrt{7 - 2{,}16x}$, в точке $x = 1$.

Решение. Сначала найдем производную в произвольной точке x. Известно, что $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. По этой формуле найдем интересующую нас производную, но при этом учтем два обстоятельства:

1) под знаком корня напишем не x, а $7 - 2{,}16x$;

2) укажем дополнительный множитель, равный $(-2{,}16)$ — это коэффициент при x. Таким образом,

$$\left(\sqrt{7-2{,}16x}\right)' = -2{,}16\cdot\frac{1}{2\sqrt{7-2{,}16x}}.$$

Чтобы вычислить $f'(1)$, в полученное выражение подставим $x = 1$:

$$f'(1) = -2{,}16\cdot\frac{1}{2\sqrt{7-2{,}16}} = -2{,}16\cdot\frac{1}{2\sqrt{4{,}84}} = -\frac{2{,}16}{4{,}4} = -\frac{27}{55}.$$

Ответ: $f'(1) = -\frac{27}{55}$.

§ 29. Уравнение касательной к графику функции

В § 27 говорилось о том, что если точка $M(a; f(a))$ принадлежит графику функции $y = f(x)$ и если в этой точке к графику функции можно провести касательную, не перпендикулярную оси абсцисс, то угловой коэффициент касательной равен $f'(a)$. Мы этим уже несколько раз пользовались. Например, в § 27 было установлено, что график функции $y = \sin x$ (синусоида) в начале координат образует с осью абсцисс угол 45° (точнее, касательная к графику в начале координат составляет с положительным направлением оси x угол 45°), а в примере 5 § 27 были найдены точки на графике заданной функции, в которых касательная параллельна оси абсцисс. В примере 2 § 28 было составлено уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $x = 1$ (точнее, в точке (1; 1), но чаще указывают только значение абсциссы, полагая, что если значение абсциссы известно, то значение ординаты можно найти из уравнения $y = f(x)$). В этом параграфе мы выработаем алгоритм составления уравнения касательной к графику любой функции.

Пусть даны функция $y = f(x)$ и точка $M(a; f(a))$ на графике этой функции; пусть известно, что существует $f'(a)$. Составим уравнение касательной к графику заданной функции в заданной точке. Это уравнение, как уравнение любой прямой, не параллельной оси ординат, имеет вид $y = kx + m$, поэтому задача состоит в нахождении значений коэффициентов k и m.

С угловым коэффициентом k проблем нет: известно, что $k = f'(a)$. Для вычисления значения m воспользуемся тем, что искомая прямая проходит через точку $M(a; f(a))$. Это значит, что если подставить координаты точки M в уравнение прямой, получим верное равенство: $f(a) = ka + m$, т. е. $m = f(a) - ka$.

Осталось подставить найденные значения коэффициентов k и m в уравнение прямой:

$$y = kx + m;$$
$$y = kx + (f(a) - ka);$$
$$y = f(a) + k(x - a);$$

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a).} \qquad (1)$$

Нами получено *уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$.*

Например, если $f(x) = x^2$ и $x = 1$ (т. е. $a = 1$), то $f(a) = f(1) = 1^2 = 1$; $f'(x) = 2x$, значит, $f'(a) = f'(1) = 2$.

Подставив в уравнение (1) найденные значения $a = 1$, $f(a) = 1$, $f'(a) = 2$, получим: $y = 1 + 2(x - 1)$, т. е. $y = 2x - 1$.

Сравним этот результат с тем, что был получен в примере 2 § 28. Естественно, получилось то же самое.

Составим уравнение касательной к графику функции $y = \operatorname{tg} x$ в начале координат; здесь $f(x) = \operatorname{tg} x$. Имеем: $a = 0$, $f(0) = \operatorname{tg} 0 = 0$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, значит, $f'(0) = 1$. Подставив в уравнение (1) найденные значения $a = 0$, $f(a) = 0$, $f'(a) = 1$, получим: $y = x$.

Именно поэтому мы и провели тангенсоиду в § 14 (см. рис. 94) через начало координат под углом 45° к оси абсцисс.

Решая эти достаточно простые примеры, мы фактически пользовались определенным алгоритмом, который заложен в формуле (1). Сделаем этот алгоритм явным.

Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$

1. Обозначить абсциссу точки касания буквой a.
2. Вычислить $f(a)$.
3. Найти $f'(x)$ и вычислить $f'(a)$.
4. Подставить найденные числа a, $f(a)$, $f'(a)$ в формулу (1).

Пример 1. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{x}$ в точке $x = 1$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом, учитывая, что в данном примере $f(x) = \frac{1}{x}$.

1) $a = 1$.
2) $f(a) = f(1) = 1$.
3) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; $f'(a) = f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$.

4) Подставим найденные числа $a = 1$, $f(a) = 1$, $f'(a) = -1$ в формулу (1). Получим:

$y = 1 - (x - 1)$, т. е. $y = 2 - x$.

На рисунке 139 изображена гипербола $y = \frac{1}{x}$, построена прямая $y = 2 - x$. Чертеж иллюстрирует приведенные выкладки: прямая $y = 2 - x$ касается гиперболы в точке (1; 1).

Ответ: $y = 2 - x$.

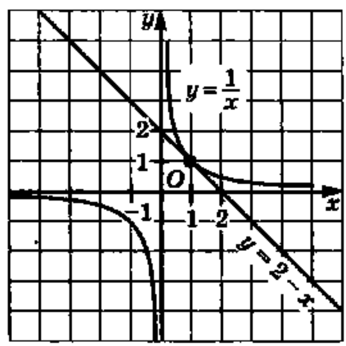


Рис. 139

Пример 2. К графику функции $y = \frac{x^3}{3}$ провести касательную так, чтобы она была параллельна прямой $y = 4x - 5$.

Решение. Уточним формулировку задачи. Требование «провести касательную» обычно означает «составить уравнение касательной». Это логично, ведь если составлено уравнение касательной, то не должно быть затруднений с построением на координатной плоскости прямой по ее уравнению.

Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной, учитывая, что в данном примере $f(x) = \frac{x^3}{3}$. Но, в отличие от предыдущего примера, здесь пока имеется неясность: не указана явно абсцисса точки касания.

Начнем рассуждать так. Искомая касательная должна быть параллельна прямой $y = 4x - 5$. Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда равны их угловые коэффициенты. Значит, угловой коэффициент касательной должен быть равен угловому коэффициенту заданной прямой: $k_{\text{кас}} = 4$. Но $k_{\text{кас}} = f'(a)$. Таким образом, значение a мы можем найти из уравнения $f'(a) = 4$.

Имеем: $f'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$; $f'(a) = a^2$.

Из уравнения $f'(a) = 4$, т. е. $a^2 = 4$, находим: $a_1 = 2$, $a_2 = -2$. Значит, имеются две касательные, удовлетворяющие условию задачи: одна в точке с абсциссой 2, другая в точке с абсциссой -2.

Теперь можно действовать по алгоритму.

1) $a_1 = 2$, $a_2 = -2$.

2) $f(a_1) = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$, $f(a_2) = \frac{(-2)^3}{3} = -\frac{8}{3}$.

3) $f'(a_1) = f'(a_2) = 4$.

4) Подставив значения $a_1 = 2$, $f(a_1) = \frac{8}{3}$, $f'(a_1) = 4$ в формулу (1), получим: $y = \frac{8}{3} + 4(x - 2)$, т. е. $y = 4x - \frac{16}{3}$.

Подставив значения $a_2 = -2$, $f(a_2) = -\frac{8}{3}$, $f'(a_2) = 4$ в формулу (1), получим: $y = -\frac{8}{3} + 4(x + 2)$, т. е. $y = 4x + \frac{16}{3}$.

Ответ: $y = 4x - \frac{16}{3}$; $y = 4x + \frac{16}{3}$.

В § 27 мы отметили, что для функции $y = f(x)$, имеющей производную в фиксированной точке x, справедливо приближенное равенство

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x,$$

или, подробнее,

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

Для удобства дальнейших рассуждений изменим обозначения: вместо x будем писать a, вместо $x + \Delta x$ будем писать x и, соответственно, вместо Δx будем писать $x - a$. Тогда написанное выше приближенное равенство примет вид

$$f(x) - f(a) \approx f'(a)(x - a),$$

или

$$\boxed{f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).} \qquad (2)$$

А теперь рассмотрим рисунок 140. К графику функции $y = f(x)$ проведена касательная в точке $M(a;\ f(a))$. Отмечена точка x на оси абсцисс близко от a. Ясно, что $f(x)$ — ордината графика функции в указанной точке x. А что такое $f(a) + f'(a)(x - a)$? Это ордината касательной, соответствующая той же точке x — см. формулу (1). В чем же смысл приближенного равенства (2)? В том, что в качестве приближенного значения функции в точке x берут значение ординаты касательной в той же точке.

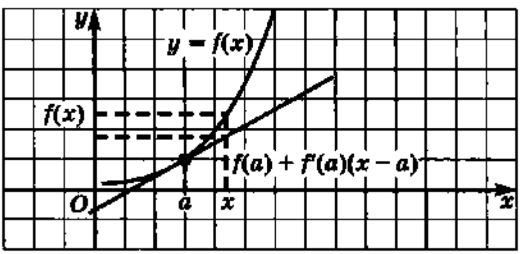


Рис. 140

Пример 3. Найти приближенное значение числового выражения $1{,}02^7$.

Решение. Речь идет о нахождении значения функции $y = x^7$ в точке $x = 1{,}02$. Воспользуемся формулой (2), учитывая, что в данном примере $f(x) = x^7$, $a = 1$, $f(a) = f(1) = 1$; $x = 1{,}02$, $f'(x) = 7x^6$, и, следовательно, $f'(a) = f'(1) = 7 \cdot 1^6 = 7$.

В итоге получаем:

$$1{,}02^7 \approx 1 + 7 \cdot 0{,}02, \text{ т. е. } 1{,}02^7 \approx 1{,}14.$$

Если мы воспользуемся калькулятором, то получим:

$$1{,}02^7 = 1{,}148685667\ldots .$$

Как видите, точность приближения вполне приемлема.

Ответ: $1{,}02^7 \approx 1{,}14$.

§ 30. Применение производной для исследования функций на монотонность и экстремумы

1. Исследование функций на монотонность

На рисунке 141 представлен график некоторой возрастающей дифференцируемой функции $y = f(x)$. Проведем касательные к графику в точках $x = x_1$ и $x = x_2$. Что общего у построенных прямых? Общее то, что обе они составляют с осью x острый угол, а значит, у обеих прямых положительный угловой коэффициент. Но угловой коэффициент касательной равен значению производной в абсциссе точки касания. Таким образом, $f'(x_1) > 0$ и $f'(x_2) > 0$. А в точке $x = 0$ касательная совпала с осью x, в этой точке выполняется равенство $f'(0) = 0$. Вообще в любой точке x из области определения *возрастающей* дифференцируемой функции выполняется неравенство

$$f'(x) \geqslant 0.$$

На рисунке 142 представлен график некоторой убывающей дифференцируемой функции $y = f(x)$. Проведем касательные к графику в точках $x = x_1$ и $x = x_2$. Что общего у построенных прямых? Общее то, что обе они составляют с осью x тупой угол, а значит, у обеих прямых отрицательный угловой коэффициент. Но угловой коэффициент касательной равен значению производной в абсциссе точки касания. Таким образом, $f'(x_1) < 0$ и $f'(x_2) < 0$. А в точке $x = x_3$ касательная параллельна оси x, в этой точке выполняется равенство $f'(x_3) = 0$. Вообще в любой точке x из области определения *убывающей* дифференцируемой функции выполняется неравенство

$$f'(x) \leqslant 0.$$

Эти рассуждения показывают, что между характером монотонности функции и знаком ее производной есть определенная связь:

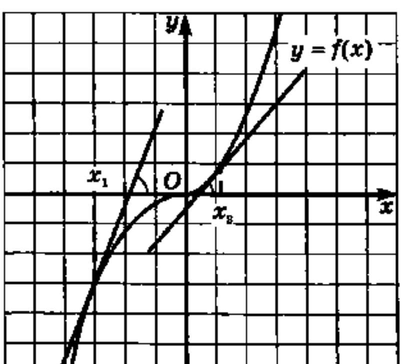


Рис. 141

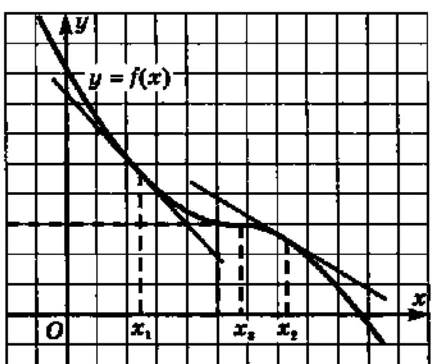


Рис. 142

если функция возрастает на промежутке и имеет на нем производную, то производная неотрицательна; если функция убывает на промежутке и имеет на нем производную, то производная неположительна.

Но гораздо важнее то, что верны и обратные утверждения, показывающие, как по знаку производной можно установить характер монотонности функции на промежутке. При этом, во избежание недоразумений, берут только открытые промежутки, т. е. интервалы или открытые лучи. Дело в том, что для функции, определенной на отрезке $[a; b]$, не очень корректно ставить вопрос о существовании и о значении производной в концевой точке (в точке $x = a$ или в точке $x = b$), поскольку в точке $x = a$ приращение аргумента может быть только положительным, а в точке $x = b$ — только отрицательным. В определении производной такие ограничения не предусмотрены.

Теорема 1. **Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) > 0$ (причем равенство $f'(x) = 0$ либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X.**

Теорема 2. **Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) < 0$ (причем равенство $f'(x) = 0$ либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X.**

Доказательства этих теорем обычно проводят в курсе высшей математики. Мы ограничимся проведенными выше рассуждениями «на пальцах» и для большей убедительности дадим еще физическое истолкование сформулированных теорем.

Пусть по прямой движется материальная точка, $s = s(t)$ — закон движения. Если скорость все время положительна, то точка постоянно удаляется от начала отсчета, т. е. функция $s = s(t)$ возрастает. Если же скорость все время отрицательна, то точка постоянно приближается к началу отсчета, т. е. функция $s = s(t)$ убывает. Если скорость движения была положительна, затем в какой-то отдельный момент времени обратилась в нуль, а потом снова стала положительной, то движущееся тело в указанный момент времени как бы притормаживает, а потом продолжает удаляться от начальной точки. Так что и в этом случае функция $s = s(t)$ возрастает. А что такое скорость точки? Это производная пути по времени. Значит, от знака производной (скорости) зависит характер монотонности функции — в данном случае функции $s = s(t)$. Об этом как раз и говорят обе сформулированные теоремы.

Пример 1. Доказать, что функция $y = x^5 + 2x^3 - 4$ возрастает на всей числовой прямой.

Решение. Найдем производную заданной функции:

$$f'(x) = 5x^4 + 6x^2.$$

Очевидно, что при всех x выполняется неравенство $5x^4 + 6x^2 \geqslant 0$, причем $f'(x) = 0$ лишь в точке $x = 0$. Значит, по теореме 1, функция возрастает на всей числовой прямой. ◀

Пример 2. а) Исследовать на монотонность функцию

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 1;$$

б) построить график этой функции.

Решение. а) Исследовать функцию на монотонность — это значит выяснить, на каких промежутках области определения функция возрастает, а на каких — убывает. Согласно теоремам 1 и 2, это связано со знаком производной.

Найдем производную данной функции:

$$y' = 6x^2 + 6x = 6x(x + 1).$$

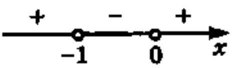


Рис. 143

На рисунке 143 схематически указаны знаки производной по промежуткам области определения: на открытом луче $(-\infty; -1)$ производная положительна, на интервале $(-1; 0)$ — отрицательна, на открытом луче $(0; +\infty)$ — положительна. Значит, на первом из указанных промежутков функция возрастает, на втором — убывает, на третьем — возрастает.

Если функция непрерывна не только на открытом промежутке, но и в его концевых точках (именно так обстоит дело для заданной функции), эти концевые точки включают в промежуток монотонности функции.

Таким образом, заданная функция возрастает на луче $(-\infty; -1]$, возрастает на луче $[0; +\infty)$, убывает на отрезке $[-1; 0]$.

б) Графики функций строят «по точкам». Для этого надо составить таблицу значений функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$, куда обязательно следует включить значения функции в концевых точках промежутков монотонности ($x = -1$ и $x = 0$) и еще несколько значений:

x	-1	0	1	-2
y	0	-1	4	-5

Отметим эти точки на координатной плоскости. Учтем найденные в пункте а) промежутки возрастания и убывания функции, а также то, что в точках $x = -1$ и $x = 0$ производная функции равна нулю, т. е. касательная к графику функции в каждой из указанных точек параллельна оси абсцисс; точнее, в точке $(-1; 0)$ она совпадает с осью абсцисс. Учтем, наконец, то, что функция непрерывна, т. е. ее графиком является сплошная линия. График заданной функции изображен на рисунке 144. ◁■

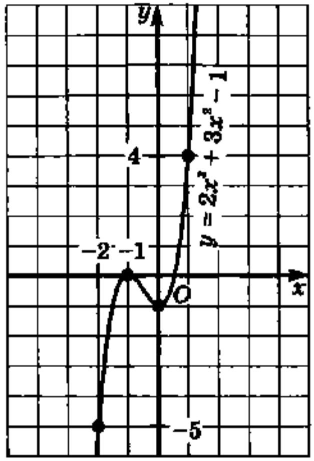


Рис. 144

Завершая рассуждения об исследовании функций на монотонность, обратим внимание на одно обстоятельство. Мы говорили, что если на промежутке X выполняется неравенство $f'(x) > 0$, то функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X; если же на промежутке X выполняется неравенство $f'(x) < 0$, то функция убывает на этом промежутке. А что будет, если на всем промежутке выполняется тождество $f'(x) = 0$? Видимо, функция не должна ни возрастать, ни убывать. Что же это за функция? Ответ очевиден — это постоянная функция $y = C$ (буква C — первая буква слова *constanta*, что означает «постоянная»). Справедлива следующая теорема, формальное доказательство которой мы не даем, ограничиваясь приведенными выше правдоподобными рассуждениями.

Теорема 3. **Если во всех точках открытого промежутка X выполняется равенство $f'(x) = 0$, то функция $y = f(x)$ постоянна на промежутке X.**

2. Точки экстремума функции и их нахождение

Вернемся к графику функции $y = f(x)$, где $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ (рис. 144). На графике есть две уникальные точки, по сути дела определяющие вид графика, — это точки $(-1; 0)$ и $(0; -1)$. В этих точках:

1) происходит изменение характера монотонности функции (слева от точки $x = -1$ функция возрастает, справа от нее, но только до точки $x = 0$, функция убывает; слева от точки $x = 0$ функция убывает, справа от нее — возрастает);

2) касательная к графику функции параллельна оси x (или даже совпадает с осью x), т. е. производная функции в каждой из указанных точек равна нулю;

3) $f(-1)$ — наибольшее значение функции, но не во всей области определения, а в локальном смысле, т. е. по сравнению со значениями функции из некоторой окрестности точки $x = -1$. Точно

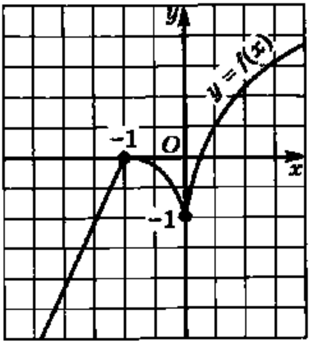


Рис. 145

так же $f(0)$ — наименьшее значение функции, но не во всей области определения, а в локальном смысле, т. е. по сравнению со значениями функции из некоторой окрестности точки $x = 0$.

А теперь рассмотрим рисунок 145, где изображен график другой функции. Не правда ли, он похож на предыдущий график? На нем те же две уникальные точки, но одна из указанных выше трех особенностей этих точек изменилась: нельзя сказать, что касательные к графику в этих точках параллельны оси x. В точке $x = -1$ касательная вообще не существует, а в точке $x = 0$ она перпендикулярна оси x (точнее, она совпадает с осью y).

Определение 1. Точку $x = x_0$ называют **точкой минимума функции** $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство

$$f(x) \geqslant f(x_0).$$

Так, функции, графики которых изображены на рисунках 144 и 145, имеют точку минимума $x = 0$. Почему? Потому что у этой точки существует окрестность, например $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ или $(-0{,}2; 0{,}2)$, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(0)$. Это верно для обеих функций.

Значение функции в точке минимума обычно обозначают $y_{\min}$. Не путайте это значение (наименьшее, но в локальном смысле) с $y_{\text{наим}}$, т. е. с наименьшим значением функции во всей рассматриваемой области определения (в глобальном смысле). Посмотрите еще раз на рисунки 144 и 145. Вы видите, что наименьшего значения нет ни у той, ни у другой функции, а $y_{\min}$ существует.

Определение 2. Точку $x = x_0$ называют **точкой максимума функции** $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant f(x_0).$$

Так, функции, графики которых изображены на рисунках 144 и 145, имеют точку максимума $x = -1$. Почему? Потому что у этой точки существует окрестность, например $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(-1)$. Это верно для обеих функций.

Значение функции в точке максимума обычно обозначают y_{max}. Не путайте это значение (наибольшее, но в локальном смысле) с $y_{наиб}$, т. е. с наибольшим значением функции во всей рассматриваемой области определения (в глобальном смысле). Посмотрите еще раз на рисунки 144 и 145. Вы видите, что наибольшего значения нет ни у той, ни у другой функции, а y_{max} существует.

Точки минимума и максимума функции объединяют общим термином — *точки экстремума* (от латинского слова *extremum* — «крайний»).

Если функция $y = f(x)$ достигает в точке x_0 минимума (максимума), то наименование «точка минимума (максимума)» используют как для значения $x = x_0$, так и для точки $(x_0, f(x_0))$.

Как искать точки экстремума функции? Ответ на этот вопрос мы сможем получить, еще раз проанализировав графические модели, представленные на рисунках 144 и 145.

Обратите внимание: для функции, график которой изображен на рисунке 144, в обеих точках экстремума производная обращается в нуль. А для функции, график которой изображен на рисунке 145, в обеих точках экстремума производная не существует. Это не случайно, поскольку, как доказано в курсе математического анализа, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. **Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции либо равна нулю, либо не существует.**

Для удобства условимся внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю, называть *стационарными*, а внутренние точки области определения функции, в которых функция непрерывна, но производная не существует, — *критическими*.

Пример 3. Построить график функции $y = 2x^2 - 6x + 3$.

Решение. Графиком заданной квадратичной функции является парабола, причем ветви параболы направлены вверх, поскольку коэффициент при x^2 положителен. Но в таком случае вершина параболы является точкой минимума функции, касательная к параболе в ее вершине параллельна оси x, значит, в вершине параболы должно выполняться условие $y' = 0$.

Имеем: $y' = (2x^2 - 6x + 3)' = 4x - 6$.

Приравняв производную нулю, получим:

$$4x - 6 = 0; \quad x = 1,5.$$

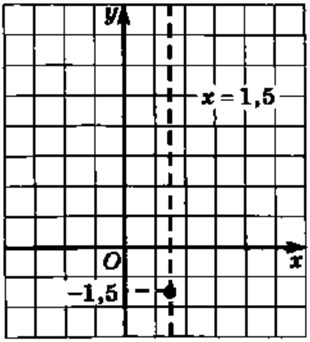


Рис. 146

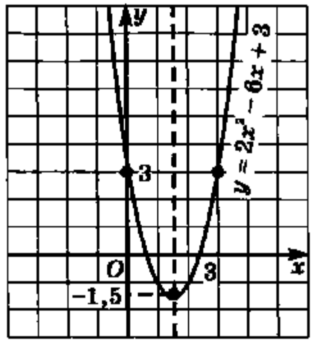


Рис. 147

Подставив найденное значение x в уравнение параболы, получим:

$$y = 2 \cdot 1{,}5^2 - 6 \cdot 1{,}5 + 3 = -1{,}5.$$

Итак, вершиной параболы служит точка (1,5; −1,5), а осью параболы — прямая $x = 1{,}5$ (рис. 146). В качестве контрольных точек удобно взять точку (0; 3) и симметричную ей относительно оси параболы точку (3; 3). На рисунке 147 по найденным трем точкам построена парабола — график заданной квадратичной функции. ◄

Помните ли вы, как мы строили график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ в 8—9-м классах? Практически так же, только ось параболы находили не с помощью производной, а по формуле $x = -\dfrac{b}{2a}$, которую приходилось запоминать. Решение, показанное в примере 3, освобождает от необходимости помнить эту формулу. Чтобы найти абсциссу вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ или уравнение ее оси симметрии, достаточно приравнять нулю производную квадратичной функции.

Теперь вернемся к теореме 4, в которой говорится, что если в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет экстремум, то $x = x_0$ — стационарная или критическая точка функции. Возникает естественный вопрос: верна ли обратная теорема, т. е. верно ли, что если $x = x_0$ — стационарная или критическая точка, то в этой точке функция имеет экстремум? Ответ отрицательный. Рассмотрим рисунок 148, где изображен график возрастающей функции, не имеющей точек экстремума. У этой функции есть стационарная точка

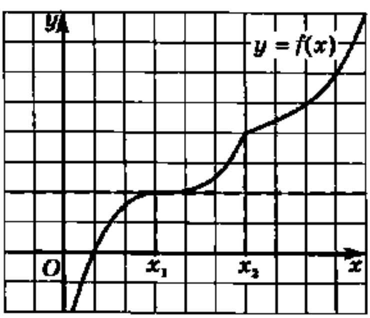


Рис. 148

$x = x_1$, в которой производная обращается в нуль (в этой точке график функции имеет касательную, параллельную оси x), но это не точка экстремума. И есть критическая точка $x = x_2$, в которой производная не существует, но это также не точка экстремума. Значит, теорема 4 дает только *необходимое условие экстремума* (справедлива прямая теорема), но оно не является *достаточным условием* (обратная теорема не выполняется).

А как же быть с достаточным условием? Как узнать, есть ли в стационарной или в критической точке экстремум? Для ответа на этот вопрос снова рассмотрим графики функций, представленные на рисунках 144, 145, 147, 148.

Обратим внимание, что при переходе через точку максимума (речь идет о точке $x = -1$ на рисунках 144 и 145) изменяется характер монотонности функции: слева от точки максимума функция возрастает, справа — убывает. Соответственно изменяются знаки производной: слева от точки максимума производная положительна, справа — отрицательна.

Аналогично, при переходе через точку минимума (речь идет о точке $x = 0$ на рисунках 144 и 145 и о точке $x = 1{,}5$ на рисунке 147) характер монотонности функции также изменяется: слева от точки минимума функция убывает, справа — возрастает. Соответственно изменяются знаки производной: слева от точки минимума производная отрицательна, справа — положительна.

Если же и слева и справа от стационарной или критической точки производная имеет один и тот же знак, то в этой точке экстремума нет. Именно так обстоит дело с функцией, график которой изображен на рисунке 148: и слева и справа от стационарной точки x_1 и от критической точки x_2 производная положительна.

Наши рассуждения могут служить подтверждением (но, конечно, не доказательством — строгие доказательства проводятся в курсе высшей математики) справедливости следующей теоремы.

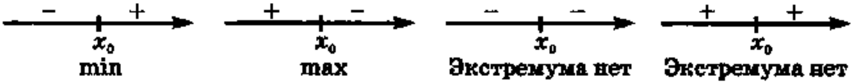
***Теорема 5** (достаточные условия экстремума).* **Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:**

а) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ — неравенство $f'(x) > 0$, то $x = x_0$ — точка минимума функции $y = f(x)$;

б) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ — неравенство $f'(x) < 0$, то $x = x_0$ — точка максимума функции $y = f(x)$;

в) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремума нет.

Этой длинной формулировкой на практике пользоваться неудобно, советуем применять следующую условную схему для знаков производной:



Пример 4. а) Найти точки экстремума функции

$$y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11;$$

б) построить график этой функции.

Решение. а) Здесь $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11$. Найдем производную данной функции:

$$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 48x;$$
$$f'(x) = 12x(x^2 - 4x + 4);$$
$$f'(x) = 12x(x - 2)^2.$$

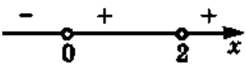


Рис. 149

Производная всюду существует, значит, критических точек у функции нет. Производная обращается в нуль в точках $x = 0$ и $x = 2$ — это две стационарные точки заданной функции. На рисунке 149 схематически указаны знаки производной по промежуткам области определения: на промежутке $(-\infty; 0)$ производная отрицательна, на промежутке $(0; 2)$ — положительна, на промежутке $(2; +\infty)$ — положительна. Значит, $x = 0$ — точка минимума функции, а $x = 2$ точкой экстремума не является. На первом из указанных выше промежутков функция убывает, на втором и третьем — возрастает.

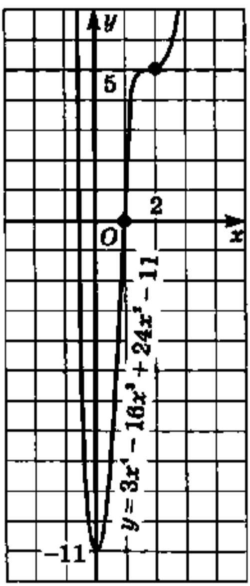


Рис. 150

В точке минимума $x = 0$ имеем: $f(0) = -11$ (подставили значение $x = 0$ в выражение $f(x)$), значит, $y_{min} = -11$.

б) Чтобы построить график функции, нужно знать особо важные точки графика. К таковым относятся:

— найденная точка минимума $(0; -11)$;

— стационарная точка $x = 2$; в этой точке:

$$f(2) = 3 \cdot 2^4 - 16 \cdot 2^3 + 24 \cdot 2^2 - 11 = 5;$$

— точки пересечения графика с осями координат; в данном примере это уже найденная точка $(0; -11)$ — точка пересечения графика с осью y. Кроме того, можно заметить, что $f(1) = 0$, т. е. найдена точка пересечения графика с осью x — это точка $(1; 0)$.

Итак, мы имеем точку минимума (0; −11), точку пересечения графика с осью x — точку (1; 0) и стационарную точку (2; 5). В точке (2; 5) касательная к графику функции параллельна оси x, но это не точка экстремума, а так называемая *точка перегиба*.

График функции схематически изображен на рисунке 150. Заметим, что есть еще одна точка пересечения графика с осью абсцисс, но найти ее нам не удалось.

Завершая этот пункт, заметим, что мы фактически выработали алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы.

Алгоритм исследования непрерывной функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные ($f'(x) = 0$) и критические ($f'(x)$ не существует) точки функции $y = f(x)$.
3. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.
4. На основании теорем 1, 2 и 5 сделать выводы о монотонности функции и о ее точках экстремума.

Заметим, что если заданная функция имеет вид $y = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, то также можно пользоваться этим алгоритмом, но с одним добавлением: *полюсы функции*, т. е. точки, в которых знаменатель $q(x)$ обращается в нуль, тоже отмечают на числовой прямой, причем делают это до определения знаков производной. Разумеется, полюсы не могут быть точками экстремума.

Пример 5. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^4 + 16}{x^2}$ на монотонность и экстремумы.

Решение. Заметим, что функция всюду непрерывна, кроме точки $x = 0$. Воспользуемся указанным выше алгоритмом.

1) Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{(x^4 + 16)' \cdot x^2 - (x^2)' \cdot (x^4 + 16)}{(x^2)^2} = \frac{4x^3 \cdot x^2 - 2x(x^4 + 16)}{x^4} =$$

$$= \frac{2x^5 - 32x}{x^4} = \frac{2x(x^4 - 16)}{x^4} = \frac{2(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)}{x^3}.$$

2) Производная обращается в нуль в точках $x = 2$ и $x = -2$ — это стационарные точки. Производная не существует в точке $x = 0$, но это не критическая точка, это точка разрыва функции (полюс).

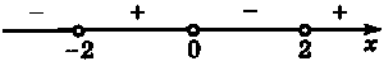


Рис. 151

3) Отметим точки −2, 0 и 2 на числовой прямой и расставим знаки производной на получившихся промежутках (рис. 151).

4) Делаем выводы: на луче $(-\infty; -2]$ функция убывает, на полуинтервале $[-2; 0)$ функция возрастает, на полуинтервале $(0; 2]$ функция убывает, на луче $[2; +\infty)$ функция возрастает.

Далее, $x = -2$ — точка минимума, причем $y_{\min} = 8$ (подставили значение $x = -2$ в формулу $y = \frac{x^4 + 16}{x^2}$).

Аналогично устанавливаем, что и $x = 2$ — точка минимума, причем $y_{\min} = 8$.

§ 31. Построение графиков функций

За годы изучения курса алгебры в школе вы накопили достаточно большой опыт построения графиков функций. В основном вы строили графики «по точкам», т. е. для заданной функции $y = f(x)$ находили контрольные точки $(x_1; f(x_1))$, $(x_2; f(x_2))$, $(x_3; f(x_3))$, $(x_4; f(x_4))$ и т. д., отмечали их на координатной плоскости и, полагаясь на интуицию, соединяли найденные точки плавной кривой. Как выбирались эти контрольные точки? Иногда обдуманно, например, находили вершину параболы $y = ax^2 + bx + c$ или специально искали точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осями координат. Но чаще выбор контрольных точек был случайным.

Заметим, что графики любых функций строят по точкам. Но в тех случаях, когда вид графика заранее неизвестен, эти точки надо выбирать со смыслом — уметь выделять особо важные точки графика, которые определяют его вид. Об этом мы уже говорили выше, когда строили графики функций $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$ (см. рис. 144) и $y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11$ (см. рис. 150). К особо важным точкам графика функции $y = f(x)$ относят:

— стационарные и критические точки;
— точки экстремума;
— точки пересечения графика с осями координат;
— точки разрыва функции.

В тех случаях, когда речь идет о построении графика незнакомой функции, когда заранее трудно представить вид графика, полезно применять определенную схему исследования свойств функции, которая помогает составить представление о ее графике. После этого можно приступать к построению графика по точкам.

В курсе математического анализа разработана универсальная схема исследования свойств функции и построения ее графика. Мы будем использовать упрощенные варианты указанной схемы.

1) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой, то достаточно найти стационарные и критические точки, точки экстремума, промежутки монотонности, точки пересечения графика с осями координат и при необходимости выбрать еще несколько контрольных точек. Именно так мы поступали в § 30, когда строили графики следующих функций:

$$y = 2x^2 - 6x + 3 \quad \text{(рис. 147)};$$
$$y = 2x^3 + 3x^2 - 1 \quad \text{(рис. 144)};$$
$$y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11 \quad \text{(рис. 150)}.$$

2) Если функция $y = f(x)$ определена не на всей числовой прямой, то начинать следует с нахождения области определения функции (если область не задана) и с указания ее точек разрыва.

3) Полезно исследовать функцию на четность, поскольку график четной или нечетной функции обладает симметрией (соответственно относительно оси y или относительно начала координат), и, следовательно, можно сначала построить только ветвь графика при $x \geqslant 0$, а затем дорисовать симметричную ветвь.

4) Если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, то (см. § 26) прямая $y = b$ является *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$. Асимптота дает своеобразный ориентир для графика.

5) Если $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ и при $x = a$ знаменатель обращается в нуль, а числитель отличен от нуля, то $x = a$ — *вертикальная асимптота* графика функции $y = f(x)$.

Например, для функции $y = \dfrac{1}{x-1}$ — ее график (гипербола) изображен на рисунке 152 — вертикальной асимптотой является прямая $x = 1$.

Пример 1. Построить график функции $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Решение 1. Введем обозначение: $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Найдем область определения функции:

$$D(f) = (-\infty; +\infty).$$

2. Исследуем функцию на четность:

$$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x).$$

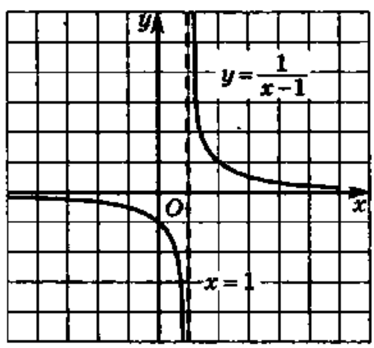


Рис. 152

Значит, заданная функция нечетная, ее график симметричен относительно начала координат, а потому начнем с построения ветви графика при $x \geqslant 0$.

3. Найдем асимптоты. Вертикальной асимптоты нет. Для нахождения горизонтальной асимптоты надо вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$. Имеем:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{0}{0+1} = 0.$$

Значит, $y = 0$ — горизонтальная асимптота графика функции.

4. Найдем стационарные и критические точки, точки экстремума и промежутки монотонности функции. Имеем:

$$y' = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{(x)' \cdot (1+x^2) - x \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Производная всюду существует, значит, критических точек у функции нет.

Стационарные точки найдем из соотношения $y' = 0$. Получаем: $1 - x^2 = 0$, откуда находим, что $x = 1$ или $x = -1$. Поскольку мы договорились рассматривать лишь случай, когда $x \geqslant 0$, выберем значение $x = 1$. При $x < 1$ $y' > 0$, а при $x > 1$ $y' < 0$. Значит, $x = 1$ — точка максимума функции, причем

$$y_{\max} = f(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}.$$

На промежутке $[0; 1]$ функция возрастает, на промежутке $[1; +\infty)$ функция убывает.

5. Составим таблицу значений функции $y = \frac{x}{1+x^2}$ при $x \geqslant 0$:

x	0	1	2	3
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$

6. Отметив найденные точки на координатной плоскости, соединив их плавной кривой и учтя при этом, что $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ — точка максимума и что $y = 0$ — горизонтальная асимптота, построим ветвь искомого графика при $x \geqslant 0$ (рис. 153). Добавив ветвь,

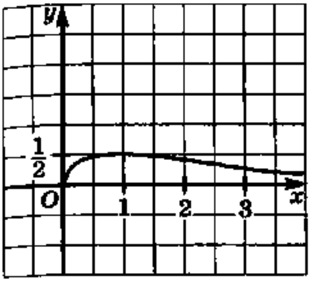


Рис. 153

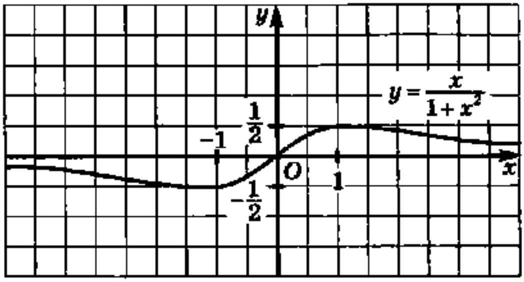


Рис. 154

симметричную построенной относительно начала координат, получим весь график (рис. 154). ◁■

Пример 2. Построить график функции $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

Решение. 1. Введем обозначение: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. Найдем область определения функции. Она задается условиями $x \neq 1$, $x \neq -1$ (при значениях $x = 1$, $x = -1$ знаменатель дроби обращается в нуль). Итак,

$$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

2. Исследуем функцию на четность:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} = f(x).$$

Значит, заданная функция четная, ее график симметричен относительно оси ординат, а потому можно для начала ограничиться построением ветвей графика при $x \geqslant 0$.

3. Найдем асимптоты. Вертикальной асимптотой является прямая $x = 1$, поскольку при этом значении x знаменатель дроби обращается в нуль, а числитель отличен от нуля. Для отыскания горизонтальной асимптоты надо вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Значит, $y = 1$ — горизонтальная асимптота графика функции.

4. Найдем стационарные и критические точки, точки экстремума и промежутки монотонности функции:

$$y' = \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' = \frac{(x^2+1)'\cdot(x^2-1)-(x^2+1)\cdot(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{2x\cdot(x^2-1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}.$$

Производная существует всюду в области определения функции, значит, критических точек у функции нет.

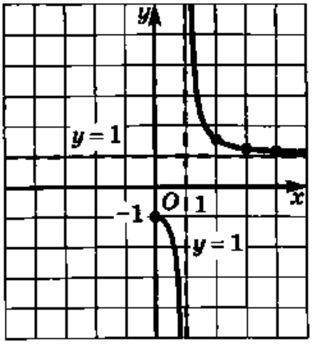


Рис. 155

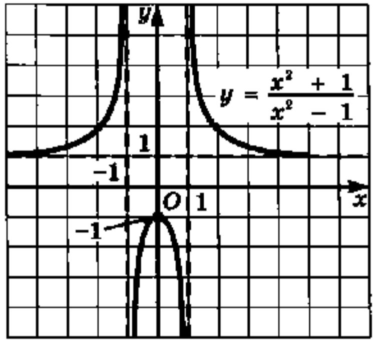


Рис. 156

Стационарные точки найдем из соотношения $y' = 0$. Получаем: $-4x = 0$, откуда находим, что $x = 0$. При $x < 0$ $y' > 0$; при $x > 0$: $y' < 0$. Значит, $x = 0$ — точка максимума функции, причем $y_{max} = f(0) = \frac{0^2 + 1}{0^2 - 1} = -1$.

При $x > 0$ имеем: $y' < 0$; но следует учесть наличие точки разрыва $x = 1$. Значит, вывод о промежутках монотонности будет выглядеть так: на промежутке $[0; 1)$ функция убывает, на промежутке $(1; +\infty)$ функция также убывает.

5. Составим таблицу значений функции $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ при $x \geqslant 0$:

x	0	$\frac{1}{2}$	2	3	4
y	-1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{17}{15}$

6. Отметив найденные точки на координатной плоскости, учтя при этом, что $(0; -1)$ — точка максимума, что $y = 1$ — горизонтальная асимптота, что $x = 1$ — вертикальная асимптота, построим ветви искомого графика при $x \geqslant 0$ (рис. 155). Добавив ветви, симметричные построенным относительно оси ординат, получим весь график (рис. 156).

§ 32. Применение производной для нахождения наибольших и наименьших значений величин

1. Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке

Вы уже накопили некоторый опыт нахождения наибольшего и наименьшего значений функции. Чаще всего мы использовали для этого график функции. Пусть, например, дана функция

$y = \frac{x}{1+x^2}$. Построив ее график (см. рис. 154), легко сделать вывод о том, что $y_{наим} = -\frac{1}{2}$, а $y_{наиб} = \frac{1}{2}$.

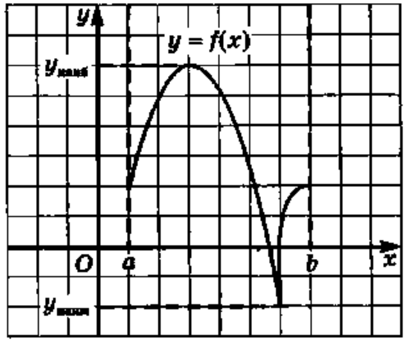


Рис. 157

В некоторых случаях легко найти наибольшее и наименьшее значения функции и без помощи графика. Например, для функции $y = \sqrt{9-x^2}$ можно рассуждать так: ясно, что $\sqrt{9-x^2} \leqslant 3$, значит, $y_{наиб} = 3$ (это значение достигается функцией в точке $x = 0$). С другой стороны, ясно, что $\sqrt{9-x^2} \geqslant 0$, значит, $y_{наим} = 0$ (это значение достигается функцией при $x = 3$ или при $x = -3$).

В более сложных случаях для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции используется производная.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ — несколько графиков таких функций представлено на рисунках 157—159. Анализируя указанные геометрические модели, можно прийти к следующим выводам.

1. ***Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нем и своего наибольшего, и своего наименьшего значений*** **(эта теорема доказывается в курсе высшей матеатики).**

2. ***Наибольшего и наименьшего значений непрерывная функция может достигать как на концах отрезка, так и внутри него.***

Здесь возможны варианты — некоторые из них представлены на рисунках 157—159. На рисунке 157 и наибольшее и наименьшее

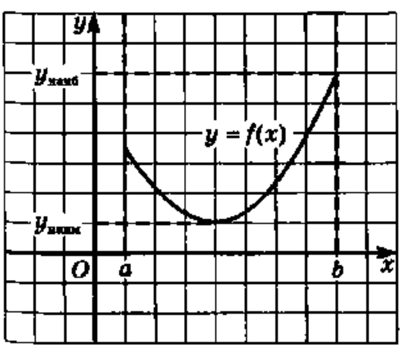


Рис. 158

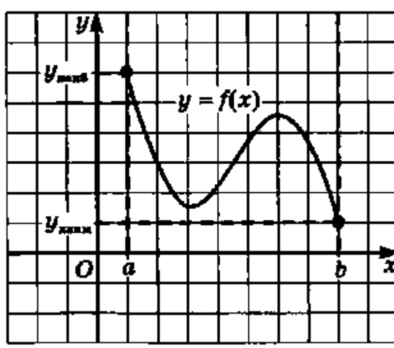


Рис. 159

значения достигаются внутри отрезка. На рисунке 158 наименьшее значение достигается внутри отрезка, а наибольшее — в правом конце. На рисунке 159 и наибольшее и наименьшее значения достигаются на концах отрезка.

3. *Если наибольшее (или наименьшее) значение достигается внутри отрезка, то только в стационарной или критической точке.*

В этом нет ничего удивительного, поскольку в этом случае наибольшее (или наименьшее) значение функции одновременно является экстремумом, а экстремум достигается только в стационарной или критической точке.

Подведем итог сказанному в виде алгоритма.

Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[a; b]$.
3. Вычислить значения функции $y = f(x)$ в точках, отобранных на втором шаге, и в точках a и b; выбрать среди этих значений наименьшее (это будет $y_{наим}$) и наибольшее (это будет $y_{наиб}$).

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$:

а) на отрезке $[-4; 6]$; в) на отрезке $[-2; 2]$.

б) на отрезке $[0; 6]$;

Решение. Воспользуемся алгоритмом.

1) $y' = 3x^2 - 6x - 45$.

2) Производная существует при всех x, значит, критических точек у функции нет. Стационарные точки найдем из условия $y' = 0$. Имеем:

$$3x^2 - 6x - 45 = 0;$$
$$x^2 - 2x - 15 = 0;$$
$$x_1 = -3, \quad x_2 = 5.$$

Дальнейшие рассуждения зависят от указанного в условии отрезка.

а) Обе стационарные точки (и $x = -3$, и $x = 5$) принадлежат заданному отрезку $[-4; 6]$. Значит, на третьем шаге мы составим такую таблицу значений функции $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$:

x	-4	-3	5	6
y	69	82	-174	-161

Таким образом, $y_{наим} = -174$ (достигается в точке $x = 5$); $y_{наиб} = 82$ (достигается в точке $x = -3$).

б) Отрезку $[0; 6]$ принадлежит лишь одна из двух найденных стационарных точек, а именно точка $x = 5$. Значит, составим такую таблицу значений функции $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$:

x	0	5	6
y	1	-174	-161

Таким образом, $y_{наим} = -174$ (достигается в точке $x = 5$); $y_{наиб} = 1$ (достигается в точке $x = 0$).

в) Отрезку $[-2; 2]$ не принадлежит ни одна из найденных стационарных точек, значит, достаточно вычислить значения функции в концевых точках: если $x = -2$, то $y = 71$; если $x = 2$, то $y = -93$.

Таким образом, в этом случае $y_{наим} = -93$, $y_{наиб} = 71$. ◁■

Пример 2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = 5x^3 - x|x - 1|$ на отрезке $[0; 2]$.

Решение. Если $x \geqslant 1$, то $|x - 1| = x - 1$, и функция принимает вид $y = 5x^3 - x^2 + x$; если $x < 1$, то $|x - 1| = 1 - x$, и функция принимает вид $y = 5x^3 + x^2 - x$. Таким образом, речь идет о кусочной функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 5x^3 - x^2 + x, \text{ если } x \geqslant 1; \\ 5x^3 + x^2 - x, \text{ если } x < 1. \end{cases}$$

1) Вычисляя $f'(x)$, мы должны учесть, что при $x > 1$ следует пользоваться формулой $f(x) = 5x^3 - x^2 + x$. Получим: $f'(x) = 15x^2 - 2x + 1$.

При $x < 1$ следует пользоваться формулой $f(x) = 5x^3 + x^2 - x$. Получим: $f'(x) = 15x^2 + 2x - 1$.

В «точке стыка» $x = 1$ производная не существует, это критическая точка функции.

Итак, $f'(x) = \begin{cases} 15x^2 - 2x + 1, \text{ если } x > 1; \\ 15x^2 + 2x - 1, \text{ если } x < 1. \end{cases}$

2) Критическую точку мы уже нашли — это точка $x = 1$. Найдем стационарные точки, решив уравнение $f'(x) = 0$.

Если $x > 1$, то $f'(x) = 15x^2 - 2x + 1$; уравнение $15x^2 - 2x + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

Если $x < 1$, то $f'(x) = 15x^2 + 2x - 1$; из уравнения $15x^2 + 2x - 1 = 0$ находим: $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. Из этих двух значений заданному отрезку $[0; 2]$ принадлежит только точка $x = \frac{1}{5}$.

3) Составим таблицу значений функции $y = 5x^3 - x|x - 1|$, включив в нее точки $x = 0$, $x = 2$, $x = 1$, $x = \frac{1}{5}$ — концы заданного отрезка и лежащие внутри отрезка критическую и стационарную точки:

x	0	$\frac{1}{5}$	1	2
y	0	$-\frac{3}{25}$	5	38

Из имеющихся в таблице значений наименьшим является $-\frac{3}{25}$, наибольшим — 38.

Ответ: $y_{\text{наим}} = -\frac{3}{25}$; $y_{\text{наиб}} = 38$.

А как быть, если речь идет о нахождении наибольшего или наименьшего значения функции, непрерывной на незамкнутом промежутке, например на интервале? Можно построить график функции и снять информацию с полученной графической модели. Но чаще оказывается более удобным использовать следующую теорему.

Теорема. **Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри него единственную стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:**

а) если $x = x_0$ — точка максимума, то $y_{\text{наиб}} = f(x_0)$;

б) если $x = x_0$ — точка минимума, то $y_{\text{наим}} = f(x_0)$.

На рисунках 160 и 161 приведены соответствующие геометрические иллюстрации.

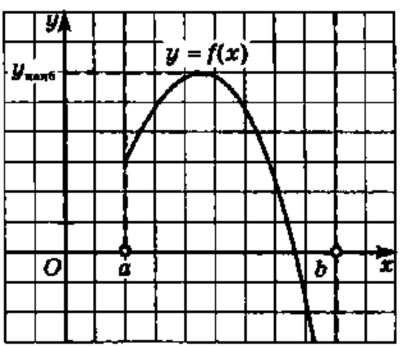


Рис. 160

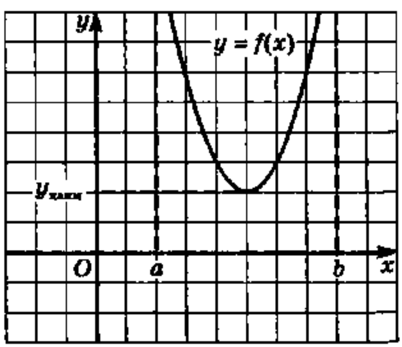


Рис. 161