

---

## СОДЕРЖАНИЕ

Условные обозначения . . . . .	6
<b>ЧАСТЬ 1. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ . . . . .</b>	<b>9</b>
§1 Общие сведения о колебаниях . . . . .	9
1.1 Классификация колебаний . . . . .	9
1.2 Характеристики колебаний . . . . .	9
§2 Гармонические колебания . . . . .	10
2.1 Скорость и ускорение при гармонических колебаниях . . . . .	11
2.2 Дифференциальное уравнение гармонических колебаний . . . . .	11
§3 Примеры систем, совершающих гармонические колебания . . . . .	12
3.1 Пружинный маятник . . . . .	12
3.2 Физический маятник . . . . .	13
3.3 Математический маятник . . . . .	14
3.4 Колебательный контур . . . . .	15
§4 Энергия колебаний . . . . .	16
§5 Сложение гармонических колебаний . . . . .	17
5.1 Графическое изображение гармонических колебаний. Векторная диаграмма . . . . .	17
5.2 Сложение одинаково направленных гармонических колебаний . . . . .	18
5.3 Сложение взаимно перпендикулярных колебаний . . . . .	19
§6 Затухающие колебания . . . . .	21
6.1 Затухающие колебания пружинного маятника . . . . .	22
6.2 Затухающие колебания в колебательном контуре . . . . .	22
6.3 Основные характеристики затухающих колебаний . . . . .	23
6.4 Аперриодический процесс . . . . .	25
§7 Вынужденные колебания . . . . .	25
7.1 Вынужденные механические колебания . . . . .	25
7.2 Вынужденные колебания в колебательном контуре . . . . .	28
§8 Общие сведения о волнах . . . . .	31
8.1 Классификация волн . . . . .	31
8.2 Характеристики волн . . . . .	32
§9 Плоская монохроматическая волна . . . . .	33
9.1 Уравнение плоской монохроматической волны . . . . .	33
9.2 Волновое уравнение . . . . .	35
9.3 Перенос энергии волной. Вектор Умова . . . . .	35
§10 Звуковые волны . . . . .	36
10.1 Характеристики звука . . . . .	36
10.2 Ультразвук . . . . .	37
10.3 Инфразвук . . . . .	38
§11 Интерференция волн. Стоячие волны . . . . .	39
11.1 Принцип суперпозиции волн. Интерференция волн . . . . .	39
11.2 Стоячие волны . . . . .	39
11.3 Сложные волны. Групповая скорость . . . . .	41

---

§12	Эффект Доплера в акустике . . . . .	44
§13	Уравнения Максвелла . . . . .	45
§14	Электромагнитные волны . . . . .	48
	14.1 Плоская электромагнитная волна . . . . .	48
	14.2 Основные свойства электромагнитных волн . . . . .	49
	14.3 Шкала электромагнитных волн . . . . .	51
ЧАСТЬ 2. ВОЛНОВАЯ И КВАНТОВАЯ ОПТИКА . . . . .		53
§16	Предварительные сведения . . . . .	53
	16.1 Некоторые сведения из геометрической оптики . . . . .	53
	16.2 Фотометрические величины . . . . .	55
§17	Интерференция света . . . . .	58
	17.1 Интерференция. Когерентность . . . . .	58
	17.2 Условия максимумов и минимумов интерференции . . . . .	58
§18	Интерференция в тонких пленках . . . . .	60
§19	Применение интерференции . . . . .	63
§20	Дифракция света . . . . .	64
	20.1 Дифракционная решетка . . . . .	65
	20.2 Дифракция рентгеновских лучей . . . . .	67
§21	Взаимодействие световых волн с веществом . . . . .	68
	21.1 Рассеяние световых волн . . . . .	69
	21.2 Поглощение световых волн . . . . .	69
	21.3 Преломление световых волн . . . . .	70
	21.4 Дисперсия световых волн . . . . .	70
	21.5 Давление световых волн . . . . .	71
§22	Поляризация света . . . . .	72
§23	Способы получения поляризованного света . . . . .	73
	23.1 Отражение от границы раздела двух диэлектриков. Закон Брюстера . . . . .	73
	23.2 Преломление света в тонкой пластинке . . . . .	74
	23.3 Двойное лучепреломление . . . . .	74
§24	Искусственное двойное лучепреломление. Эффект Керра . . . . .	76
§25	Вращение плоскости поляризации . . . . .	77
§26	Тепловое излучение. Закон Кирхгофа . . . . .	78
	26.1 Характеристики теплового излучения . . . . .	78
	26.2 Классификация тел . . . . .	79
	26.3 Закон Кирхгофа . . . . .	81
§27	Законы Стефана – Больцмана и Вина . . . . .	82
§28	Гипотеза Планка. Формула Планка . . . . .	83
§29	Оптическая пирометрия . . . . .	84
§30	Внешний фотоэлектрический эффект. Законы фотоэффекта . . . . .	85
§31	Фотон. Свойства фотона . . . . .	87
§32	Эффект Комптона . . . . .	88

---

ЧАСТЬ 3. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ . . . . .	90
§33 Гипотеза де Бройля . . . . .	90
§34 Вероятностный смысл волн де Бройля. Волновая функция . . . . .	92
§35 Соотношения неопределенности Гейзенберга . . . . .	93
§36 Волновое уравнение Шрёдингера . . . . .	95
§37 Частица в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме . . . . .	96
§38 Атом водорода и водородоподобные ионы . . . . .	98
38.1 Квантовые числа . . . . .	99
38.2 Квантование энергии . . . . .	99
38.3 Квантование орбитального момента импульса и магнитного момента . . . . .	102
38.4 Пространственное квантование . . . . .	102
38.5 Спин электрона . . . . .	104
§39 Принцип Паули. Периодическая система элементов Менделеева . . . . .	105
ЧАСТЬ 4. ОСНОВЫ ФИЗИКИ ТВЁРДОГО ТЕЛА . . . . .	108
§41 Строение твёрдых тел . . . . .	108
41.1 Дефекты в кристаллах . . . . .	108
41.2 Энергетические зоны в кристаллах . . . . .	109
§42 Электрические свойства твёрдых тел . . . . .	112
42.1 Электропроводность металлов . . . . .	114
42.2 Электропроводность полупроводников . . . . .	115
42.2.1 Собственная проводимость полупроводников . . . . .	115
42.2.2 Примесная проводимость полупроводников . . . . .	117
§43 Электронно-дырочный переход. Полупроводниковый диод . . . . .	120
§44 Внутренний фотоэффект . . . . .	122
§45 Термоэлектрические явления . . . . .	123
45.1 Явление Зеебека . . . . .	123
45.2 Явление Пельтье . . . . .	125
45.3 Явление Томсона . . . . .	125
ЧАСТЬ 5. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА . . . . .	127
§46 Состав и размеры ядер. Энергия связи ядер . . . . .	127
46.1 Состав ядра . . . . .	127
46.2 Характеристики атомного ядра . . . . .	127
46.3 Размеры ядер . . . . .	128
46.4 Свойства ядерных сил . . . . .	129
46.5 Дефект массы ядра. Энергия связи . . . . .	129
§47 Ядерные превращения . . . . .	131
47.1 Ядерные реакции . . . . .	131
47.2 Радиоактивность . . . . .	132
47.2.1 Общие сведения . . . . .	132
47.2.2 Закон радиоактивного распада . . . . .	133
47.4 Гамма-излучение . . . . .	135
§48 Элементы дозиметрии ионизирующих излучений . . . . .	135

## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $A$  – работа, амплитуда колебаний  
 $A_r$  – относительная атомная масса химического элемента  
 $a$  – активность радиоактивного препарата  
 $\vec{a}$  – ускорение  
 $\vec{a}_n$  – нормальное ускорение  
 $\vec{a}_\tau$  – тангенциальное ускорение  
 $\vec{B}$  – магнитная индукция  
 $C$  – электрическая емкость (электроемкость)  
 $C_V$  – молярная теплоемкость при постоянном объеме  
 $C_p$  – молярная теплоемкость при постоянном давлении  
 $c_V$  – удельная теплоемкость при постоянном объеме  
 $c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении  
 $c$  – скорость света в вакууме  
 $D$  – коэффициент диффузии  
 $\vec{D}$  – электростатическая индукция (электрическое смещение)  
 $d_{\text{эф}}$  – эффективный диаметр молекулы  
 $E$  – освещенность  
 $\vec{E}$  – напряженность электрического поля  
 $\vec{F}$  – сила  
 $G$  – постоянная всемирного тяготения  
 $g$  – ускорение свободного падения  
 $\vec{H}$  – напряженность магнитного поля  
 $h$  – постоянная Планка  
 $I$  – сила постоянного тока, интенсивность  
 $i$  – индекс суммирования, число степеней свободы, сила тока  
 $J$  – момент инерции  
 $\vec{J}$  – намагниченность  
 $\vec{j}$  – плотность тока, плотность потока энергии  
 $K$  – коэффициент теплопроводности  
 $k$  – коэффициент жесткости, постоянная Больцмана, волновое число  
 $L$  – индуктивность, уровень громкости  
 $\vec{L}$  – момент импульса  
 $l$  – орбитальное квантовое число  
 $M$  – молярная масса  
 $M_r$  – относительная молекулярная масса вещества  
 $\vec{M}$  – момент силы  
 $m$  – масса тела, магнитное квантовое число  
 $m_0$  – масса покоя, масса одной молекулы  
 $N$  – сила нормальной реакции опоры, число молекул, механическая мощность

- $N_A$  – число Авогадро  
 $n$  – концентрация, показатель преломления, лавное квантовое число  
 $P$  – мощность электрического тока, степень поляризации  
 $\bar{P}_V$  – поляризованность  
 $p$  – давление  
 $\vec{p}$  – импульс тела, дипольный момент диполя  
 $\vec{p}_m$  – магнитный момент контура с током  
 $Q$  – количество тепла, тепло, добротность системы  
 $q$  – электрический заряд  
 $R$  – радиус окружности, универсальная газовая постоянная, электрическое сопротивление  
 $R_s$  – энергетическая светимость (излучательность)  
 $r$  – коэффициент сопротивления среды  
 $r_{\lambda,T}$  – спектральная плотность энергетической светимости (испускательная способность)  
 $\vec{r}$  – радиус-вектор  
 $S$  – путь, энтропия, площадь  
 $T$  – период вращения, период колебаний, абсолютная температура  
 $T_{1/2}$  – период полураспада  
 $t$  – время  
 $U$  – внутренняя энергия, напряжение  
 $V$  – объем  
 $\langle v \rangle$  – среднеарифметическая скорость молекул газа  
 $v_B$  – наиболее вероятная скорость молекул газа  
 $\langle v_{KB} \rangle$  – среднеквадратичная скорость молекул газа  
 $\vec{v}$  – скорость  
 $W$  – энергия, термодинамическая вероятность  
 $W_K$  – кинетическая энергия  
 $W_{II}$  – потенциальная энергия  
 $w$  – объемная плотность энергии  
 $Z$  – порядковый номер элемента (зарядовое число)  
 $\langle z \rangle$  – среднее число столкновений за единицу времени  
  
 $\alpha$  – температурный коэффициент сопротивления  
 $\alpha_{\lambda,T}$  – поглощательная способность (монохроматический коэффициент поглощения)  
 $\beta$  – коэффициент затухания  
 $\gamma$  – коэффициент Пуассона  
 $\Delta$  – разность хода  
 $\Delta\vec{r}$  – перемещение

- $\varepsilon$  – относительное удлинение, диэлектрическая проницаемость среды, электродвижущая сила
- $\vec{\varepsilon}$  – угловое ускорение
- $\langle \varepsilon \rangle$  – средняя кинетическая энергия молекулы
- $\eta$  – коэффициент полезного действия, коэффициент внутреннего трения (динамическая вязкость)
- $\lambda$  – логарифмический декремент затухания, длина волны, постоянная распада
- $\langle \lambda \rangle$  – средняя длина свободного пробега
- $\mu$  – коэффициент трения, магнитная проницаемость среды
- $\nu$  – частота вращения, частота колебаний, число молей
- $\rho$  – плотность, удельное сопротивление
- $\rho_{\lambda, T}$  – отражательная способность
- $\sigma$  – механическое напряжение, поверхностная плотность заряда, удельная электропроводность, постоянная Стефана-Больцмана
- $\tau$  – линейная плотность заряда, время релаксации
- $\Phi$  – поток вектора напряженности электрического поля, магнитный поток, световой поток
- $\Phi_3$  – энергетический поток
- $\varphi$  – угол поворота, потенциал электростатического поля, фаза колебаний
- $\varphi_0$  – начальная фаза колебаний
- $\Psi$  – полный магнитный поток (потокосцепление), волновая функция
- $\Omega$  – частота вынуждающей силы, телесный угол
- $\vec{\omega}$  – угловая скорость
- $\omega$  – циклическая частота

## ЧАСТЬ 1. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

*Колебаниями* называются процессы в той или иной мере повторяющиеся во времени. Различные колебательные процессы описываются одинаковыми уравнениями и характеристиками.

### §1 Общие сведения о колебаниях

#### 1.1 Классификация колебаний

В зависимости от физической природы повторяющегося процесса различают колебания:

- *механические* (колебания маятников, струн, частей машин и механизмов, сооружений, давления воздуха при распространении в нем звука и т. п.);
- *электромагнитные* (колебания переменного электрического тока в цепи; колебания векторов электрической напряженности  $\vec{E}$  и магнитной индукции  $\vec{B}$  переменного электромагнитного поля и т. п.);
- *электромеханические* (колебания мембраны телефона, диффузора электродинамического громкоговорителя и т. п.).

Система, совершающая колебания, называется колебательной системой или *осциллятором*. В зависимости от характера воздействия, оказываемого на колебательную систему, различают колебания:

- собственные;
- затухающие;
- вынужденные.

*Собственными* называются колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как ей был сообщен толчок, либо она была выведена из положения равновесия.

*Затухающими* называются свободные колебания, амплитуда которых уменьшается с течением времени. Затухание механических колебаний связано с наличием сил трения и сопротивления. Затухание колебаний в электрических колебательных системах обусловлено тепловыми потерями в проводниках.

*Вынужденными* называются колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается внешнему периодически изменяющемуся воздействию.

#### 1.2 Характеристики колебаний

##### 1. Мгновенное значение колеблющейся величины $\xi(t)$

$$\xi(t) = f(t) = f(t + T), \quad (1.1)$$

где  $f(t)$  – заданная периодическая функция времени.

Колеблющая величина определяет положение (координату) или состояние (заряд, давление, температуру, скорость) колебательной системы (тела, электрического контура).

2. **Амплитуда колебаний** ( $A$ ) – максимальное значение колеблющейся величины. Амплитуда – положительная величина.

3. **Период колебаний** ( $T$ ) – время одного полного колебания:

$$T = \frac{t}{N}.$$

$$[T]=\text{с}$$

4. **Частота колебаний** ( $\nu$ ) – число колебаний за единицу времени.  $\nu = \frac{N}{t}$

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (1.2)$$

$$[\nu]=1/\text{с}$$

5. **Угловая или циклическая частота** ( $\omega$ ) – число колебаний за  $2\pi$  секунд.

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.3)$$

$$[\omega]=\text{рад/с}$$

6. **Фаза колебаний** ( $\varphi$ ) – величина, определяющая мгновенное состояние колебательного процесса

$$\varphi = (\omega t + \varphi_0), \quad (1.4)$$

где  $\varphi_0$  – начальная фаза (значение фазы при  $t=0$ )

$$[\varphi]=\text{рад}$$

## § 2 Гармонические колебания

**Гармонические колебания** – колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется по закону косинуса или синуса:

$$\xi(t) = \xi_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2.1)$$

или

$$\xi(t) = \xi_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2.1a)$$

Оба представления равноправны. В дальнейшем мы будем считать, что колеблющаяся величина изменяется по закону косинуса.

Амплитуда колебаний и начальная фаза определяются начальными условиями, а частота и период – свойствами колебательной системы. Если хотя бы один из этих параметров изменяется во времени, то колебания не будут гармоническими.

**Посмотрите лекционные демонстрации:**

1. Маятник – запись колебаний песком.

[http://www.youtube.com/watch?v=ta3u4S62\\_zM](http://www.youtube.com/watch?v=ta3u4S62_zM)

2. Синусоида на осциллографе.

<http://www.youtube.com/watch?v=E8HwyQMКycc>



## 2.1 Скорость и ускорение при гармонических колебаниях

Скорость колеблющейся точки:

$$v = \frac{d\xi}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -v_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = v_{\max} \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.2)$$

где  $v_{\max} = A\omega_0$  – максимальное (амплитудное) значение скорости.

Ускорение колеблющейся точки

$$a = \frac{d^2\xi}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -a_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = a_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi), \quad (2.3)$$

где  $a_{\max} = A\omega_0^2$  – максимальное (амплитудное) значение ускорения.

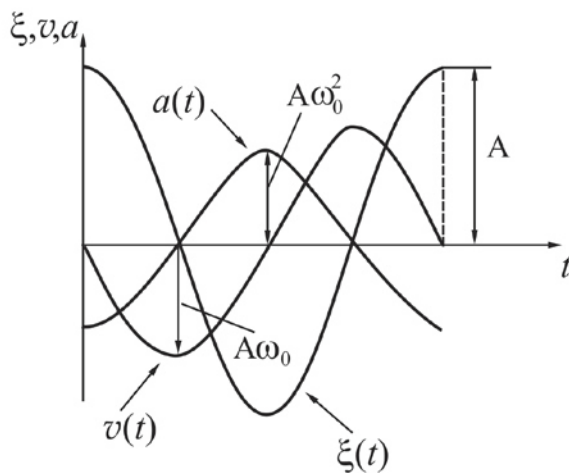


Рисунок 2.1

Гармонические колебания можно представить графически. Для случая  $\varphi_0=0$  они имеют вид, показанный на рис. 2.1. Из формул (2.2) и (2.3) и сравнения графиков можно сделать следующие выводы:

- $\xi(t)$  и  $a(t)$  колеблются в противофазе, то есть  $a(t)$  опережает  $\xi(t)$  по фазе на  $\pi$ ;
- $v(t)$  опережает  $\xi(t)$  по фазе на  $\pi/2$ .

## 2.2 Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

Согласно уравнению (2.3)

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Сравнив данное выражение с формулой (2.1), можно сделать вывод, что

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\omega_0^2 \xi, \quad \text{или:}$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega_0^2 \xi = 0 \quad (2.4)$$

Согласно обозначениям, принятым Ньютоном, производные по времени обозначаются следующим образом:

$$\frac{d\xi}{dt} = \dot{\xi}, \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = \ddot{\xi}. \quad (2.5)$$

Тогда дифференциальное уравнение гармонических колебаний можно записать в виде:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.4) называется **дифференциальным уравнением гармонических колебаний**. Оно представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Дифференцирование ведется по времени  $t$ .

Если при анализе физических процессов той или иной природы, сделанных на основе законов и приближений, возникает уравнение подобного вида, то это означает, что рассмотренная система может совершать гармонические колебания. Частота колебаний будет определяться свойствами самой системы.

### §3 Примеры систем, совершающих гармонические колебания

#### 3.1 Пружинный маятник

**Пружинный маятник** – тело массой  $m$ , колеблющееся на пружине жёсткостью  $k$  (рис. 3.1). Если сместить шарик от положения равновесия на расстояние, равное  $x$ , то возникшая сила упругости ( $F_{упр} = -kx$ ) стремится вернуть шарик в положение равновесия. Применяв второй закон Ньютона, можно получить следующее уравнение:

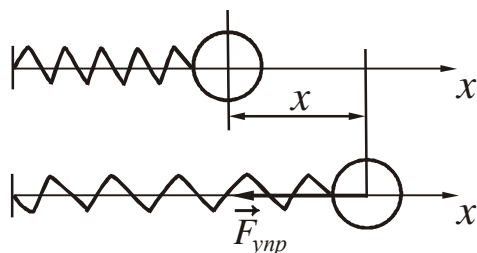


Рисунок 3.1

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (3.1)$$

где  $a = \frac{d^2 x}{dt^2}$  – ускорение, полученное шариком.

Введем обозначение:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2. \quad (3.2)$$

где  $\omega_0$  – это физический параметр, характеризующий колебательные свойства системы и называемый **собственной частотой** колебаний.

Тогда с учетом (3.2) уравнение (3.1) можно переписать в виде:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) называется дифференциальным уравнением гармонических колебаний. Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (3.4)$$

Период колебаний пружинного маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (3.5)$$

В рассмотренном примере сила по своей природе упругая. Сила иного происхождения может обнаруживать такую же закономерность, то есть оказываться равной  $-kx$ , где  $k$  – постоянная положительная величина. Силы такого вида, независимо от их природы, называются *квазиупругими*.

**Посмотрите лекционную демонстрацию:**

Грузы на пружинах.

<http://www.youtube.com/watch?v=VR3HXUWvF0U>

### 3.2 Физический маятник

**Физический маятник** – твердое тело, способное совершать колебания относительно неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс.

Отклоним маятник на угол  $\alpha$  от положения равновесия (рис. 3.2). При этом возникает вращающий момент, который стремится вернуть маятник в положение равновесия:

$$M = -mgl \sin \alpha,$$

$m$  – масса маятника,  $l$  – расстояние между точкой подвеса  $O$  и центром масс  $C$ . Знак “–” означает, что момент силы тяжести стремится уменьшить угол отклонения маятника.

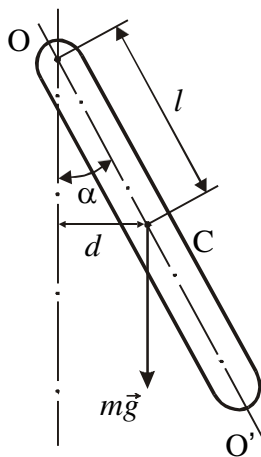


Рисунок 3.2

Будем считать, что угол отклонения мал (до  $3^\circ \div 5^\circ$ ), при этом  $\sin \alpha \approx \alpha$  ( $\alpha$  должен быть выражен в радианах). Применяв основной закон динамики вращательного движения, получим

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{J} \alpha = 0. \quad (3.6)$$

где  $J$  – момент инерции маятника относительно оси колебаний.

$\varepsilon = \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$  – угловое ускорение маятника,

Введем обозначение:

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{J}. \quad (3.7)$$

Тогда дифференциальное уравнение гармонических колебаний запишется в виде:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0 \quad (3.8)$$

Решение уравнений (3.6) и (3.8) имеет вид:

$$\alpha(t) = \alpha_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (3.9)$$

где  $A = \alpha_{\max}$  – амплитуда колебаний, то есть наибольший угол, на который отклоняется маятник.

Следовательно, *малые колебания физического маятника являются гармоническими.*

Период гармонических колебаний физического маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}. \quad (3.10)$$

### 3.3 Математический маятник

**Математический маятник** – это материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити и совершающая колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести.

Хорошим приближением к математическому маятнику служит небольшой шарик массой  $m$ , подвешенный на длинной нити длиной  $l$  (рис. 3.3). Математический маятник можно рассматривать как предельный случай физического маятника, масса которого сосредоточена в одной точке.

Движение физического маятника описывается уравнением (3.6).

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0.$$

Если нить длинная, то шарик можно считать материальной точкой. Момент инерции  $J$  шарика относительно оси колебаний в этом случае равен:

$$J = ml^2.$$

Период колебаний математического маятника

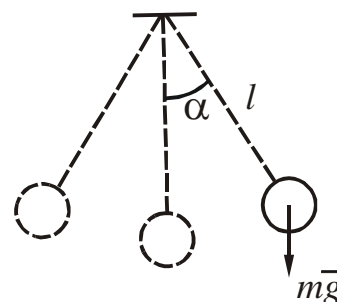


Рисунок 3.3

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (3.17)$$

Из сопоставления формул (3.16) и (3.17) получается, что математический маятник с длиной

$$l_{\text{пр}} = \frac{J}{ml} \quad (3.18)$$

будет иметь такой же период колебаний, как и данный физический маятник.

Величину (3.18) называют приведенной длиной физического маятника. Таким образом, **приведенная длина физического маятника** – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

**Посмотрите лекционную демонстрацию:**

Физический маятник.

<http://www.youtube.com/watch?v=DoyyKODtvzo>

### 3.4 Колебательный контур

**Колебательный контур** – цепь, содержащая катушку индуктивностью  $L$  и конденсатор ёмкостью  $C$  (рис. 3.4).

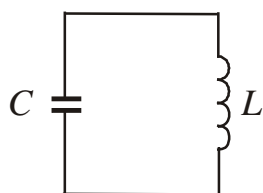


Рисунок 3.4

Колебания в контуре можно вызвать, сообщив обкладкам конденсатора некоторый начальный заряд. Заключим ключ  $K$  в положение 1 (рис. 3.5). На обкладках возникнут два разноименных заряда  $+q$  и  $-q$ . Между ними возникнет электрическое поле, энергия которого

$$W_{\text{эл}} = \frac{q^2}{2C}. \quad (3.19)$$

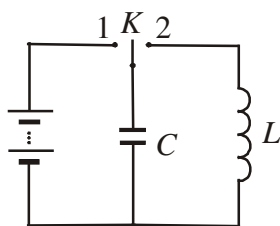


Рисунок 3.5

Если затем отключить источник напряжения и замкнуть конденсатор на индуктивность (ключ  $K$  – в положении 2), то конденсатор начнет разряжаться, в контуре потечёт ток. В результате этого энергия электрического поля будет уменьшаться, зато возникнет магнитное поле с энергией

$$W_{\text{м}} = \frac{LI^2}{2}, \quad (3.20)$$

которая возрастает. Активное сопротивление  $R=0$ , поэтому полная энергия не расходуется на нагревание проводов и остается величиной постоянной

$$W_{\text{эл}} + W_{\text{м}} = \text{const}$$

или

$$\frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \text{const}. \quad (3.21)$$

Продифференцируем функцию (3.21) по времени, произведем сокращения и, разделив каждый член уравнения на  $L$ , получим:

$$I \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} q \frac{dq}{dt} = 0. \quad (3.22)$$

Так как по определению  $\frac{dq}{dt} = I$ , то  $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2 q}{dt^2}$ .

На основании этого можно записать:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (3.24)$$

Введем обозначение

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad (3.25)$$

и приведём уравнение (3.24) к виду:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (3.26)$$

Решением этого уравнения является функция

$$q = q_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (3.27)$$

где  $q_{\max}$  – максимальное (амплитудное) значение заряда.

Таким образом, *заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону*. Период колебаний колебательного контура определяется по формуле, которая называется *формулой Томсона*:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (3.28)$$

Напряжение на конденсаторе:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_{\max}}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = U_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (3.29)$$

где  $U_{\max} = q_{\max}/C$  – амплитудное значение напряжения.

Продифференцировав функцию (3.27) по времени, получим выражение для силы тока:

$$I = -\omega_0 q_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = I_{\max} \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.30)$$

где  $I_{\max} = \omega_0 q_{\max}$  – амплитудное значение силы тока.

Таким образом, сила тока опережает по фазе напряжение на конденсаторе на  $\pi/2$ .

#### §4 Энергия колебаний

Колебания пружинного маятника совершаются под действием упругой силы. *Потенциальная энергия* гармонического колебания

$$W_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.1)$$

*Кинетическая энергия* гармонического колебания

$$W_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.2)$$

Полная механическая энергия гармонического колебания:

$$W = W_{\text{к}} + W_{\text{п}},$$

$$W = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{kA^2}{2} [\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)] = \frac{kA^2}{2}, \quad (4.3)$$

так как согласно (3.5)  $k = m\omega_0^2$  (см. §3, п.3.1).

Таким образом, **полная энергия гармонического колебания остаётся величиной постоянной.**

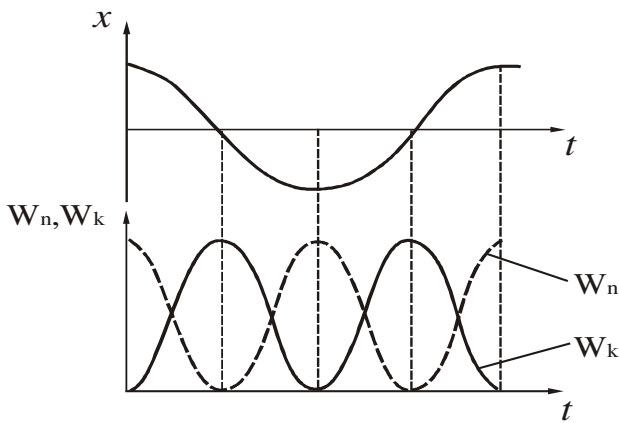


Рисунок 4.1

$$W = \frac{kA^2}{2}. \quad (4.4)$$

Графики зависимости кинетической и потенциальной энергии от времени представлены на рис. 4.1. Частота изменения энергии в 2 раза превышает частоту колебаний. В моменты наибольшего смещения  $x$  потенциальная энергия  $W_n$  достигает максимума. При прохождении системой положения равновесия

( $x=0$ ) потенциальная энергия равна нулю, а кинетическая энергия максимальна. Наибольшие значения кинетической и потенциальной энергии равны между собой.

## §5 Сложение гармонических колебаний

Любая колебательная система в общем случае может совершать одновременно несколько колебаний. Сложение нескольких колебаний значительно облегчается и становится наглядным, если изображать колебания графически в виде векторов на плоскости.

### 5.1 Графическое изображение гармонических колебаний.

#### Векторная диаграмма

Из произвольной точки  $O$ , взятой на оси  $x$ , отложим вектор длиной  $A$ , образующий с осью  $Ox$  угол  $\varphi_0$ , равный начальной фазе (рис. 5.1).

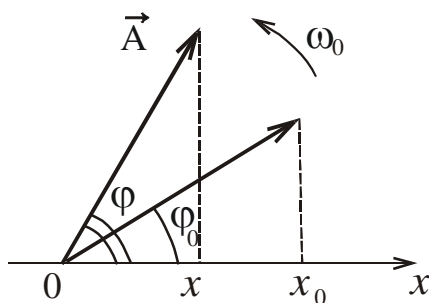


Рисунок 5.1

Если привести этот вектор во вращение с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$ , то проекция конца вектора будет перемещаться по оси  $x$  в пределах от  $-A$  до  $+A$ . С течением времени угол будет изменяться по закону

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0,$$

Соответственно, проекция вектора  $\vec{A}$  на ось  $x$  изменяется по закону

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

то есть совершает гармонические колебания.

Из сказанного следует, что *гармоническое колебание может быть задано с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а направление вектора образует с осью  $x$  угол, равный фазе колебания*. Полученная схема называется *векторной диаграммой*.

### 5.2 Сложение одинаково направленных гармонических колебаний

а). *Сложение колебаний одного направления и одинаковой частоты:*  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ . Смещение  $x$  колеблющейся точки будет равно сумме смещений  $x_1$  и  $x_2$ , которые описываются уравнениями:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_{01}) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{02}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Оба колебания представим в виде векторов  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  и сложим их по правилу параллелограмма (рис. 5.2). Проекция вектора  $\vec{A}$  на ось  $x$  равна сумме проекций слагаемых векторов:

$$x = x_1 + x_2.$$

Следовательно, вектор  $\vec{A}$  представляет собой результирующее колебание. Этот вектор вращается с той же угловой скоростью  $\omega_0$ , как и векторы  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$ ,

так что результирующее движение будет гармоническим колебанием с той же частотой  $\omega_0$ , амплитудой  $A$  и начальной фазой  $\varphi_0$ :

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (5.2)$$

Амплитуда и начальная фаза результирующего колебания определяются соотношениями;

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}. \quad (5.4)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}. \quad (5.5)$$

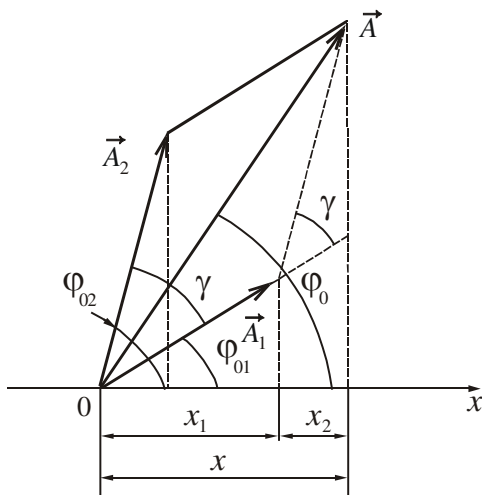


Рисунок 5.2

Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз. Если:

- 1)  $\varphi_{02} - \varphi_{01} = 2\pi m$ , где  $m=0, 1, 2, \dots$ , то  $A = A_1 + A_2$ .
- 2)  $\varphi_{02} - \varphi_{01} = (2m + 1)\pi$ , где  $m=0, 1, 2, \dots$ , то  $A = A_1 - A_2$ .



б). **Сложение колебаний одного направления с различными, но близкими частотами.** В результате получаются негармонические колебания называемые **биениями**.

Частота одного колебания  $\omega$ , частота второго –  $(\omega + \Delta\omega)$ . По условию  $\Delta\omega \ll \omega$ . Будем считать, что амплитуды обоих колебаний одинаковы и равны  $A$ . Начальные фазы обоих колебаний равны нулю. Складываемые уравнения будут иметь вид:

$$x_1 = A \cos \omega t, \quad (5.6)$$

$$x_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega)t. \quad (5.7)$$

Результирующее колебание опишется уравнением

$$x = x_1 + x_2 = A(\cos \omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t) = 2A \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \cos \omega t$$

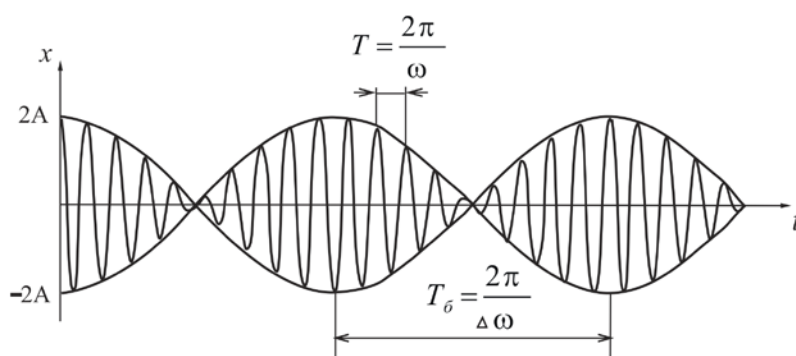


Рисунок 5.3

(во втором множителе пренебрегаем слагаемым  $\Delta\omega/2$  по сравнению с  $\omega$ ).

Уравнение, описывающее биения, имеет вид:

$$x = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right| \cos \omega t. \quad (5.8)$$

График функции (5.8) дан на рис. 5.3. Ам-

плитуда биений  $A(t) = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|$ . Циклическая частота  $\Delta\omega$  называется циклической частотой биений. Период биений  $T_{\text{бисен}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ .

Посмотрите лекционные демонстрации:

1. Запись биений песком.

<http://www.youtube.com/watch?v=sA8YxTrS5dU>

2. Биение на камертонах.

<http://www.youtube.com/watch?v=gfC3HXepxgE>

3. Биения на осциллографе – 1.

<http://www.youtube.com/watch?v=-sjLkrjJkxU>

4. Биения на осциллографе – 2.

<http://www.youtube.com/watch?v=EnFerU0eiWo>

### 5.3 Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

а). **Сложение колебаний одинаковой частоты.** Начало отсчета выберем так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю. Тогда уравнения колебаний запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= A_1 \cos \omega t \\ y &= A_2 \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (5.10)$$

где  $\alpha = \varphi_{02} - \varphi_{01}$  – разность фаз складываемых колебаний. Эти два уравнения составляют систему, которая задает траекторию движения в параметрической форме. Чтобы получить уравнение траектории в обычной форме, надо исключить из (5.10) параметр  $t$ . В результате получим:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \alpha = \sin^2 \alpha. \quad (5.15)$$

Уравнение (5.15) представляет собой уравнение эллипса, оси которого ориентированы относительно координатных осей  $x$  и  $y$  произвольно. Ориентация осей эллипса и его размеры зависят от амплитуд складываемых колебаний и разности фаз.

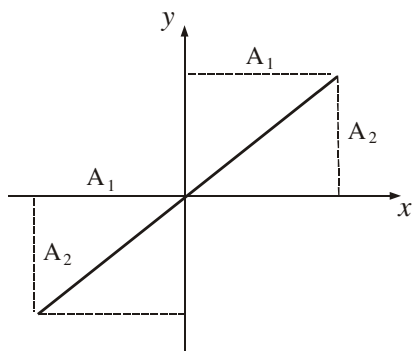


Рисунок 5.4

Частные случаи.

1. Разность фаз складываемых колебаний  $\alpha = \Delta\varphi = 0$ . В этом случае уравнение (5.15) примет вид

$$y = \frac{A_2}{A_1} x. \quad (5.16)$$

Это уравнение прямой, проходящей через начало координат и лежащей в I и III четвертях (рис. 5.4)

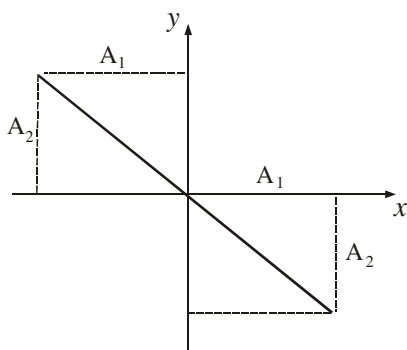


Рисунок 5.5

2. Разность фаз складываемых колебаний  $\alpha = \Delta\varphi = \pm\pi$ .

Уравнение (5.15) примет вид:

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x. \quad (5.17)$$

Это уравнение прямой, проходящей через начало координат и лежащей в II и IV четвертях (рис. 5.5):

3. Разность фаз складываемых колебаний

$$\alpha = \Delta\varphi = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Уравнение (5.15) переходит в каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1, \quad (5.18)$$

Полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам. Если  $A_1 = A_2 = R$ , то эллипс вырождается в окружность

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (5.19)$$

Случаи  $\alpha = \pi/2$  и  $\alpha = \Delta\varphi = -\pi/2$  отличаются направлением движения по эллипсу или окружности (рис. 5.6).

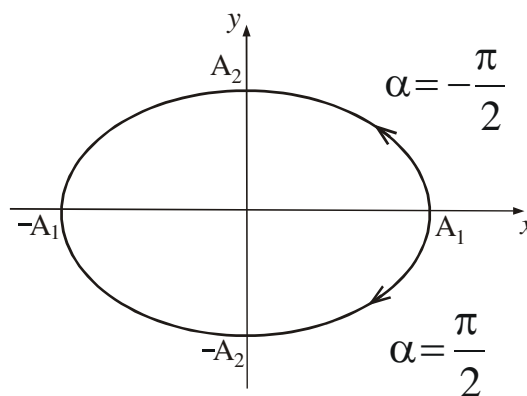


Рисунок 5.6

б). **Сложение взаимно-перпендикулярных колебаний с кратными частотами** (частоты относятся как целые числа). Точка в результате будет двигаться вдоль замкнутой кривой, форма которой зависит от отношения амплитуд  $A_2/A_1$ , кратности частот  $\omega_2/\omega_1$  и разности начальных фаз  $\Delta\varphi$ .

Замкнутые траектории точки, одновременно совершающей гармонические колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях, называются **фигурами Лиссажу**. Фигуры Лиссажу вписываются в прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат  $Ox$  и  $Oy$  и равны соответственно  $2A_1$  и  $2A_2$ . Отношение частот  $\omega_y/\omega_x$  равно отношению числа касаний фигуры Лиссажу с горизонтальными и вертикальными

сторонами прямоугольника, в который она вписана.

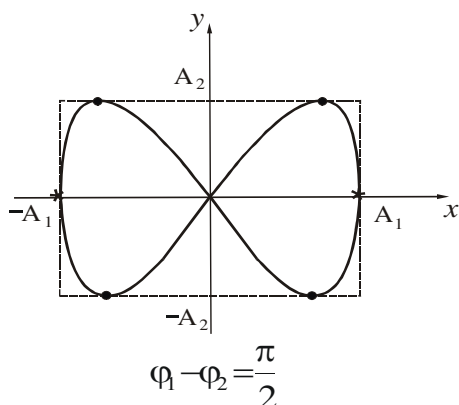


Рисунок 5.7

$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{n_x}{n_y}. \quad (5.20)$$

**Пример:** Число касаний фигуры с горизонтальными сторонами:  $n_x=4$ , число касаний с вертикальными сторонами:  $n_y=2$  (рис. 5.7). Отношение частот

$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{4}{2} = 2.$$

**Посмотрите лекционные демонстрации:**

1. Фигуры Лиссажу: запись песком.  
<http://www.youtube.com/watch?v=rdWWvjH8cPM>
2. Фигуры Лиссажу: осциллограф.  
<http://www.youtube.com/watch?v=hUu653khUIE>

**§6 Затухающие колебания**

**6.1 Затухающие колебания пружинного маятника**

В реальных условиях на шарик массы  $m$ , совершающий колебания вдоль оси  $Ox$  под действием силы упругости  $F_{упр} = -kx$ , действует также сила сопротивления (вязкого трения). При малых скоростях она пропорциональна скорости

$$F_c = -r v = -r \frac{dx}{dt}, \quad (6.1)$$

где  $r$  – коэффициент сопротивления. Знак “–” обусловлен тем, что сила и скорость имеют противоположные направления. В этом случае второй закон Ньютона запишется в виде

$$-kx - r \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (6.2)$$

Разделив обе части полученного уравнения на  $m$ , перепишем его следующим образом:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0, \quad (6.2a)$$

или

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (6.3)$$

где обозначено:

$$\beta = \frac{r}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Величину  $\beta$  называют **коэффициентом затухания**.  $\omega_0$  – собственная частота колебаний, то есть частота, с которой совершались бы свободные колебания при отсутствии трения.

Уравнение (6.3) называют **дифференциальным уравнением затухающих колебаний**. Если затухание невелико ( $\beta < \omega_0$ ), то решение имеет вид:

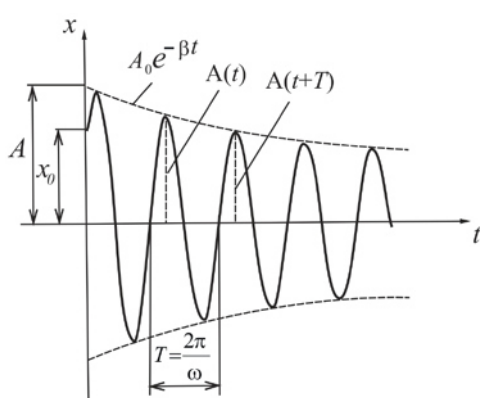


Рисунок 6.1

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (6.4)$$

$$\text{где } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (6.5)$$

$\omega$  – частота затухающих колебаний.

Согласно (6.4) движение маятника можно рассматривать как колебание с частотой  $\omega$  и амплитудой  $A$ , изменяющейся по закону

$$A = A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \quad (6.6)$$

График функции  $x(t)$  дан на рисунке 6.1.

### Посмотрите лекционные демонстрации:

1. Затухающие колебания маятника.

<http://www.youtube.com/watch?list=PL9F96E1E5307658DB&v=ui0h6PfBvBM>

2. Затухающие колебания камертона.

<http://www.youtube.com/watch?v=LP0u1GWRtFs&list=PL9F96E1E5307658DB>

## 6.2 Затухающие колебания в колебательном контуре

Всякий реальный контур (рис. 6.2) обладает активным сопротивлением ( $R \neq 0$ ). Энергия, запасённая в контуре, расходуется в этом сопротивлении на нагревание, поэтому свободные колебания затухают.

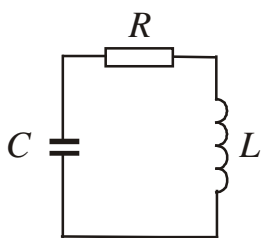


Рисунок 6.2

Потери энергии равны количеству тепла, выделившемуся на активном сопротивлении:

$$-d(W_{\text{эл}} + W_{\text{м}}) = \delta Q. \quad (6.7)$$

Знак “-“ перед дифференциалом означает, что энергия уменьшается.

Согласно (3.19) и (3.20):  $W_{\text{эл}} = \frac{q^2}{2C}, \quad W_{\text{м}} = \frac{LI^2}{2}.$

По закону Джоуля – Ленца  $\delta Q = I^2 R dt$ .

Сделав подстановку в (6,7) и проведя математические преобразования, получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad (6.10)$$

или

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (6.11)$$

где

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Уравнение (6.11) по своему виду совпадает с дифференциальным уравнением (6.3) для затухающих механических колебаний. Если затухание невелико ( $\beta < \omega_0$ ), то его решение имеет вид:

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (6.12)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – частота затухающих колебаний. (6.13)

График функции  $q(t)$  имеет тот же вид, что и  $x(t)$  (см. рис. 6.1).

### Посмотрите лекционную демонстрацию:

Затухающие колебания на экране осциллографа.

<http://www.youtube.com/watch?v=dmeYXD5zIjU>

## 6.3 Основные характеристики затухающих колебаний

Величинами, характеризующими затухающие колебания, являются.

1. **Коэффициент затухания** ( $\beta$ ) – скалярная физическая величина, характеризующая скорость затухания.

$$[\beta] = 1/c$$

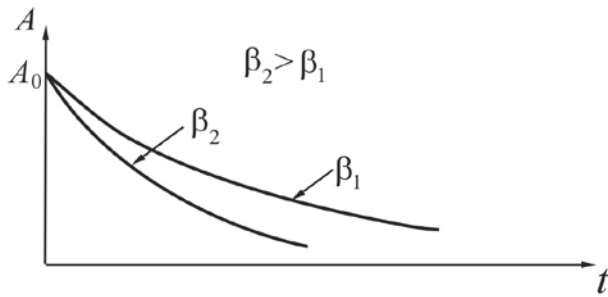


Рисунок 6.3

Для механических колебаний

$$\beta = \frac{r}{2m}. \quad (6.14)$$

Для электромагнитных колебаний

$$\beta = \frac{R}{2L}. \quad (6.15)$$

Чем больше коэффициент затухания, тем быстрее уменьшается амплитуда

(рис. 6.3).

2. **Время релаксации** ( $\tau$ ) – время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e = 2,71 \dots$  раз ( $e$  – основание натуральных логарифмов).

$$\tau = \frac{1}{\beta} \quad (6.16)$$

3. **Логарифмический декремент затухания** ( $\lambda$ ) – безразмерная величина, количественная характеристика быстроты затухания колебаний, численно равная натуральному логарифму отношения двух следующих друг за другом амплитуд  $A(t)$  и  $A(t + T)$  в одну и ту же сторону (см. рис. 6.1)

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t + T)} \quad (6.17)$$

Логарифмический декремент затухания и коэффициент затухания связаны соотношением.

$$\lambda = \beta T. \quad (6.18)$$

4. **Число колебаний за время релаксации** –  $N_e$ .

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\lambda}. \quad (6.19)$$

5. **Добротность колебательной системы** ( $Q$ ) – безразмерная физическая величина, характеризующая убыль энергии за период и равная произведению  $2\pi$  на отношение энергии  $W(t)$  колебаний системы в произвольный момент времени  $t$  к убыли этой энергии за один период  $T$ .

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{\Delta W_T}, \quad (6.20)$$

где  $\Delta W_T = W(t) - W(t + T)$ .

Если затухание невелико, то добротность определяется по соотношению:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}. \quad (6.21)$$

Большим значениям  $Q$  соответствует слабое затухание.

**6. Энергия колебаний.** Так как энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды (см. формулу (4.4)), то закон изменения энергии при затухающих колебаниях примет вид:

$$W(t) = W_0 e^{-2\beta t}, \quad (6.22)$$

где в соответствии с (4.4):

$$W_0 = \frac{kA_0^2}{2}. \quad (6.23)$$

#### 6.4 Аперидический процесс

Согласно (6.5) частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Если  $\beta = \omega_0$ , то частота затухающих колебаний обращается в нуль, а период – в бесконечность, то есть движение перестает быть периодическим.

Если  $\beta > \omega_0$ , то движение носит аперидический (непериодический) характер. Это означает, что выведенная из положения равновесия система возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний.

Таким образом, при  $\beta \geq \omega_0$  колебательная система переходит к аперидическому процессу.

На практике нередко возникает задача погашения колебаний в момент их возникновения (например, колебания стрелки измерительного прибора, колебаний кузова автомобиля). Устройства, которые позволяют увеличить затухание колебательной системы, называются **демпферами** или **амортизаторами**.

### §7 Вынужденные колебания

Чтобы вызвать вынужденные колебания нужно оказывать на систему внешнее периодически изменяющееся воздействие.

#### 7.1 Вынужденные механические колебания

В качестве колебательной системы рассмотрим пружинный маятник, совершающий колебания вдоль оси  $Ox$  (см. п. 3.1). Переменная внешняя сила, приложенная к системе и вызывающая ее механические колебания, называется **вынуждающей силой**. Пусть вынуждающая сила изменяется по закону

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t, \quad (7.1)$$

где  $\Omega$  – частота вынуждающей силы, а  $F_0$  – ее амплитудное значение. Кроме вынуждающей силы на маятник действуют также те силы, что и при свободных колебаниях, то есть квазиупругая сила и сила сопротивления (см. п. 6.1). Запишем второй закон Ньютона:

$$-kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \Omega t = m \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Разделив это уравнение на  $m$ , перепишем его в виде:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t, \quad (7.2)$$

или

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t, \quad (7.3)$$

где

$$f_0 = \frac{F_0}{m}, \quad \beta = \frac{r}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Уравнение (7.3) является **дифференциальным уравнением вынужденных механических колебаний**. Из теории дифференциальных уравнений известно, что общее решение данного неоднородного дифференциального уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

Общее решение однородного уравнения уже известно (см. формулу (6.4)):

$$x_1(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Можно показать, что частное решение, удовлетворяющее правой части уравнения (7.2), имеет вид:

$$x_2(t) = A \cos(\Omega t + \varphi).$$

Амплитудное значение  $x_1(t)$ , равное  $A_0 e^{-\beta t}$ , после начала вынужденных колебаний более или менее быстро уменьшается. Следовательно, через некоторое время  $\tau$  после начала колебаний свободные колебания маятника практически прекращаются:

$x(t) \approx x_2(t)$ . Маятник переходит в состояние установившихся вынужденных колебаний, которые совершаются с частотой вынуждающей силы (см. рис. 7.1):

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi), \quad (7.4)$$

где  $\varphi$  – представляет собой величину отставания по фазе вынужденного колебания от обусловив-

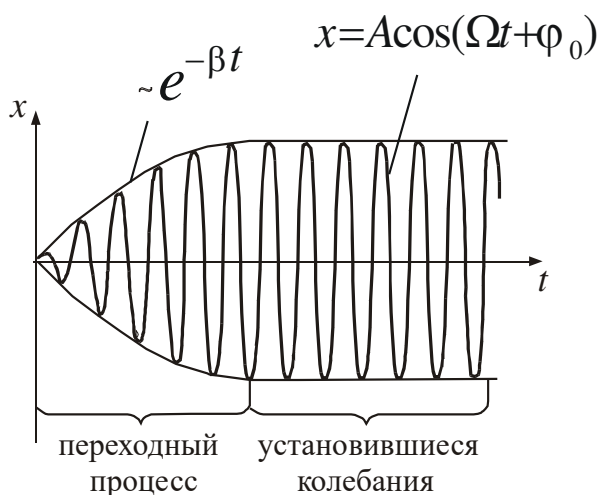


Рисунок 7.1



шей его вынуждающей силы. Амплитуда этих колебаний  $A$  и значение  $\varphi$  определяются как параметрами системы  $(m, \omega_0)$ , так и параметрами вынуждающей силы  $(F_0, \Omega)$ .

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \quad (7.5)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (7.6)$$

График зависимости амплитуды  $A$  вынужденных колебаний от частоты  $\Omega$  вынуждающей силы (т.е. амплитудно-частотная характеристика) имеет вид, представленный на рис. 7.2.

Если  $\Omega = 0$ , то  $\varphi = 0$ . В этом случае

$$A = A_{\text{ст}} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}. \quad (7.7)$$

Амплитуду  $A_{\text{ст}}$  называют **статическим смещением** (статической амплитудой) маятника из положения равновесия под действием постоянной силы  $F_0$ .

При некоторой частоте  $\Omega_p$ , называемой резонансной, амплитуда достигает максимального значения  $A_p$ .

**Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к собственной частоте  $\omega_0$  называется резонансом.**

Чтобы определить резонансную частоту  $\Omega_p$ , надо исследовать выражение (7.5) на экстремум. При этом для резонансной частоты получится следующее выражение:

$$\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (7.8)$$

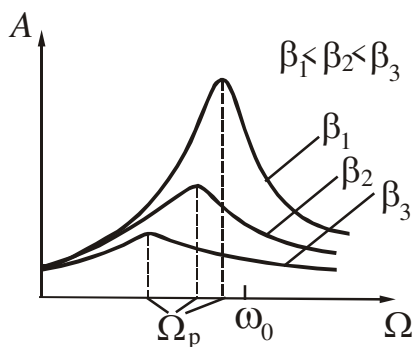


Рисунок 7.3

Подставив это значение частоты в (7.5), получим выражение для резонансной амплитуды:

$$A_p = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (7.9)$$

Из (7.9) следует, что при  $\beta = 0$  (сил сопротивления нет) амплитуда при резонансе обращалась бы в бесконечность. Резонансная частота при этом совпала бы с собственной частотой  $\omega_0$ .

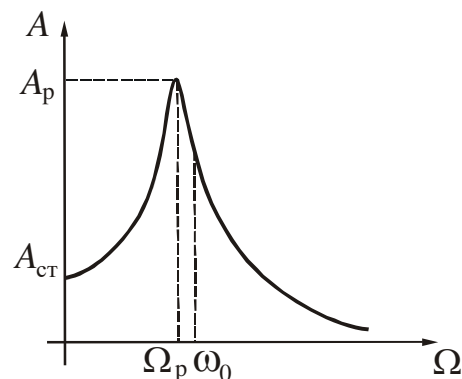


Рисунок 7.2

Из (7.8) и (7.9) также следует, что чем меньше  $\beta$ , тем выше и правее лежит максимум кривой (рис. 7.3).

Для  $\beta \ll \omega_0$  отношение резонансной амплитуды к статической равно добротности системы:

$$\frac{A_p}{A_{ст}} = Q. \quad (7.10)$$

Добротность, таким образом, характеризует резонансные свойства колебательного контура.

**Посмотрите лекционные демонстрации:**

1. Резонанс доски с мотором.

<http://www.youtube.com/watch?v=XbGCogAOgc>

2. Резонанс: колебания связанных маятников.

<http://www.youtube.com/watch?list=PL0EF568B1B4D11D88&v=ux27Dovb9Fs>

3. Механический частотомер: резонансный язычковый частотомер и звуковой генератор.

<http://www.youtube.com/watch?v=4CBOOfGa1uTE>

4. Линейка и струя воды.

<http://www.youtube.com/watch?v=66lVogXjkWg>

**7.2 Вынужденные колебания в колебательном контуре**

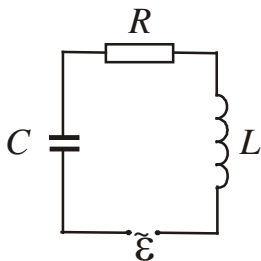


Рисунок 7.4

Чтобы вызвать вынужденные колебания в колебательном контуре, нужно включить последовательно с элементами контура переменную эдс (рис. 7.4):

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \Omega t, \quad (7.11)$$

где  $\varepsilon_0$  – амплитудное значение эдс.

Получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний, применив закон сохранения энергии. В левую часть уравнения (6.7) (см. § 6, п. 6.2) добавим элементарную работу, которую совершает источник эдс:

$$\delta A = \varepsilon I dt. \quad (7.12)$$

Уравнение (6.7) примет вид:

$$-d(W_{эл} + W_M) + \delta A = \delta Q. \quad (7.13)$$

Проведя такие же преобразования, как в п. 6.2, получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{\varepsilon_0}{L} \cos \Omega t \quad (7.14)$$

или:

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_0}{L} \cos \Omega t. \quad (7.15)$$

Здесь  $\beta$  и  $\omega_0$  определяются теми же формулами, что в случае затухающих колебаний (см. п.6.2).

Уравнение (7.15) является **дифференциальным уравнением вынужденных электромагнитных колебаний**. Оно имеет тот же вид, что и дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний (7.3). Следовательно, его решение также представим в виде:

$$q(t) = q_1(t) + q_2(t),$$

где  $q_1(t) = q_{01}e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$  – общее решение однородного дифференциального уравнения;

$q_2(t) = q_0 \cos(\Omega t + \varphi)$  – частное решение данного неоднородного уравнения.

При установившихся вынужденных колебаниях заряд изменяется по гармоническому закону:

$$q(t) = q_0 \cos(\Omega t + \varphi). \tag{7.16}$$

Амплитудное значение заряда  $q_0$  и сдвиг фаз  $\varphi$  находятся по формулам, аналогичным для механических колебаний:

$$q_0 = \frac{\varepsilon_0}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} = \frac{\varepsilon_0}{\Omega\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}}, \tag{7.17}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{R}{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}. \tag{7.18}$$

В формулах (7.17) и (7.18) произведена замена:

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

График зависимости заряда  $q$  от частоты  $\Omega$  совпадает с графиком  $A = f(\Omega)$  для вынужденных механических колебаний (см. рис. 7.3)

Сила тока в колебательном контуре при установившихся колебаниях

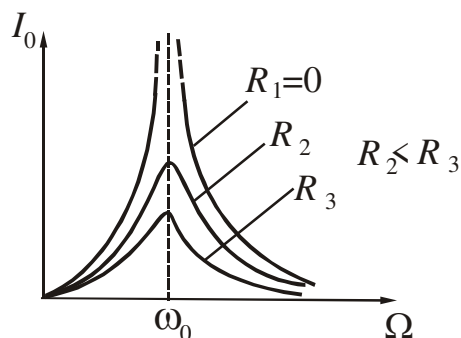


Рисунок 7.5

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0\Omega \sin(\Omega t + \varphi) = I_0 \cos\left(\Omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \tag{7.19}$$

где  $I_0 = q_0\Omega$  – амплитуда силы тока,  $\varphi = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$  – сдвиг фаз между током и приложенным напряжением.

Графики зависимости силы тока  $I_0$  от  $\Omega$  при различных  $R$  (см. рис. 7.5) называются

**резонансными кривыми.** Резонансная циклическая частота  $\Omega_p$ , соответствующая максимуму амплитуды силы тока в контуре, не зависит от активного сопротивления  $R$ :

$$\Omega_p = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (7.20)$$

Явление резонанса используют в акустике для усиления звучания музыкальных инструментов, в электротехнике – для измерения частоты тока, в радиотехнике – для выделения нужного сигнала из других, отличающихся частотой, а также в многоканальной телеграфии и телефонии.

Резонанс может быть причиной аварий и катастроф. Периодические толчки от поршневых машин, силовых валов турбин, пропеллеров передаются на фундаментальные и другие части машин. Поэтому, например, собственная частота вибраций корпуса корабля или крыла самолета должна значительно отличаться от частоты возмущающей силы, обусловленной вращением силовых винтов. Амплитуду опасных резонансных колебаний также уменьшают, увеличив коэффициент затухания (это делается в амортизаторе автомобиля). Явление резонанса становится незаметным.

## §8 Общие сведения о волнах

Кроме механических колебаний отдельных тел в природе широко распространены колебания сплошных твёрдых, жидких и газообразных сред. Эти колебания не остаются на том месте, где они возникли, а распространяются в пространстве.

**Волна** – это процесс распространения колебаний в пространстве.

### 8.1 Классификация волн

В зависимости от физической природы источника колебаний волны делят на:

- механические (звуковые, ударные, сейсмические и т.д.);
- волны на поверхности жидкости;
- электромагнитные (шкала электромагнитных волн в интервале от радиоволн до гамма-излучения).

Механическими волнами называются механические возмущения, возникающие в упругой среде, поэтому механические волны имеют второе название – **упругие** волны.

Поверхностные волны распространяются вдоль свободной поверхности жидкости или вдоль поверхности двух жидкостей, которые не смачиваются. В поверхностных волнах частицы жидкости одновременно совершают поперечные и продольные колебания, описывая эллиптические или более сложные траектории.

В зависимости от взаимной ориентации направления колебаний и направления распространения волн различают:

- поперечные волны
- продольные волны.

Волна называется **поперечной**, если направление колебаний частиц среды перпендикулярно направлению распространения волны (рис. 8.1 а).

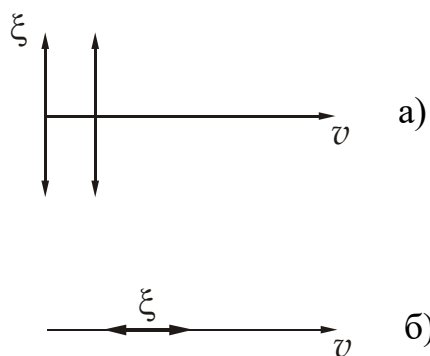


Рисунок 8.1

Волна называется **продольной**, если направление колебаний частиц среды происходит вдоль направления распространения волны (рис. 8.1 б).

Поперечные волны возникают только в твёрдых средах. Продольные волны возникают в твёрдых, жидких и газообразных средах.

Распространяясь от источника колебаний, волновой процесс охватывает все новые области пространства. Область пространства, в которой существует волновой процесс, называется

**волновым полем**. **Фронт волны** – поверхность, которая отделяет часть пространства, уже вовлеченную в волновой процесс, от области, в которой колебания ещё не возникли. В зависимости от геометрии фронта волны делят на:

- плоские (рис 8.2а);
- сферические (рис 8.2б).

Стрелки на рисунке указывают направление распространения волны.

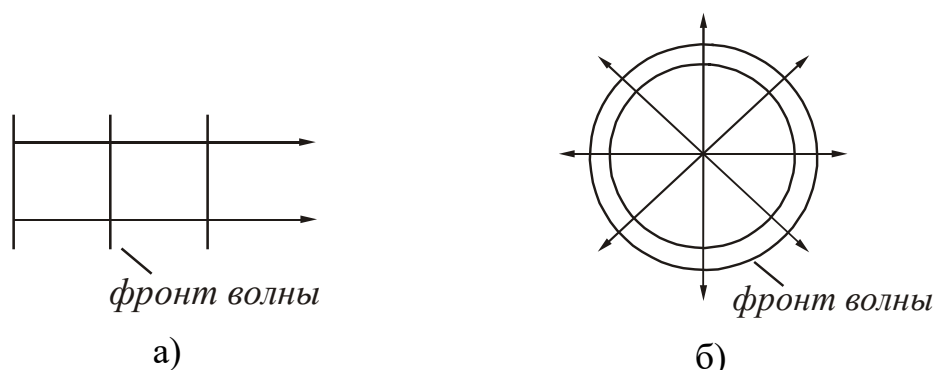


Рисунок 8.2

Плоские волны возникают от плоского или удаленного источника. Их волновые фронты представляют собой плоскости. Сферические волны возникают от точечного источника в пространстве. Их волновые фронты представляют собой сферы.

### Посмотрите лекционные демонстрации:

1. Механические модели волн – 1.

<http://www.youtube.com/watch?v=YJrtkpR1s24>

2. Механические модели волн – 2

<http://www.youtube.com/watch?v=uKI69DR0HZI>

## 8.2 Характеристики волн

Гармоническая волна – это бесконечная синусоидальная волна, в которой все изменения состояния происходят по закону синуса или косинуса. Такие волны могли бы распространяться в однородной среде без искажения формы. На рис. 8.3 дан профиль поперечной волны в какой-то момент времени  $t$ .

Основными характеристиками волны являются:

**Длина волны** ( $\lambda$ ) – расстояние между ближайшими точками, колеблющимися в одинаковой фазе (рис. 8.3).

**Период колебаний** ( $T$ ) – время, в течение которого совершается один полный цикл колебаний.

**Амплитуда** ( $A$ ) – максимальное отклонение физической величины от положения равновесия.

Длина волны и период связаны соотношением:

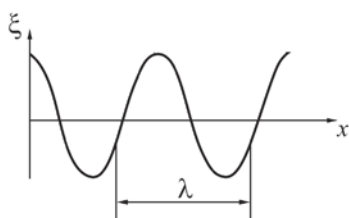


Рисунок 8.3

$$\lambda = vT, \quad (8.1)$$

где  $v$  – скорость распространения волны.

Данная формула справедлива для волн любой природы. Используя соотношение (8.1), можно дать другое определение длины волны.

**Длина волны** – это расстояние, на которое распространяется фронт волны за время, равное периоду колебаний.

**Частота** ( $\nu$ ) – число колебаний за единицу времени:

$$\nu = 1/T.$$

Из (8.1) получим

$$\lambda = \frac{v}{\nu}. \quad (8.2)$$

Период измеряется в секундах, частота – в герцах.

## §9 Плоская монохроматическая волна

Гармоническая волна называется *монохроматической*, если её частота  $\nu$  и амплитуда  $A$  с течением времени не меняются. Если фронт волны представляет собой плоскость, то волна называется *плоской*.

### 9.1 Уравнение плоской монохроматической волны

Уравнением волны называется выражение, которое определяет, как смещение  $\xi$  колеблющейся частицы зависит от координаты  $x$  и времени  $t$ :  $\xi = \xi(x, t)$ . Ось  $Ox$  совместим с направлением распространения волны. Волновые поверхности плоской волны будут перпендикулярны оси  $x$  (рис. 9.1).

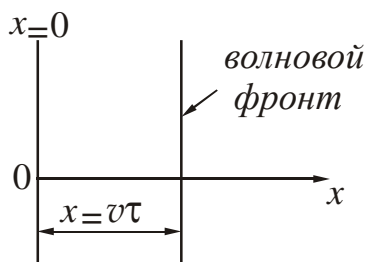


Рисунок 9.1

Колебания точек, лежащих в плоскости  $x = 0$ , то есть колебания источника, имеют вид:

$$\xi(0, t) = A \cos \omega t.$$

Чтобы колебания распространились от плоскости  $x=0$  до плоскости с произвольной координатой  $x$ , нужно время

$$\tau = \frac{x}{v},$$

где  $v$  – скорость перемещения фронта волны.

Это значит, что колебания частиц, лежащих в плоскости  $x$ , будут отставать по времени на  $\tau$ . Их уравнение имеет вид:

$$\xi(x, t) = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) \quad (9.1)$$

Уравнению (9.1) можно придать другой вид. Для этого введем величину

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (9.2)$$

которая называется волновым числом. **Волновое число** показывает, сколько длин волн укладывается на расстоянии  $6,28$  м. С учетом (9.2), а также того, что  $\omega = 2\pi/T$ , а  $\lambda = vT$ , получим:

$$\xi(x, t) = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right),$$

или

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx). \quad (9.3)$$

Уравнения (9.1), (9.3) называют **уравнениями плоской бегущей волны**.

Фронт волны представляет собой плоскость постоянной фазы. Зафиксируем какое-либо значение фазы в уравнении (9.3), положив, что

$$(\omega t - kx) = \text{const}.$$

Продифференцируем это выражение по времени и преобразуем его. Получим:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

Значение  $\frac{dx}{dt} = v$  дает скорость, с которой перемещается фазовая плоскость:

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (9.4)$$

Таким образом, скорость распространения гармонической волны – это скорость перемещения фазовой плоскости, поэтому её называют **фазовой скоростью** ( $v = v_{\text{фаз}}$ ).

Волны распространяются с конечной скоростью, зависящей от природы волны и свойств среды.

а) в твёрдых телах:

Скорость распространения продольной волны:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (9.5)$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $\rho$  – плотность среды.

Скорость распространения поперечной волны:

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (9.6)$$

где  $G$  – модуль сдвига.

б) в газах:

Скорость распространения продольной волны (звука):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \quad (9.7)$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты газа,  $M$  – молярная масса газа,  $R$  – молярная газовая постоянная,  $T$  – термодинамическая температура.



## 9.2 Волновое уравнение

Уравнение любой волны является решением дифференциального уравнения, называемого **волновым**. Для плоской монохроматической волны, распространяющейся вдоль оси  $Ox$ , оно имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (9.10)$$

Если при анализе физических процессов той или иной природы вытекает уравнение подобного вида, то это означает, что в данной среде возможно возникновение волновых процессов.

В трехмерном пространстве волновое уравнение (9.10) примет вид:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (9.11)$$

## 9.3 Перенос энергии волной. Вектор Умова

Частицы среды, в которой распространяется волна, не перемещаются поступательно, а совершают колебания около своих положений равновесия. За счёт этих колебаний среда, в которой распространяется волна, обладает дополнительным запасом энергии. Эта энергия доставляется от источника колебаний в различные точки среды волной, следовательно, волна переносит энергию.

Переносимую энергию характеризуют потоком энергии.

**Поток энергии** ( $\Phi$ ) – скалярная физическая величина, численно равная количеству энергии, переносимому волной через некоторую поверхность за единицу времени:

$$\Phi = \frac{dW}{dt}. \quad (9.19)$$

$$[\Phi] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}.$$

Для характеристики течения энергии в различных точках пространства вводится величина, называемая плотностью потока энергии.

**Плотность потока энергии** ( $\vec{j}$ ) – векторная физическая величина, численно равная энергии, переносимой за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны:

$$j = \frac{dW}{dS_{\perp} dt}. \quad (9.20)$$

$$[j] = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Направление вектора плотности потока энергии совпадает с направлением скорости распространения волны:

$$\vec{j} = j \cdot \frac{\vec{v}}{v} = \frac{dW}{dS_{\perp} dt} \cdot \frac{\vec{v}}{v}. \quad (9.21)$$

Вектор плотности потока энергии впервые был введен Н.А. Умовым и, поэтому, называется **вектором Умова**.

**Объёмная плотность энергии** ( $w$ ) – скалярная физическая величина, численно равная энергии, заключенной в единице объёма.

$$w = \frac{dW}{dV}.$$

Среднее значение объёмной плотности энергии в каждой точке равно:

$$\langle w \rangle = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2}. \quad (9.18)$$

где  $\rho$  – плотность среды

Плотность потока энергии связана с объёмной плотностью энергии соотношением:

$$j = w v. \quad (9.22)$$

В векторном виде

$$\vec{j} = w \vec{v}, \quad (9.23)$$

где  $\vec{v}$  – вектор, модуль которого равен фазовой скорости, а направление совпадает с направлением распространения волны (и переноса энергии).

Скалярная величина  $I$ , равная модулю среднего значения вектора Умова, называется **интенсивностью волны**. Для звуковой волны – интенсивностью звука или силой звука.

$$I = \langle |j| \rangle = v \langle w \rangle = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2} v. \quad (9.24)$$

Распространение упругих волн в среде **не связано с переносом массы**. При колебательном движении частиц **происходит перенос энергии** за счёт передачи её от одной частицы к другой.

## §10 Звуковые волны

### 10.1 Характеристики звука

**Звуковыми волнами** называются упругие волны с частотами от 16 Гц до 20000 Гц, воспринимаемые органами слуха человека. Эти волны являются продольными. Они распространяются в твёрдых телах, жидкостях и газах.

Волны с частотами, меньшими 16 Гц, называют **инфразвуком**; волны с частотами, превышающими 20000 Гц, называют **ультразвуком**.

Воспринимаемые звуки можно различать по громкости, высоте и тембру. Каждой из этих физиологических характеристик соответствует определенная физическая характеристика звуковой волны (табл. 10.1).

Таблица 10.1. Характеристики звуковой волны

Физиологические	Физические
– громкость	– сила звука
– высота	– частота звука
– тембр	– спектральный состав

Громкость (сила звука) зависит исключительно от амплитуды колебания. Высота звука определяется частотой его колебаний.

Чтобы вызвать ощущение звука волна должна обладать некоторой минимальной интенсивностью, которая называется **порогом слышимости**. Порог слышимости зависит от частоты звука и различен для разных людей. Наиболее чувствительно ухо к частотам от 1000 до 4000 Гц. Интенсивность звука при этом порядка  $10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup> (рис. 10.1).

При интенсивностях  $1 \div 10$  Вт/м<sup>2</sup> волна перестает восприниматься как звук, вызывая в ухе ощущение боли и давления. Это значение интенсивности называется **порогом болевого ощущения**. Порог болевого ощущения также зависит от частоты (рис. 10.1).

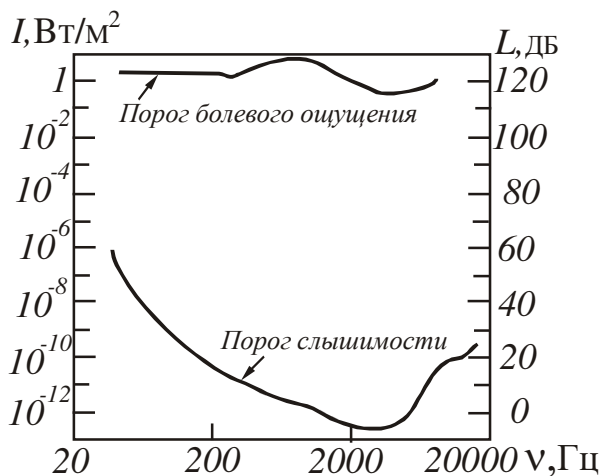


Рисунок 10.1

**Уровень громкости ( $L$ )** определяется как логарифм отношения интенсивности  $I$  данного звука к интенсивности  $I_0$ , на пороге слышимости ( $I_0 \approx 10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup> при стандартной частоте 1000 Гц):

$$L = \lg \frac{I}{I_0}. \quad (10.1)$$

$$[L] = \text{Б (бел*)}$$

Обычно пользуются в 10 раз мень-

шими единицами – **децибелами (дБ)**.

Весь диапазон интенсивностей, при которых волна вызывает в ухе звуковое ощущение (от  $10^{-12}$  до  $10$  Вт/м<sup>2</sup>), соответствует уровням громкости от 0 до 130 дБ (см. правую ось на рис. 10.1).

Интенсивность звука является его **объективной** характеристикой, не зависящей от звукового ощущения. Уровень громкости является **субъективной** характеристикой, так он как зависит ещё и от интенсивности  $I_0$ , которая в свою очередь зависит от частоты  $\nu$ . Объясняется это тем, что ухо человека обладает разной чувствительностью к звукам разной частоты.

## 10.2 Ультразвук

**Ультразвуком** называются упругие волны с частотами от  $2 \cdot 10^4$  до  $10^{13}$  Гц. Ультразвуковые волны с частотами порядка  $10^9$  Гц и выше называют **гиперзвуковыми**. Для генерирования ультразвуков применяют механические и электромеханические излучатели. Примером механического излучателя низкочастотных звуков ( $\nu=20 \div 200$  кГц) большой интенсивности является **сирена**.

Основным свойством ультразвука является то, что он подобно свету может излучаться в виде узких направленных лучей, так как обладает малой длиной волны. Отражение и преломление ультразвуковых пучков на границе раздела двух сред происходит по законам геометрической оптики. Ультразвуки сильно поглощаются газами и во много раз слабее – жидкостями. Например, коэффициент поглощения ультразвука в воздухе примерно в 1000 раз больше, чем в воде.

Амплитуды скорости и ускорения колебательного движения частиц среды, а также амплитуда звукового давления в ультразвуковых волнах во много раз больше соответствующих величин для слышимых звуков. Благодаря большой амплитуде звукового давления, создаваемого мощными ультразвуковыми излучателями, в жидкостях возникает явление **кавитации** – в ней непрерывно образуются и исчезают внутренние разрывы сплошности. Исчезновение этих разрывов, имеющих вид мельчайших пузырьков, сопровождается кратковременным возрастанием давления до сотен и даже тысяч атмосфер. Поэтому ультразвуки обладают дробящим действием – они разрушают находящиеся в жидкости твёрдые тела, живые организмы, крупные молекулы и т.д.

Дробящее действие ультразвуков используют для создания эмульсий и суспензий, снятия плёнок окислов и обезжиривания поверхностей деталей, стерилизации жидкостей, размельчения зёрен фотоэмульсий и т.д. Разрушающее действие ультразвуковых волн в жидкости на поверхности твёрдого тела заметно увеличивается при введении в жидкость мелких абразивных частиц. Это явление используется для ультразвукового шлифования и полирования, а также «сверления» отверстий различной формы в стекле, керамике, сверхтвёрдых сплавах и кристаллах.

Ультразвуки ускоряют протекание процессов диффузии, растворения и химических реакций. Их применяют для контрольно-измерительных целей (гидролокация, дефектоскопия, измерение толщины трубопроводов и слоя накипи и т.д.), а также для осуществления и ускорения технологических процессов.

## 10.3 Инфразвук

**Инфразвук** – это упругие волны с частотами ниже области слышимых человеком частот. Обычно за верхнюю границу инфразвука принимают частоты  $16 \div 25$  Гц, нижняя граница не определена. Инфразвуки содержатся в шуме атмосферы, в шуме леса и моря. Источником инфразвуковых колебаний являются

грозовые разряды (гром), а также взрывы и орудийные выстрелы. В земной коре наблюдаются сотрясения и вибрации инфразвуковых частот от самых разнообразных источников, в том числе от обвалов, взрывов, движения транспорта.

Инфразвук мало поглощается в среде, поэтому инфразвуковые волны в воздухе, воде и земной коре могут распространяться на очень далекие расстояния. Это явление находит практическое применение в звукометрии, при определении места сильных взрывов, дает возможность предсказать стихийное бедствие – цунами. Звуки взрывов, содержащие большое количество инфразвуковых частот, применяются для исследования верхних слоев атмосферы, для исследования свойств водной среды.

## §11 Интерференция волн. Стоячие волны

### 11.1 Принцип суперпозиции волн. Интерференция волн

**Когерентность** – согласованное протекание во времени и пространстве нескольких волновых процессов.

**Когерентные волны** – волны, разность фаз которых остается постоянной во времени. Когерентными могут быть только волны, имеющие одинаковую частоту.

Наложение когерентных волн, в результате которого колебания в одних точках усиливают, а в других ослабляют друг друга, называется явлением **интерференции**. Волны накладываются одна на другую, не возмущая друг друга. Результирующее смещение равно геометрической сумме смещений, которые получают частицы, участвующие в каждом из слагающих волновых процессов. Это утверждение называется **принципом суперпозиции волн**.

### 11.2 Стоячие волны

**Стоячие волны** – это колебательный процесс, возникающий в результате сложения (интерференции) двух встречных бегущих волн с одинаковой амплитудой и частотой.

На практике стоячие волны возникают при отражении от преград. Падающая на преграду волна и бегущая ей навстречу отраженная волна, накладываются друг на друга, дают стоячую волну. Уравнение стоячей волны получают сложением следующих уравнений:

$$\xi_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx) \text{ – падающая волна;}$$

$$\xi_2(x, t) = A \cos(\omega t + kx) \text{ – отраженная волна.}$$

Преобразуем результат по формуле косинуса суммы:

$$\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t) = A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega t + kx) = 2A \cos kx \cdot \cos \omega t$$

$$\xi(x, t) = 2A \cos kx \cdot \cos \omega t. \quad (11.1)$$

Уравнение (11.1) называется **уравнением стоячей волны**.

Величина

$$2A \cos kx = A(x) \quad (11.2)$$

называется амплитудой стоячей волны.

Заменив в (11.2) волновое число  $k$  согласно формуле (9.2), получим:

$$A(x) = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x. \quad (11.3)$$

1. Если  $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x = 1$ , т.е.  $\frac{2\pi}{\lambda} x = \pm n\pi$ , где  $n=0, 1, 2, \dots$ , то амплитуда колебаний достигает максимального значения  $A(x)_{\max} = 2A$ .

Точки, в которых амплитуда колебаний максимальна, называются **пучностями** (рис. 11.1 б). Координаты пучностей:

$$x_{\text{пучн}} = n \frac{\lambda}{2}. \quad (11.4)$$

2. Если  $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x = 0$ , т.е.  $\frac{2\pi}{\lambda} x = \pm \frac{\pi}{2}(2n+1)$ , где  $n=0, 1, 2, \dots$  то  $A=0$ .

Точки, в которых амплитуда колебаний равна нулю, называются **узлами** (рис. 11.1 б). Координаты узлов:

$$x_{\text{узел}} = (2n+1) \frac{\lambda}{4}. \quad (11.5)$$

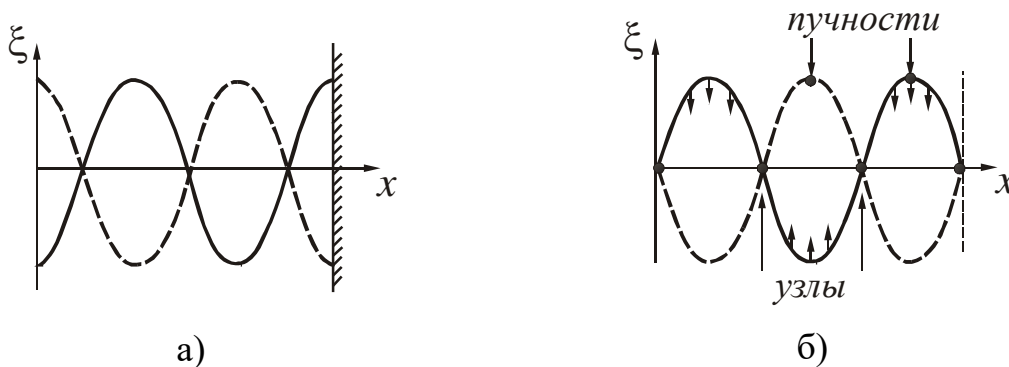


Рисунок 11.1

Точки, находящиеся в узлах, колебаний не совершают. Узлы и пучности представляет собой не одну точку, а плоскости, точки которых имеют значения координат, определяемые формулами (11.4) и (11.5).

Из формул (11.4) и (11.5) следует, что расстояние между соседними пучностями, так же как и расстояние между соседними узлами, равно  $\lambda/2$ . Расстояние между ближайшими узлом и пучностью –  $\lambda/4$ .

Рассмотренный случай описывает образование стоячей волны, отраженной от менее плотной среды. График такой стоячей волны представлен на рис. 11.1 а. Примером является волна, возникающая в металлическом стержне с незакрепленными концами.

Если отражение происходит от более плотной среды, то отраженная волна меняет фазу на  $\pi$ . В этом случае формула (11.4) даст координату узла, а формула (11.5) – координату пучности, т.е. узлы и пучности меняются местами. График волны представлен на рис. 11.1 б. Такая волна возникает, например, в закрепленной струне. Для сравнения на рис. 11.2 дан график бегущей волны.

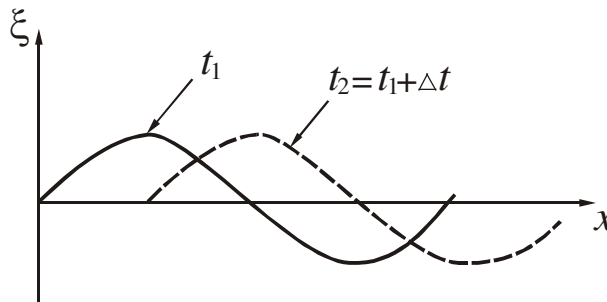


Рисунок 11.2

В упругой стоячей волне энергия периодически мигрирует от узлов стоячей волны к пучностям и обратно. Однако в самих узлах и пучностях плотность потока энергии тождественно равна нулю. Среднее за период значение плотности потока энергии равно нулю в любой точке стоячей волны, так как две бегущие волны, образующие стоячую, переносят за период равные количества энергии в прямо противоположных направлениях. Поэтому стоячие волны и получили свое название.

### Посмотрите лекционные демонстрации:

1. Поперечные стоячие волны на резиновом шнуре

<http://youtube.com/watch?v=MK1GjBxUz4>

2. Поперечные стоячие волны на линейке со свободным концом

<http://youtube.com/watch?v=BSkje44cPbQ>

3. «Стоячая волна» на экране осциллографа

<http://www.youtube.com/watch?v=qxgngaCzD6g>

### 11.3 Сложные волны. Групповая скорость

Понятие фазовой скорости применимо только к строго монохроматическим волнам. Такие волны реально не осуществимы, так как они должны существовать неограниченно долго во времени, и быть бесконечно протяженными в пространстве. На практике приходится иметь дело с более или менее сложным волновым импульсом, ограниченным во времени и в пространстве, и не являющимся синусоидой. Основываясь на принципе суперпозиции, можно любую сложную (не синусоидальную) волну разложить на некоторую систему синусоидальных волн, т.е. представить её в виде **группы волн**, которую также называют **волновым пакетом**.

**Группа волн (волновой пакет)** – совокупность большого числа синусоид с частотами, которые мало отличаются друг от друга. Совокупность частот этих синусоидальных волн называется **спектром частот** рассматриваемого волнового пакета.

При отсутствии дисперсии (см. §9) все плоские волны, из которых складывается волновой пакет, распространяются с одинаковыми фазовыми скоростями и, поэтому, не смещаются друг относительно друга. В этом случае ско-

рость распространения волнового пакета совпадает с фазовой скоростью  $v$ , а сам пакет сохраняет форму.

При наличии дисперсии составляющие волнового пакета имеют разные волновые числа  $k$  и распространяются с разными фазовыми скоростями. В результате составляющие пакета будут смещаться друг относительно друга, а сам пакет в процессе распространения будет менять свою форму.

Таким образом, скорость распространения реальной сложной волны в диспергирующей среде не совпадает с фазовой скоростью. В этом случае волновому пакету приписывают скорость  $u$ , под которой понимается скорость перемещения точки с максимальной энергией. Эту скорость называют групповой. Энергия пропорциональна квадрату амплитуды, поэтому точка с максимальной энергией имеет максимальную амплитуду.

**Групповая скорость** – скорость перемещения точки с максимальной амплитудой. Таким образом, групповая скорость характеризует скорость, с которой волновой пакет (группа волн) переносит энергию.

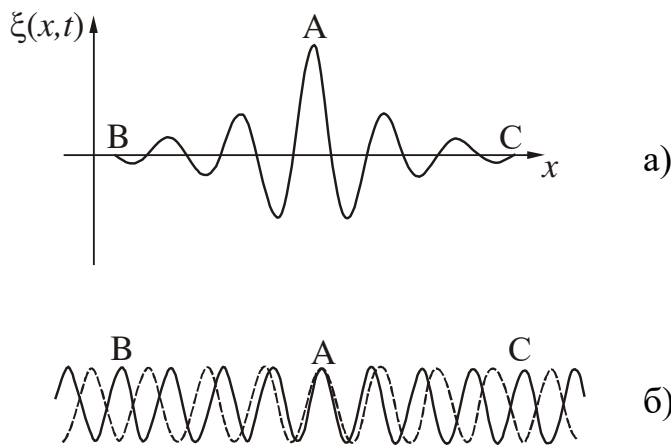


Рисунок 11.3

Получим формулу для расчёта групповой скорости. Предположим, что волновой пакет (рис. 11.3 а) состоит из двух плоских волн с одинаковыми амплитудами, близкими по значению частотами  $\omega$  и  $(\omega + d\omega)$ , и волновыми числами  $k$  и  $(k + dk)$ . На рисунке 11.3 б дана «моментальная фотография» этих волн. Одна волна изображена сплошной линией, другая – пунктирной.

Интенсивность волнового пакета будет максимальной в точке А, где фазы обеих волн в данный момент времени совпадают. В точках В и С волны находятся в противофазе, поэтому интенсивность пакета равна нулю.

Напишем уравнения волн:

$$\xi_1 = A_0 \cos(\omega t - kx), \tag{11.6}$$

$$\xi_2 = A_0 \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x]. \tag{11.7}$$

В точке с максимальным значением амплитуды (точка А на рис. 11.3 а и 11.3 б) фазы обеих волн совпадают, поэтому в этой точке фазы не должны зависеть от волновых чисел  $k$  и  $(k + dk)$ . Это означает, что первая производная фазы  $\varphi = \omega t - kx$  по волновому числу  $k$  должна быть равна нулю:



$$\frac{d\varphi}{dk} = 0.$$

Найдём производную:

$$\frac{d\varphi}{dk} = t \cdot \frac{d\omega}{dk} - x = 0$$

Отсюда:

$$\frac{x}{t} = \frac{d\omega}{dk}.$$

Отношение  $\frac{x}{t}$  представляет собой групповую скорость  $u$ , так как оно определяет условие, при котором амплитуда максимальна. Тогда групповая скорость будет равна

$$u = \frac{d\omega}{dk}. \quad (11.8)$$

Таким образом, монохроматическая волна характеризуется фазовой скоростью  $v = \frac{\omega}{k}$ , которая равна скорости перемещения фазовой плоскости, а волновой пакет характеризуется групповой скоростью  $u = \frac{d\omega}{dk}$ , которая равна скорости переноса энергии волновым пакетом (группой волн).

Выражению (11.8) для групповой скорости можно придать другой вид. Заменив  $\omega$  через произведение  $vk$ , получим:

$$u = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk}.$$

Далее напишем:

$$\frac{dv}{dk} = \frac{dv}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dk}.$$

Учтем, что волновое число  $k = 2\pi/\lambda$ , найдём записанные производные (попробуйте выполнить эти преобразования самостоятельно), получим

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}, \quad (11.9)$$

где  $\lambda$  – длина волны.

Если фазовая скорость не зависит от длины волны  $\left(\frac{dv}{d\lambda} = 0\right)$ , то  $v = u$ . Если фазовая скорость зависит от длины волны  $\left(\frac{dv}{d\lambda} \neq 0\right)$ , то фазовая и групповая скорости не совпадают, Понятие групповой скорости применимо только при

условии, что поглощение энергии волны в данной среде невелико. При значительном затухании волн понятие групповой скорости утрачивает смысл.

При гидролокации, радиолокации и т.д. измеряют именно групповую скорость, так как большинство приёмных устройств подчиняется принципу суперпозиции, который означает, что результат нескольких одновременных воздействий представляет собой просто сумму результатов, вызванных каждым воздействием в отдельности.

## §12 Эффект Доплера в акустике

**Эффектом Доплера\*** называется изменение частоты волн, регистрируемых приёмником, которое происходит вследствие движения источника этих волн и приёмника. Например, при приближении к неподвижному наблюдателю быстро движущегося поезда тон звукового сигнала последнего выше, а при удалении поезда – ниже тона сигнала, подаваемого тем же поездом, когда он стоит на станции.

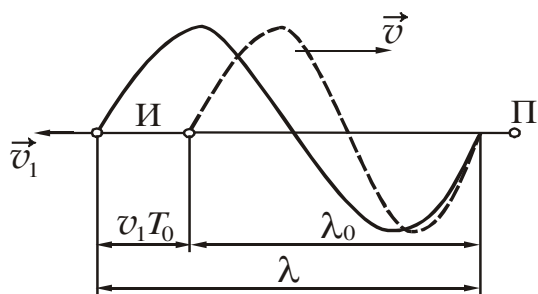


Рисунок 12.1

Пусть приёмник П звуковых волн в газообразной (или жидкой) среде неподвижен относительно нее, а источник И удаляется со скоростью  $\vec{v}_1$ . Скорость направлена по прямой, соединяющей источник и приёмник (рис. 12.1).  $T_0$  – период колебаний источника. За это время источник переместится на расстояние

$$x = v_1 T_0 = \frac{v_1}{v_0}, \quad (12.1)$$

где  $v_0$  – частота колебаний источника.

При движении источника длина волны  $\lambda$  в среде отличается от длины волны  $\lambda_0$  при неподвижном источнике:

$$\lambda = \lambda_0 + v_1 T_0 = (v + v_1) T_0$$

или

$$\lambda = \frac{v + v_1}{v_0}, \quad (12.2)$$

где  $v$  – фазовая скорость волны в среде.

Частота, которую регистрирует приёмник:

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{v_0}{1 + \frac{v_1}{v}}. \quad (12.3)$$

Из анализа формулы (12.3) можно сделать следующий вывод:

**Если источник удаляется от приёмника, то частота принимаемого сигнала уменьшается.**

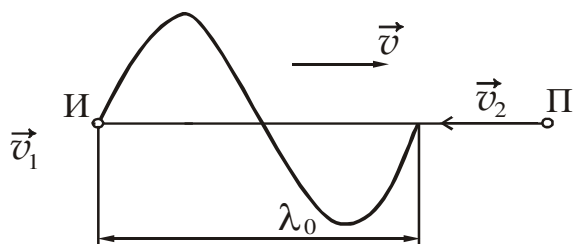


Рисунок 12.2

Если источник неподвижен, а приемник приближается к нему со скоростью  $\vec{v}_2$  вдоль соединяющей их прямой (рис. 12.2), то длина волны в среде

$$\lambda = \lambda_0 = \frac{v}{v_0}. \quad (12.4)$$

Скорость распространения волны относительно приемника равна  $v + v_0$ .

Частота, которую регистрирует приемник:

$$\nu = \frac{v + v_0}{\lambda_0} = v_0 \left( 1 + \frac{v_2}{v} \right). \quad (12.5)$$

Из анализа формулы (12.5) можно сделать следующий вывод:

**Если источник приближается к приемнику, то частота принимаемого сигнала увеличивается.**

Если направления скоростей не совпадают с проходящей через источник и приемник прямой, то в формулах (12.3) и (12.5) надо брать проекции этих скоростей на направление указанной прямой.

### §13 Уравнения Максвелла

Уравнения Максвелла – это фундаментальные уравнения классической макроскопической электродинамики, описывающие электромагнитные явления в любой среде, в том числе и в вакууме. Они сформулированы в 60-х годах XIX века английским ученым Дж. Максвеллом на основе обобщения экспериментальных законов, которые устанавливают связь между электрическими и магнитными явлениями. Максвелл развил идеи Майкла Фарадея о том, что взаимодействие между электрически заряженными телами осуществляется посредством электромагнитного поля.

Первое уравнение является обобщением закона электромагнитной индукции. Согласно этому уравнению

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (13.1)$$

Интеграл, стоящий в левой части уравнения (13.1), представляет собой циркуляцию вектора напряжённости электрического поля по замкнутому контуру. В свою очередь циркуляция вектора  $\vec{E}$  численно равна работе, которая совершается при перемещении единичного положительного заряда по замкнутому контуру, т.е. она представляет собой электродвижущую силу. Правая часть уравнения дает скорость изменения потока вектора магнитной индукции через поверхность, ограниченную данным контуром.

Таким образом, из этого уравнения следует, что **переменное магнитное поле всегда порождает вихревое электрическое поле**. Наличие проводящего контура не обязательно, он позволяет лишь обнаружить возникающее электрическое поле.

Знак « $\rightarrow$ » соответствует правилу Ленца для направления индукционного тока.

Второе уравнение является обобщением на переменные поля экспериментального закона Био-Савара-Лапласа, утверждающего, что вокруг проводников с током существует магнитное поле. Максвелл предположил, что магнитное поле порождается не только токами, текущими в проводнике, но и переменными электрическими полями в диэлектриках или вакууме.

Второе уравнение Максвелла имеет вид:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \iint_S \left( \vec{j}_{\text{пров}} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S}, \quad (13.2)$$

$\vec{j}_{\text{пров}}$  – плотность тока проводимости.

Величина, пропорциональная скорости изменения электрического поля во времени, была названа Максвеллом **током смещения**.

$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}_{\text{см}}$  – плотность тока смещения,

Термин «ток смещения» является условным. По существу ток смещения – это изменяющееся со временем электрическое поле. Из всех физических свойств, присущих току проводимости, ток смещения обладает лишь одним – способностью создавать магнитное поле.

Ток смещения имеется везде, где есть изменяющееся со временем электрическое поле. Он существует и внутри проводов, по которым течет переменный электрический ток. Но внутри проводов ток смещения бывает пренебрежительно мал по сравнению с током проводимости.

Полный ток, равный сумме тока смещения и тока проводимости, всегда является замкнутым.

Таким образом, из второго уравнения следует, что **переменное электрическое поле приводит к появлению переменного магнитного поля**.

Третье уравнение:

$$\oiint_S \vec{B} d\vec{S} = 0, \quad (13.3)$$

т.е. поток вектора магнитной индукции через произвольную замкнутую поверхность  $S$  равен нулю. Это означает, что **свободных магнитных зарядов в природе нет, а линии магнитной индукции замкнуты**. Магнитное поле порождается электрическими токами или движущимися электрическими зарядами.

Четвёртое уравнение является обобщением теоремы Гаусса для электростатического поля на любое электрическое поле, как стационарное, так и переменное:

$$\oiint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_{k=1}^N q_k, \quad (13.4)$$

т.е. поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность  $S$  определяется электрическим зарядом, находящимся внутри этой поверхности (в объёме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$ ). Электрическое поле порождается зарядами.

Уравнения Максвелла (13.1–13.4) не образуют полной замкнутой системы, позволяющей рассчитывать электромагнитные процессы при наличии материальной среды. Их дополняют соотношениями, связывающими векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ , а также  $\vec{j}$ . Связь между этими величинами определяется свойствами среды и её состоянием.

Эти соотношения называют уравнениями состояния или материальными уравнениями. Они описывают электромагнитные свойства среды и для каждой конкретной среды имеют определенную форму. Для большинства изотропных сред уравнения состояния имеют простую линейную форму:

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}, \quad (13.5)$$

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}, \quad (13.6)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (13.7)$$

где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды,

$\mu$  – магнитная проницаемость среды,

$\sigma$  – удельная электропроводность среды.

Из уравнений Максвелла следует, что переменное электрическое поле порождает магнитное поле, которое тоже оказывается переменным. Такое переменное магнитное поле в свою очередь порождает электрическое и т.д. Отсюда следует важный вывод о существовании нового физического явления: **электромагнитное поле способно существовать самостоятельно – без электрических зарядов и токов**. При этом изменение его состояния обязательно имеет волновой характер. Таким образом, если в некоторой области пространства возбудить с помощью колеблющихся зарядов переменное электромагнитное поле, то оно будет распространяться с некоторой скоростью в виде электромагнитных волн (ЭМВ).

**Электромагнитная волна** – периодическая последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяющихся в пространстве в виде колебаний векторов напряжённостей этих полей.

В случае однородной нейтральной непроводящей среды с постоянными проницаемостями  $\varepsilon$  и  $\mu$  из системы уравнений Максвелла получают уравнения вида:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (13.8)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (13.9)$$

Уравнения (13.8) и (13.9) представляют собой типичные волновые уравнения (см. формулу (9.11)). Всякая функция, удовлетворяющая такому уравнению, описывает некоторую волну. Следовательно, уравнения (13.8) и (13.9) указывают на то, что **электромагнитные поля могут существовать в виде электромагнитных волн**. Сравнение с выражением (9.11) позволяет сделать вывод о том, что фазовая скорость электромагнитных волн равна

$$v_{\text{ЭМВ}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}}. \quad (13.10)$$

## §14 Электромагнитные волны

### 14.1 Плоская электромагнитная волна

Рассмотрим электромагнитную волну, распространяющуюся в нейтральной непроводящей среде с постоянными проницаемостями  $\varepsilon$  и  $\mu$  ( $\vec{j}=0$ ,  $\varepsilon=\text{const}$ ,  $\mu=\text{const}$ ). Направим ось  $Ox$  перпендикулярно волновым поверхностям. Тогда векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , а, значит, и их компоненты по координатным осям не будут зависеть от координат  $y$  и  $z$ . При этом уравнения (13.8) и (13.9) упрощаются и принимают вид:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad (14.1)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \quad (14.2)$$

Индексы  $y$  и  $z$  при  $E_y$  и  $H_z$  подчеркивают то, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей  $Oy$  и  $Oz$ . В этом случае  $E_x=E_z=0$ , а  $H_x=H_y=0$ . Колебания электрического и магнитного векторов в электромагнитной волне происходят с одинаковой фазой. Если считать, что начальные фазы колебаний  $\alpha_1=\alpha_2=0$ , то решение уравнений (14.1) и (14.2) будет иметь вид:

$$E_y = E_{\text{max}} \cos(\omega t - kx), \quad (14.3)$$

$$H_z = H_{\text{max}} \cos(\omega t - kx). \quad (14.4)$$

В этих формулах  $\omega$  – циклическая частота волны,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число,

Умножив уравнение (14.3) на единичный вектор оси  $Oy$ , а уравнение (14.4) – на единичный вектор оси  $Oz$ , получим уравнение плоской электромагнитной монохроматической волны в векторном виде:

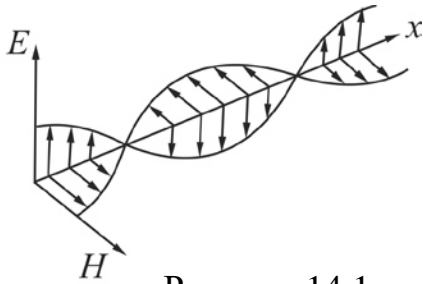


Рисунок 14.1

$$\vec{E} = \vec{E}_{\max} \cos(\omega t - kx), \quad (14.5)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_{\max} \cos(\omega t - kx). \quad (14.6)$$

На рис. 14.1 показана «моментальная фотография» плоской монохроматической волны. Из рисунка видно, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. В фиксированной точке пространства векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  изменяются со временем по гармоническому закону.

## 14.2 Основные свойства электромагнитных волн

1. Электромагнитные волны – это электромагнитные колебания, распространяющиеся в пространстве с конечной скоростью. Из теории Максвелла следует, что электромагнитные колебания распространяются в вакууме со скоростью света:

$$v_{\text{ЭМВ}}^{\text{вак}} = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ (м/с)}. \quad (14.9)$$

2. Скорость распространения электромагнитных волн в однородной изотропной среде равна

$$v_{\text{ЭМВ}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}, \quad (14.10)$$

т.е. она меньше скорости электромагнитных волн в вакууме.

3. Электромагнитная волна – поперечная волна. Это означает, что  $\vec{E} \perp \vec{v}$ ,  $\vec{H} \perp \vec{v}$ , т.е. направление колебаний векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  перпендикулярно направлению распространения волны.
4. Электромагнитные волны переносят энергию. Объёмная плотность энергии  $w$  электромагнитного поля складывается из объёмной плотности энергии электрического поля  $w_{\text{эл}}$  и объёмной плотности энергии магнитного поля  $w_{\text{м}}$ :

$$w = w_{\text{эл}} + w_{\text{м}} = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}. \quad (14.11)$$

Из теории электромагнитных волн следует, что в любой момент времени эти величины одинаковы. Следовательно

$$w = \epsilon \epsilon_0 E^2 = \mu \mu_0 H^2. \quad (14.12)$$

Перенос энергии волной принято характеризовать вектором плотности потока энергии. Для механических волн этот вектор называется вектором Умова. Вектор Умова равен произведению объёмной плотности энергии на вектор фазовой скорости волны, т.е.

$$\vec{j} = w \vec{v}.$$

Для электромагнитных волн вводят аналогичный вектор, который называют вектором Пойнтинга.

**Вектор Пойнтинга**  $\vec{S}$  – векторная физическая величина, численно равная энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны.

Получим формулу, связывающую вектор Пойнтинга с характеристиками электромагнитной волны. Согласно (13.10)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}}. \quad (14.13)$$

Тогда модуль вектора Пойнтинга будет равен

$$S = wv = \epsilon \epsilon_0 E^2 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} E^2. \quad (14.14)$$

Учитывая, что  $\epsilon \epsilon_0 E^2 = \mu \mu_0 H^2$ , получим выражение для расчёта мгновенного значения вектора Пойнтинга:

$$S = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} \cdot E \cdot E}{\sqrt{\mu_0 \mu}} = EH = E_{\max} H_{\max} \cos^2(\omega t - kx). \quad (14.15)$$

Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны, т.е. угол между ними  $90^\circ$ , а  $\sin 90^\circ = 1$ .

Следовательно, вектор Пойнтинга можно представить как векторное произведение векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (14.16)$$

Направление вектора  $\vec{S}$  совпадает с направлением переноса энергии. Среднее значение вектора Пойнтинга определяет интенсивность электромагнитной волны:

$$I = \langle S \rangle = \frac{E_{\max} H_{\max}}{2}, \quad (14.17)$$

так как среднее значение  $\cos^2(\omega t - kx)$  за период равно  $1/2$ .

5. Электромагнитным волнам, как и любым волнам, присущи интерференция, дифракция, а также поляризация.



б. Электромагнитные волны поглощаются средой, а в диэлектрике, кроме этого, претерпевают дисперсию.

Первые опыты с несветовыми электромагнитными волнами были осуществлены Г. Герцем в 1888 году. Передача сообщения с помощью электромагнитных волн была впервые осуществлена в 1896 году А.С. Поповым.

### Посмотрите лекционные демонстрации:

1. Поперечность волны

<http://youtube.com/watch?v=b8aGmez3qPQ>

2. Установка для наблюдения трехсантиметровых волн

<http://youtube.com/watch?v=IuSbE4QmuUI>

3. Куб и призма на пути трехсантиметровой волны

[http://youtube.com/watch?v=rj2TYm\\_S630](http://youtube.com/watch?v=rj2TYm_S630)

4. Трехсантиметровые волны: закон отражения (диэлектрик)

<http://youtube.com/watch?v=-JdhiLKZeXs>

5. Трехсантиметровые волны: интерференция при отражении (просветление)

<http://youtube.com/watch?v=pgSgkAsc0Y>

6. Трехсантиметровые волны: диэлектрическая линза

<http://youtube.com/watch?v=yRjOCOETIXQ>

7. Трехсантиметровые волны: диэлектрическая призма

<http://youtube.com/watch?v=dBQTVLwiEq8>

8. Решётка – зеркало для трёхсантиметровых волн

<http://youtube.com/watch?v=S2MNOtK2Weg>

## 14.3 Шкала электромагнитных волн

Электромагнитные волны принято условно классифицировать по длинам волн в вакууме  $\lambda = c/\nu$  или по частоте  $\nu = \omega/2\pi$  (рис. 14.2). Между соседними диапазонами шкалы электромагнитных волн нет резких границ. Более подробная классификация дана в таблице 14.1.



Рисунок 14.2

Различные виды электромагнитного излучения отличаются лишь длиной волны (или, что то же самое, частотой). В зависимости от длины волны (частоты) меняются свойства волн, их действия, способы получения и названия отдельных участков.

Таблица 14.1. Шкала электромагнитных волн

Название диапазона волн	Примерный диапазон длин волн		Диапазон частот
	м	Другие единицы	Гц
Низкочастотные электрические колебания	$\infty \div 10^{+5}$	$\infty \div 100$ км	$0 \div 3 \cdot 10^3$
Радиоволны	$10^{+5} \div 10^{-3}$	100 км $\div$ 1 мм	$3 \cdot 10^3 \div 3 \cdot 10^{11}$
Инфракрасное излучение	$2 \cdot 10^{-3} \div 7,6 \cdot 10^{-7}$	2 мм $\div$ 760 нм	$1,5 \cdot 10^{11} \div 4,0 \cdot 10^{14}$
Видимое излучение	$7,6 \cdot 10^{-7} \div 3,8 \cdot 10^{-7}$	760 $\div$ 380 нм	$4,0 \cdot 10^{14} \div 8,0 \cdot 10^{14}$
Ультрафиолетовое излучение	$3,8 \cdot 10^{-7} \div 3 \cdot 10^{-9}$	380 $\div$ 3 нм	$8,0 \cdot 10^{14} \div 10^{17}$
Рентгеновское излучение	$10^{-8} \div 10^{-12}$	10 нм $\div$ 1 пм	$3 \cdot 10^{16} \div 3 \cdot 10^{20}$
Гамма-излучение	$10^{-11}$ и менее	10 пм и менее	$3 \cdot 10^{19}$ и выше

## ЧАСТЬ 2. ВОЛНОВАЯ И КВАНТОВАЯ ОПТИКА

### §16 Предварительные сведения

**Оптика** – это раздел физики, в котором изучаются свойства света, его физическая природа и взаимодействие с веществом. Под светом в оптике понимают электромагнитные волны с частотой  $\nu$  от  $1,5 \cdot 10^{11}$  до  $3 \cdot 10^{16}$  Гц, соответствующие инфракрасному излучению, видимому свету и ультрафиолетовому излучению. Эту область частот принято называть **оптической областью спектра** электромагнитного излучения. Ей соответствуют длины волн  $\lambda$  от  $2 \cdot 10^{-3}$  до  $10^{-8}$  м. Видимому свету соответствуют длины волн от  $3,8 \cdot 10^{-7}$  до  $7,6 \cdot 10^{-7}$  м.. Наряду с волновыми свойствами в оптической области излучения проявляются и квантовые свойства света.

Таким образом, по современным представлениям свет обладает двойственной природой, т.е. ему присущ корпускулярно-волновой дуализм.

#### 16.1 Некоторые сведения из геометрической оптики

**Геометрической оптикой** называют часть оптики, в которой изучаются законы распространения света в прозрачных средах на основе представления о нем, как о совокупности световых лучей. Под лучом понимают линию, вдоль которой переносится энергия электромагнитной волны.

Основу геометрической оптики образуют четыре закона: 1) закон прямолинейного распространения света; 2) закон независимости световых лучей; 3) закон отражения света; 4) закон преломления света.

Закон прямолинейного распространения света: **в однородной среде свет распространяется прямолинейно**. Этот закон является приближенным: при прохождении света через очень малые отверстия наблюдаются отклонения от прямолинейности, тем большие, чем меньше отверстие.

Закон независимости световых лучей: **лучи при пересечении не возмущают друг друга**. Пересечения лучей не мешают каждому из них распространяться независимо друг от друга. Этот закон справедлив при не слишком больших интенсивностях света. При интенсивностях, достигаемых с помощью лазеров, независимость световых лучей перестает соблюдаться.

При падении лучей света на границу раздела двух сред происходят явления отражения и преломления световых лучей (рис. 16.1).

**Углом падения** называют угол  $\alpha$  между падающим лучом А света и перпендикуляром к границе раздела двух сред, восстановленным в точке падения О.

**Углом отражения** называют угол  $\gamma$  между отражённым лучом В света и перпендикуляром к поверхности отразившей свет, восстановленным в точке падения О.

Закон отражения: 1) **угол падения  $\alpha$  равен углу отражения  $\gamma$** ; 2) **падающий луч А, отражённый луч В и перпендикуляр, восстановленный в точку падения О лежат в одной плоскости**.

**Углом преломления** называют угол  $\beta$  между лучом С, прошедшим через границу раздела двух сред, и перпендикуляром к границе, восстановленным в точке преломления О (рис. 16.1).

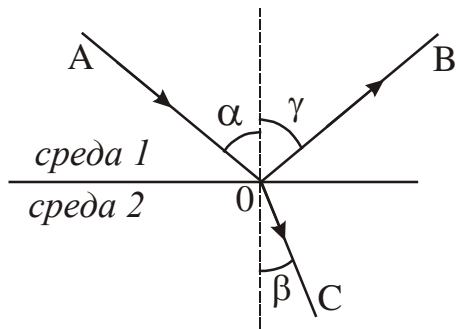


Рисунок 16.1

Закон преломления Снеллиуса: 1) *преломлённый луч С, падающий луч А и перпендикуляр, восстановленный в точке падения О лежат в одной плоскости*; 2) *отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных двух сред*:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{21}. \quad (16.1)$$

Величина  $n_{21}$  называется **относительным показателем преломления** среды 2 относительно среды 1. Относительный показатель преломления  $n_{21}$  равен отношению абсолютных показателей преломления  $n_2$  и  $n_1$  этих сред:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (16.2)$$

**Абсолютным показателем преломления** среды называется показатель преломления среды относительно вакуума. Он равен отношению скорости света в вакууме к скорости света в данной среде:

$$n = \frac{c}{v}, \quad (16.3)$$

где  $c=3 \cdot 10^8$  м/с скорость света в вакууме,  $v$  – скорость света в данной среде.

Если  $n_2 > n_1$ , то среда 2 называется оптически более плотной по сравнению со средой 1. Если  $n_2 < n_1$ , то среда 2 называется оптически менее плотной по сравнению со средой 1.

Следствия из закона Снеллиуса:

1. При переходе луча света из оптически менее плотной в оптически более плотную ( $n_2 > n_1$ ) угол преломления  $\beta$  меньше угла падения  $\alpha$ . Преломлённый луч С в точке падения луча отклоняется в сторону перпендикуляра к границе раздела двух сред (рис. 16.1).

2. При переходе луча света из оптически более плотной в оптически менее плотную среду ( $n_2 < n_1$ ) угол преломления  $\beta$  больше угла падения  $\alpha$ . Преломлённый луч С в точке падения луча отклоняется от перпендикуляра к границе раздела двух сред.

По мере увеличения угла падения  $\alpha$  угол преломления  $\beta$  растёт, оставаясь все время больше угла  $\alpha$ . Наконец, при некотором угле падения значение угла преломления приблизится к  $90^\circ$  и преломлённый луч пойдет по границе раздела сред (рис. 16.2а). Угол падения  $\alpha_{\text{пр}}$ , соответствующий углу преломления  $\beta=90^\circ$ , называется **предельным углом полного отражения**. Он определяется из условия:

$$\sin \alpha_{\text{пр}} = n_{21}. \quad (16.4)$$

Если  $\alpha > \alpha_{\text{пр}}$ , то происходит *полное внутреннее отражение* (рис. 16.2б).

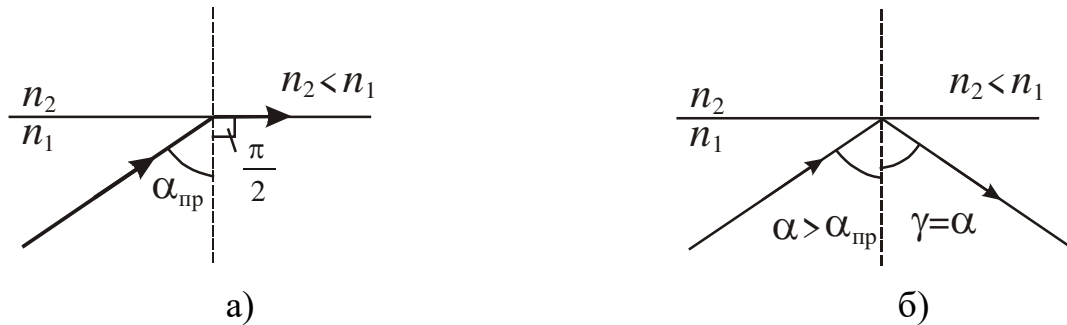


Рисунок 16.2

**Посмотрите лекционные демонстрации:**

1. Полное внутреннее отражение  
<http://youtube.com/watch?v=HN37Jz8DHYg>
2. Модель световода  
<http://youtube.com/watch?v=GQrykfIs0eQ>

## 16.2 Фотометрические величины

Раздел оптики, в котором рассматриваются вопросы измерения энергии, переносимой электромагнитными волнами оптического диапазона, называется *фотометрией*.

Наш глаз воспринимает из всего диапазона электромагнитных волн лишь

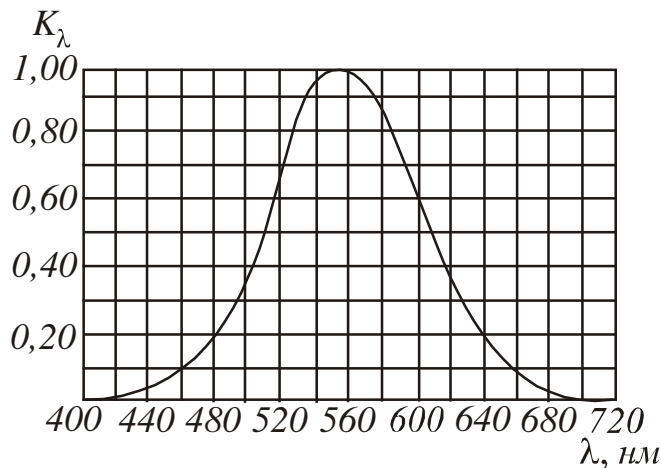


Рисунок 16.3

узкий участок, называемый видимым светом. Этому участку соответствуют длины волн от 380 нм до 760 нм. Чувствительность глаза к свету с разными длинами волн неодинакова. Она имеет максимум при  $\lambda=555$  нм (зеленая часть спектра) и быстро падает к нулю при удалении от этого максимума (рис. 16.3). На этом графике по горизонтальной оси отложена длина волны  $\lambda$ , по вертикальной – относительная спектральная чувствительность глаза  $K_\lambda$ .

**Относительная спектральная чувствительность  $K_\lambda$**  – это отношение чувствительности при данной длине волны к чувствительности при  $\lambda=555$  нм. Для длины волны  $\lambda=555$  нм  $K_\lambda$  равна единице. При том же потоке энергии оцениваемая зрительно интенсивность света для других волн оказывается меньшей. Соответственно,  $K_\lambda$  для этих длин волн меньше единицы.

Значения относительной спектральной чувствительности обратно пропорциональны значениям потоков энергии, которые вызывают одинаковое по интенсивности зрительное ощущение:

$$\frac{K_{\lambda_1}}{K_{\lambda_2}} = \frac{d\Phi_{\lambda_2}}{d\Phi_{\lambda_1}}, \quad (16.5)$$

где  $d\Phi_{\lambda}$  – поток энергии, излучаемый в интервале длин волн от  $\lambda$  до  $\lambda+d\lambda$ .

Например, если  $K_{\lambda}=0,5$ , то это означает, что для получения зрительного ощущения такой же интенсивности свет данной длины волны должен иметь плотность потока энергии в два раза большую, чем свет с  $K_{\lambda}=1$ .

В связи с такими особенностями глаза количественные характеристики световых пучков оцениваются не по энергии, которую они переносят, а по зрительному ощущению.

Для характеристики интенсивности света с учетом его способности вызывать зрительное ощущение вводится величина  $\Phi$ , называемая световым потоком.

**Световой поток** ( $\Phi$ ) – это физическая величина, равная мощности видимой части излучения, которое распространяется внутри данного телесного угла, и оцениваемая по действию этого излучения на нормальный глаз.

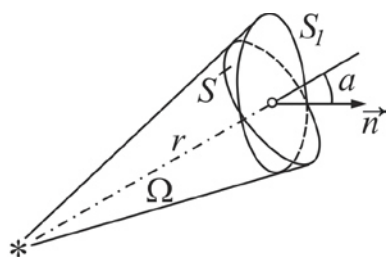


Рисунок 16.4

**Телесный угол** – это угол, образованный конической поверхностью и численно равный отношению площади  $S$ , вырезаемой этим конусом на поверхности сферы радиусом  $r$ , к квадрату радиуса этой сферы (рис. 16.4):

$$\Omega = \frac{S}{r^2}. \quad (16.6)$$

Телесный угол измеряется в стерadians (ср).

Если телесный угол опирается на некоторую площадку  $S_1$ , нормаль к которой составляет угол  $\alpha$  с радиусом (см. рис. 16.4), то

$$\Omega = \frac{S_1 \cos \alpha}{r^2}. \quad (16.7)$$

Полный телесный угол вокруг точки равен  $4\pi$  стерadians.

Для интервала  $d\lambda$  световой поток определяется как произведение потока энергии на соответствующее значение функции  $K_{\lambda}$ :

$$d\Phi = K_{\lambda} d\Phi_{\lambda}. \quad (16.8)$$

Полный световой поток равен

$$\Phi = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} K_{\lambda} d\Phi_{\lambda}. \quad (16.9)$$

где  $d\Phi_{\lambda}$  – поток энергии, излучаемый в интервале длин волн от  $\lambda$  до  $\lambda+d\lambda$ .

Источник света, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием от места наблюдения до источника, называется **точечным**. Точечные источники характеризуют силой света.

**Сила света** ( $I$ ) точечного источника в данном направлении – физическая величина, равная световому потоку, приходящемуся на единицу телесного угла:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}. \quad (16.10)$$

Сила света измеряется в канделах. Кандела (кд) является одной из основных единиц Международной системы (СИ).

**Кандела** равна силе света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой  $540 \cdot 10^{12}$  Гц, сила излучения которого в заданном направлении составляет  $1/683$  Вт/ср (ср – стерадиан).

Если точечный источник излучает равномерно по всем направлениям, то он называется **изотропным**. Для изотропного источника выполняется следующее соотношение:

$$I = \frac{\Phi}{4\pi}, \quad (16.11)$$

где  $\Phi$  – полный световой поток, излучаемый источником. На основании этого соотношения вводится единица измерения светового потока – люмен.

**Люмен** (лм) равен световому потоку, излучаемому изотропным источником с силой света в 1 кд в пределах телесного угла в 1 стерадиан.

Опытным путём установлено, что световому потоку в 1 лм, образованному излучением с длиной волны  $\lambda = 555$  нм, соответствует поток энергии в 0,0016 Вт. Световому потоку в 1 лм, образованному излучением с другой  $\lambda$ , соответствует поток энергии

$$\Phi_{\nu} = 0,0016 / K_{\lambda} \quad \text{Вт}. \quad (16.12)$$

**Освещенность** ( $E$ ) – физическая величина, равная отношению светового потока к площади освещаемой поверхности:

$$E = \frac{\Phi}{S}. \quad (16.13)$$

Освещенность измеряется в люксах.

**Люкс** (лк) – освещенность, создаваемая световым потоком 1 лм, равномерно распределенным на площади  $1 \text{ м}^2$ .

Если поверхность освещается точечным источником, то освещенность в каждой точке поверхности может быть различной. Ее можно выразить через силу света  $I$ , расстояние  $r$  от поверхности и угол  $\alpha$  между нормалью к поверхности  $\vec{n}$  и направлением на источник:

$$E = \frac{I \cos \alpha}{r^2}. \quad (16.14)$$

Записанное соотношение называется законом обратных квадратов.

## Волновая оптика

**Волновая оптика** – раздел физики, изучающий оптические явления, в которых проявляется волновая природа света. К ним относятся интерференция, дифракция, поляризация. В электромагнитной волне колеблются векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Как показывает опыт, физиологическое, фотохимическое, фотоэлектрическое и другие действия света вызываются колебаниями вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$ . Поэтому вектор напряженности электрического поля называют **световым вектором**.

### §17 Интерференция света

#### 17.1 Интерференция. Когерентность

**Интерференция света** – это явление наложения когерентных световых волн, в результате которого происходит перераспределение энергии светового поля, т.е. образуются светлые участки (максимумы) и тёмные участки (минимумы) интерференционной картины.

**Когерентные волны** – волны, разность фаз которых в данной точке пространства остается постоянной во времени. Когерентными могут быть только волны, имеющие одинаковую частоту.

Свет от обычных источников является некогерентным. Для получения когерентных световых волн применяют метод разделения света от одного источника на две или несколько волн. В каждой из них представлено излучение одних и тех же атомов источника, так что эти системы волн когерентны между собой. Затем волны проходят или разные расстояния, или идут в разных средах, после чего их вновь накладывают. Разность оптических длин путей (см. п. 17.2), проходимых интерферирующими волнами не должна быть очень большой.

Разделение света можно осуществить путём его отражения или преломления. Один из способов получения когерентных волн показан на рис. 17.1. На пути источника света помещают узкую диафрагму Д, которая выделяет узконаправленный пучок. Затем этот пучок разделяют на два с помощью преграды П с двумя маленькими отверстиями. Интерференционную картину наблюдают на экране Э.

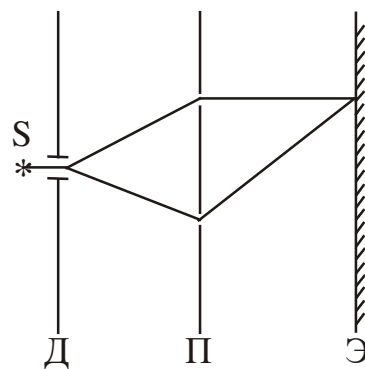


Рисунок 17.1

#### 17.2 Условия максимумов и минимумов интерференции

Рассмотрим наложение двух световых волн, возбужденных когерентными источниками  $S_1$  и  $S_2$ , в точке М (рис. 17.2). Эти волны описываются уравнениями:

$$E_1(t, x_1) = A_1 \cos(\omega t - k x_1) \quad (17.1)$$

$$E_2(t, x_2) = A_2 \cos(\omega t - k x_2) \quad (17.2)$$



Амплитуду результирующего колебания определим методом векторных диаграмм:

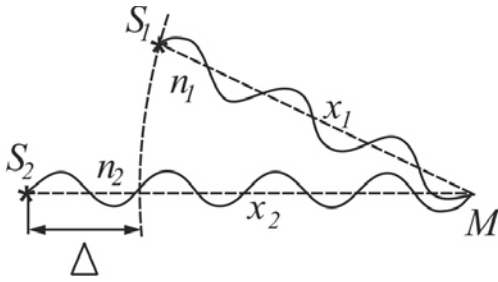


Рисунок 17.2

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\phi \quad (17.3)$$

Интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды  $I \sim A^2$ . С учетом этого в соотношении (17.3) заменим амплитуды через интенсивности и получим:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cdot \cos \Delta\phi \quad (17.4)$$

Если волны некогерентные, то  $\Delta\phi$  будет непрерывно меняться, а  $\cos \Delta\phi$  будет принимать с равной вероятностью любые значения от  $-1$  до  $+1$ . Среднее значение  $\cos \Delta\phi$  по времени равно нулю. Отсюда можно сделать вывод, что при наложении некогерентных волн результирующая интенсивность световой волны равна сумме интенсивностей, создаваемых каждой из волн в отдельности:

$$I = I_1 + I_2 \quad (17.5)$$

Если волны когерентные, то  $\cos \Delta\phi$  имеет постоянное во времени (но свое для каждой точки пространства) значение. Если  $\cos \Delta\phi > 0$ , то  $I > I_1 + I_2$ ; если  $\cos \Delta\phi < 0$ , то  $I < I_1 + I_2$ . Таким образом, при наложении когерентных волн происходит перераспределение энергии, в результате которого в одних областях волнового поля интенсивность волны усиливается (возникают максимумы), а в других – интенсивность уменьшается (возникают минимумы).

Установим условия наблюдения максимумов и минимумов.

1. Интенсивность максимальна, если в выражении (17.4)  $\cos \Delta\phi = 1$ , или

$$\Delta\phi = 2m\pi, \quad (17.6)$$

где  $m=0, 1, 2, 3, \dots$ , т.е. целое число. Число  $m$  называется порядком максимума. Условие (17.6) является условием максимумов интерференции.

2. Интенсивность минимальна, если в выражении (17.4)  $\cos \Delta\phi = -1$ , или

$$\Delta\phi = (2m + 1)\pi \quad (17.7)$$

где  $m=0, 1, 2, 3, \dots$

Условие (17.7) является условием минимумов интерференции.

Условиям максимумов и минимумов можно придать другой вид. Для этого найдем разность фаз волн, описываемых уравнениями (17.1) и (17.2):

$$\Delta\phi = \omega t - kx_1 - \omega t + kx_2 = k(x_2 - x_1) \quad (17.8)$$

Величину  $x_2 - x_1 = \Delta x$  называют **геометрической разностью хода**.

$k = 2\pi/\lambda$  – волновое число.

Если интерферирующие лучи проходят через две однородные среды с различными показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ , то вместо геометрической разности хода  $\Delta x$  вводят понятие *оптической разности хода*  $\Delta$  (рис. 17.2):

$$\Delta = n_2 x_2 - n_1 x_1, \quad (17.9)$$

где  $L = n x$  – оптический путь в однородной среде.

**Оптический путь** – это скалярная величина, численно равная произведению показателя преломления среды на геометрический путь, пройденный волной.

Тогда, используя соотношения (17.6), (17.7), (17.8) и (17.9) и заменив волновое число через длину волны, можно получить:

$$\Delta = 2m \frac{\lambda}{2}, \quad (17.10)$$

$$\Delta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (17.11)$$

где  $m=0, 1, 2, \dots$ , т.е. целое число.

Соотношение (17.10) определяет условие максимумов интерференции. **Максимум интерференции наблюдается, если оптическая разность хода двух волн равна четному числу полуволен.**

Соотношение (17.11) определяет условие минимумов интерференции. **Минимум интерференции наблюдается, если оптическая разность хода двух волн равна нечетному числу длин волн.**

Таблица 17.1. Условия максимумов и минимумов интерференции

Условие максимумов	$\Delta\varphi = 2m\pi$	$\Delta = 2m \frac{\lambda}{2}$
Условие минимумов	$\Delta\varphi = (2m + 1)\pi$	$\Delta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$

Если волна отражается от оптически более плотной среды, то фаза колебаний вектора  $\vec{E}$  изменяется на противоположную, т.е. на  $\pi$ . Оптический путь при этом изменится на половину длины волны.

$$L = n x - \frac{\lambda}{2} \quad \text{или} \quad L = n x + \frac{\lambda}{2} \quad (17.12)$$

## §18 Интерференция в тонких плёнках

Интерференцию света можно наблюдать как с помощью специальных оптических устройств, так и в естественных условиях. Примером может быть радужная окраска тонких плёнок (мыльных пузырей, плёнок нефти или масла на поверхности воды, прозрачных плёнок оксидов на поверхностях закаленных металлических деталей и т.д.). Образование частично когерентных волн при этом происходит из-за отражения падающего на плёнку света от верхней и нижней поверхностей плёнки.

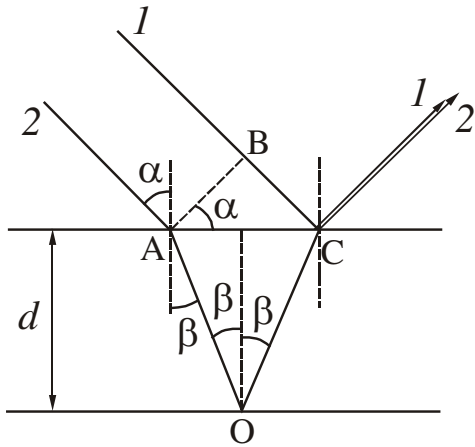


Рисунок 18.1

Рассмотрим плоскопараллельную прозрачную плёнку толщиной  $d$ , на которую падает плоская монохроматическая волна с длиной волны  $\lambda$ . Предположим, что по обе стороны от плёнки находится одна и та же среда, например, воздух (рис. 18.1). Волну можно рассматривать как параллельный пучок лучей. Плёнка отбрасывает вверх два параллельных пучка: один образовался за счёт отражения от верхней грани, второй – за счёт отражения от нижней грани (пучки на рис. 18.1 представлены лучами).

Разность хода, приобретаемая лучами 1 и 2 до того, как они сойдутся в точке С, равна

$$\Delta = (AO + OC)n - BC \tag{18.1}$$

где  $n$  – показатель преломления плёнки.

По закону преломления

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n. \tag{18.2}$$

Проведение математических преобразований даст следующее выражение:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}. \tag{18.3}$$

В точке С отражение волны происходит от оптически более плотной среды, поэтому фаза колебаний вектора  $\vec{E}$  изменяется на  $\pi$ . В точке О отражение происходит от оптически менее плотной среды, поэтому изменения фазы не происходит. В итоге между лучами 1 и 2 возникает дополнительная разность фаз, равная  $\pi$ . Ее учитывают, вычитая из оптической разности хода  $\Delta$  половину длины волны. В результате получим

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2}. \tag{18.6}$$

Из формулы (18.6) следует, что при постоянных  $d$ ,  $n$ ,  $\alpha$  значение  $\Delta$  для всей плёнки будет одним и тем же, а интенсивность отражённого от неё света одинакова для любой точки поверхности. Интерференционных полос нет, и в зависимости от значений  $\Delta$  интенсивность отражённого света либо максимальна, либо уменьшается до нуля.

Для возникновения интерференционных полос в отражённом свете необходимо, чтобы либо толщина плёнки  $d$ , либо угол падения  $\alpha$  для разных точек поверхности изменялись. Соответственно, рассматривая интерференцию в тонких плёнках, различают полосы равного наклона и полосы равной толщины.

**Полосы равного наклона** наблюдаются в тех случаях, когда на плоскопараллельную тонкую плёнку падает под разными углами  $\alpha_1, \alpha_2$  сходящийся (или расходящийся) пучок света (рис. 18.2). Так как толщина плёнки  $d$  и ее показатель преломления  $n$  везде одинаковы, то оптическая разность хода интерферирующих лучей изменяется вдоль поверхности плёнки из-за изменения угла падения  $\alpha$ . Условия интерференции для всех лучей, падающих на поверхность плёнки и отражающихся от неё под одним и тем же углом, одинаковы. Поэтому интерференционная картина в этом случае называется полосами равного наклона. Полосы равного наклона наблюдают на экране Э, который установлен в фокальной плоскости линзы Л.

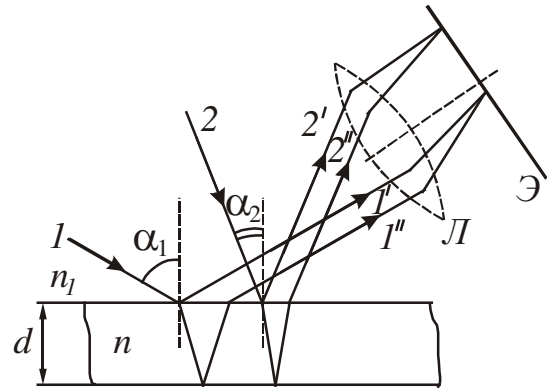


Рисунок 18.2

**Полосы равной толщины** наблюдаются при отражении параллельного

пучка лучей (угол падения  $\alpha = \text{const}$ ) от тонкой прозрачной плёнки, толщина которой  $d$  неодинакова в разных местах. Условия интерференции будут одинаковы в тех точках, которым соответствуют одинаковые значения  $d$ . Поэтому рассматриваемая интерференционная картина называется полосами равной толщины. Примером полос равной толщины являются кольца Ньютона.

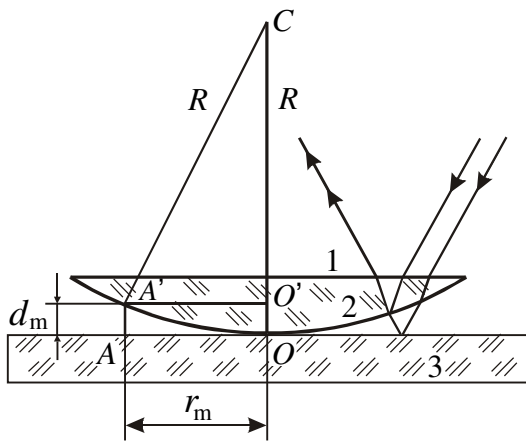


Рисунок 18.3

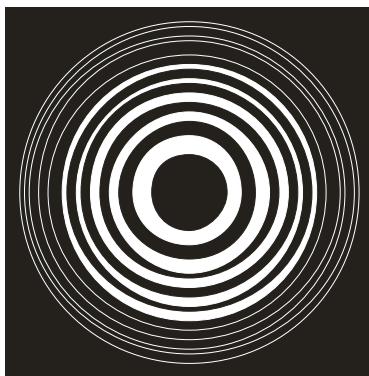


Рисунок 18.4

будут интерферировать между собой. При этом получается следующая картина: в центре – тёмное пятно, окруженное рядом concentрических светлых и чёрных колец убывающей ширины (рис. 18.4).

Рассмотрев интерференцию в отражённом свете, можно получить формулы для расчёта радиуса тёмных колец Ньютона:

$$r_m = \sqrt{m R \lambda} . \quad (18.9)$$

Для светлых колец:

$$r_m = \sqrt{(2m + 1) R \frac{\lambda}{2}} . \quad (18.10)$$

где  $r_m$  – радиус кольца, имеющего номер  $m$ ;  
 $R$  – радиус кривизны линзы.

**Посмотрите лекционную демонстрацию:**

1. Интерференция двух волн. Бипризма Френеля

<http://youtube.com/watch?v=1u6lo020NcQ>

**§19 Применение интерференции**

**Просветление оптики.** Интерференция при отражении от тонких плёнок лежит в основе просветления оптики. Прохождение света через каждую преломляющую поверхность линзы сопровождается отражением примерно 4% падающего света.

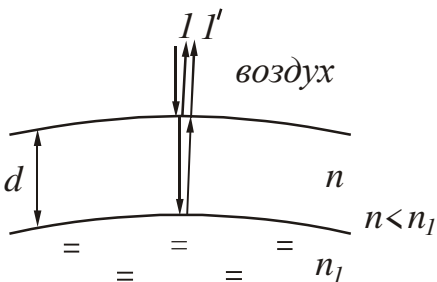


Рисунок 19.1

В сложных объективах такие отражения совершаются многократно, и суммарная потеря светового потока достигает заметной величины. В просветленной оптике для устранения отражения света на каждую свободную поверхность линзы наносится тонкая плёнка вещества с показателем преломления меньшим, чем у линзы (рис. 19.1). Толщина плёнки подбирается так, чтобы волны, отражённые от обеих

ее поверхностей, погашали друг друга.

Рассчитаем минимальную толщину плёнки, нанесённой на поверхность линзы. Лучи 1 и 1', отражённые от верхней и нижней граней, когерентны и будут интерферировать. В соответствии с формулами (18.6) и (17.11) запишем:

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} . \quad (19.1)$$

Волна дважды отражается от оптически более плотной среды. Фаза колебаний вектора  $\vec{E}$  дважды изменяется на противоположную, т.е. в результате она не изменится. Это означает, что разность хода рассматриваемых лучей также не изменится.

Свет падает нормально, т.е. угол падения  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\sin 0^\circ = 0$ . С учетом этого получим:

$$2 d n = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} . \quad (19.2)$$

Отсюда следует, что толщина плёнки, соответствующей минимуму интенсивности отражённого света равна:

$$d = \frac{(2m + 1)\lambda}{4n}. \quad (19.3)$$

Минимальная толщина плёнки будет при условии  $m=0$ :

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4n}. \quad (19.4)$$

Белый свет – это свет, в котором присутствуют все длины волн видимого диапазона. Толщину плёнки принято рассчитывать для средней части спектра ( $\lambda \sim 550$  нм), поэтому просветленная оптика имеет сиреневатый оттенок (красная и фиолетовая части спектра не гасятся).

Гашение света не означает превращение световой энергии в другие формы. Как и при интерференции механических волн, гашение волн друг другом в данном участке пространства означает, что световая энергия сюда просто не попадает. Гашение отражённых волн, следовательно, означает, что весь свет проходит сквозь объектив.

**Интерферометры.** Явление интерференции используют в ряде довольно точных приборов, которые называются **интерферометрами**. Интерферометр

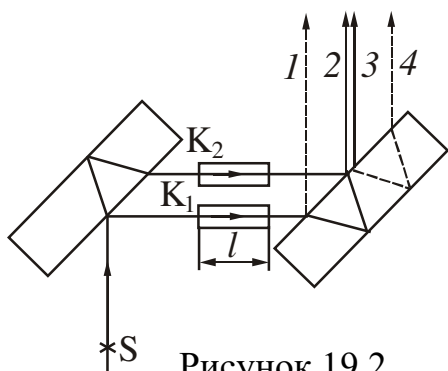


Рисунок 19.2

Жамена применяется для точных измерений изменения показателя преломления газов в зависимости от температуры, давления и влажности.

Схема интерферометра представлена на рис. 19.2. Две толстые одинаковые пластинки устанавливаются параллельно друг другу. Монохроматический свет от источника S падает на поверхность первой пластинки под углом, близким к  $45^\circ$ . Из первой пластинки выйдет два луча, идущих на некотором расстоянии друг от друга.

На их пути помещаются кюветы  $K_1$  и  $K_2$ . Если одну из кювет заполнить газом с известным показателем преломления, а вторую – газом, показатель преломления которого измеряется, то между лучами возникает дополнительная разность хода. Затем эти лучи падают на вторую пластинку. Из неё выходит уже четыре луча, причём второй и третий наложатся друг на друга. В результате возникновения дополнительной разности хода интерференционная картина смещается. По смещению интерференционной картины определяют изменение показателя преломления, процентное содержание примеси и т.д.

## §20 Дифракция света

Дифракция обусловлена волновой природой света и наблюдаются при его распространении в среде с резко выраженными неоднородностями. В узком смысле **дифракция** – это способность световой волны огибать препятствия,

размеры которых соизмеримы с длиной волны, и попадать в область геометрической тени.

Между интерференцией и дифракцией нет существенного физического различия. Оба явления заключаются в перераспределении светового потока, которое происходит при наложении когерентных волн (суперпозиции волн). Перераспределение интенсивности, возникающее в результате суперпозиции волн, возбуждаемых конечным числом дискретных когерентных источников, принято называть интерференцией волн. Перераспределение интенсивности, возникающее в результате суперпозиции волн, возбуждаемых когерентными источниками, расположенными непрерывно, принято называть дифракцией волн.

Приближенный метод, с помощью которого можно рассчитать закономерности дифракционных картин, называется **принципом Гюйгенса-Френеля**. Основные положения принципа Гюйгенса-Френеля:

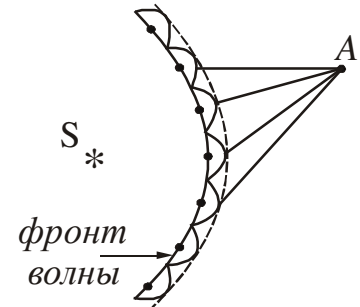


Рисунок 20.1

1. Каждую точку фронта волны можно рассматривать, как источник вторичных сферических волн (рис. 20.1).
2. Вторичные волны когерентны, поэтому они интерферируют между собой.
3. Амплитуда колебаний в любой точке определяется как результат интерференции вторичных волн от бесконечного множества вторичных источников, т.е. в точке А (рис. 20.1) накладывается множество лучей.

### 20.1 Дифракционная решётка

**Дифракционная решётка** – это спектральный оптический прибор, предназначенный для разложения света в спектр и измерения длин волн. Она представляет собой плоскую стеклянную пластинку, на которую с помощью делительной машины через строго одинаковые интервалы наносят параллельные штрихи. Промежутки между штрихами прозрачны для световых лучей и играют роль щелей. Штрихи рассеивают лучи и, поэтому, являются непрозрачными. Основным параметром решётки является расстояние между серединами соседних штрихов, которое называют **периодом  $d$  (постоянной) дифракционной решётки**:

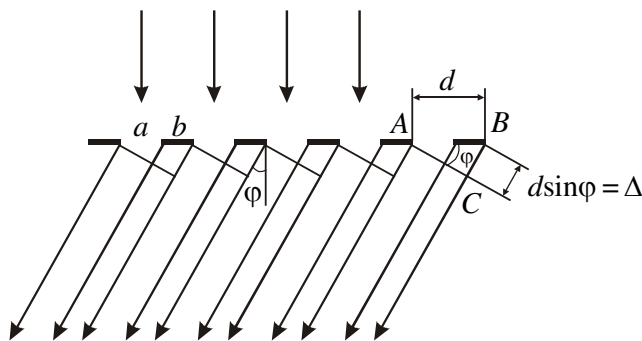


Рисунок 20.2

$$d = a + b, \quad (20.1)$$

где  $a$  – ширина щели,  $b$  – размер препятствия (см. рис. 20.2).

На 1 мм может быть нанесено  $10^3 \div 10^5$  штрихов, а период решётки может иметь значение  $(1 \div 10)$  мкм.

Рассмотрим дифракцию параллельных лучей. Чтобы получить пучок параллельных лучей обычно используют неболь-



шой источник света. Его помещают в фокусе собирающей линзы. Лучи после линзы идут параллельно друг другу. Распределение интенсивности изучают с помощью второй линзы, находящейся за решёткой и экрана, расположенного в фокальной плоскости этой линзы.

Пусть световая волна падает на решётку нормально (т.е. перпендикулярно ее поверхности). Из каждой щели выходят лучи по всем направлениям (рис. 20.2). Выберем из множества лучей те, которые отклонились на угол  $\varphi$  от первоначального направления. Угол  $\varphi$  называется *углом дифракции*. С помощью линзы эти лучи можно собрать в одну точку на экране (рис. 20.3). Так как в эту точку лучи приходят с некоторой постоянной разностью хода, то будет наблюдаться их интерференция.

Для того чтобы наблюдался максимум, должно быть выполнено условие:

$$\Delta = 2m \frac{\lambda}{2}, \tag{20.2}$$

где  $\Delta$  – разность хода лучей,  $\lambda$  – длина волны,  
 $m=0, 1, 2, 3 \dots$  – порядок (номер) дифракционного максимума.

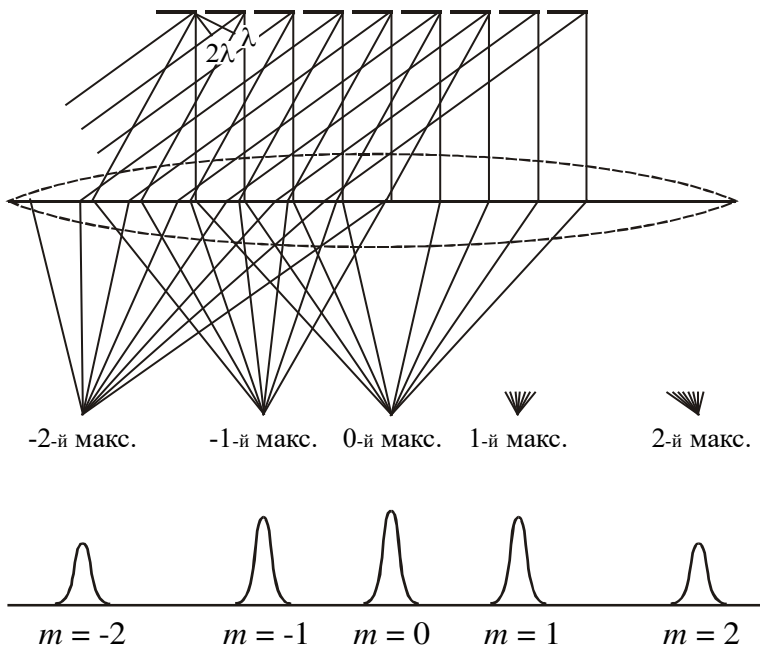


Рисунок 20.3

Из прямоугольного треугольника АСВ (см. рис. 20.2) можно найти разность хода лучей от соответствующих точек соседних щелей:

$$\Delta = d \sin \varphi. \tag{20.3}$$

Дифрагирующие лучи от всех других соответствующих точек соседних щелей будут иметь такую же разность хода в том же направлении. Другие пары щелей можно рассмотреть аналогичным путём.

Приравняв выраже-

ния (20.2) и (20.3), получим условие главных максимумов для дифракционной решётки:

$$d \sin \varphi = m\lambda. \tag{20.4}$$

Дифракционную картину получают на экране, который располагают в фокальной плоскости собирающей линзы. Дифракционная картина будет иметь вид узких светлых полос, разделенных тёмными промежутками. Центральный максимум ( $m=0$ ) имеет наибольшую интенсивность. Все другие располагаются



симметрично относительно центрального максимума справа и слева (рис. 20.3). По мере удаления от центра их интенсивность уменьшается.

Согласно (20.4) положения максимумов зависят от длины волны  $\lambda$ . При освещении решётки белым светом на экране наблюдается неокрашенный центральный максимум нулевого порядка, а по обе стороны от него – дифракционные спектры 1-го, 2-го и т.д. порядков. Спектры имеют вид радужных полосок, у которых наблюдается непрерывный переход окраски от фиолетового цвета у внутреннего края спектра к красному у внешнего края.

Дифракционные решётки характеризуют **разрешающей способностью**.

Разрешающей способностью спектрального прибора называют безразмерную величину

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \tag{20.5}$$

где  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$  – минимальная разность длин волн двух спектральных линий, при которой эти линии воспринимаются отдельно.

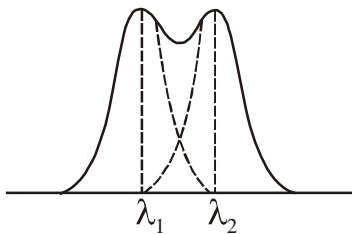


Рисунок 20.4

Разрешающую способность решётки можно рассчитать, пользуясь условием Рэлея, по которому две монохроматические спектральные линии видны отдельно в том случае, когда главный максимум одной линии попадает на место ближайшего к нему минимума второй линии (рис. 20.4). Из этого условия следует, что разрешающая способность дифракционной решётки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN, \tag{20.6}$$

где  $N$  – число штрихов решётки,  $m$  – порядок дифракционного максимума. В решётке большая разрешающая способность достигается за счёт больших значений  $N$ , так как порядок  $m$  невелик.

### 20.2 Дифракция рентгеновских лучей

**Пространственной, или трёхмерной,** дифракционной решёткой называется такая оптически неоднородная среда, неоднородности которой периодически повторяются. Примером пространственной дифракционной решётки может быть кристаллическая решётка твёрдого тела.

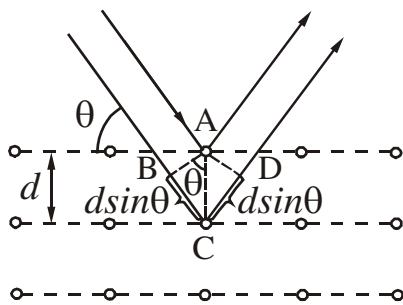


Рисунок 20.5

Частицы, находящиеся в узлах этой решётки (атомы, молекулы, ионы), играют роль упорядоченно расположенных центров, которые когерентно рассеивают свет. Постоянные кристаллических решёток твёрдых тел ( $d \sim 5 \cdot 10^{-10}$  м) значительно меньше длин волн видимого света ( $\lambda_{\text{вид.св.}} \sim 5 \cdot 10^{-7}$  м). Поэтому для видимого света кристаллы являются оптически однородной средой. В то же время для рентгеновских лучей

( $\lambda_{\text{рентг.}} = 10^{-11} \div 10^{-9}$  м) кристаллы представляют собой естественные решётки.

Дифракцию рентгеновских лучей на кристаллах можно трактовать как результат интерференции рентгеновского излучения, зеркально отражающегося от системы параллельных плоскостей. Эти плоскости проходят через узлы кристаллической решётки и называются *атомными плоскостями кристалла* (рис. 20.5). Расстояние  $d$  между соседними атомными плоскостями называется *межплоскостным расстоянием*. Угол  $\theta$  между падающим лучом и атомной плоскостью кристалла называется *углом скольжения*.

Разность хода лучей, отражённых от двух соседних межатомных плоскостей

$$\Delta = BC + CD = 2d \sin \theta. \quad (20.8)$$

Для того, чтобы наблюдался максимум, должно выполняться условие:

$$\Delta = 2m \frac{\lambda}{2}. \quad (20.9)$$

Приравняв соотношения (20.8) и (20.9), получим:

$$2d \sin \theta = m \lambda. \quad (20.10)$$

Эта формула называется формулой Вульфа-Брэгга.

Дифракция рентгеновских лучей от кристаллов находит два основных применения:

1. Исследование спектрального состава рентгеновского излучения (рентгеновская спектроскопия).
2. Изучение структуры кристаллов (рентгеноструктурный анализ).

## §21 Взаимодействие световых волн с веществом

На характер распространения электромагнитных волн существенно влияет среда, в которой они распространяются. Согласно представлениям классической электронной теории, переменное электромагнитное поле световой волны, распространяющееся в диэлектрической среде, вызывает вынужденные колебания связанных зарядов (электронов и ионов), входящих в состав молекул среды.

Масса ионов намного больше массы электронов и они совершают заметные колебания под действием низкочастотного (инфракрасного) излучения. В области частот видимого и ультрафиолетового излучения определяющую роль играют вынужденные колебания внешних, наиболее слабо связанных электронов. Благодаря вынужденным колебаниям, электроны излучают вторичные волны, которые распространяются по всем направлениям.

Если среда оптически однородна, то расстояние между частицами среды меньше длины световой волны. Поэтому вторичные волны, излучаемые множеством соседних молекул, когерентны и интерферируют при наложении, гася друг друга во всех направлениях, кроме направления первичной волны. В результате интерференции в однородной изотропной среде образуется проходящая волна, фазовая скорость которой зависит от частоты, а направление распространения совпадает с направлением распространения первичной волны.

В неоднородной среде вторичные боковые волны не гасят друг друга. Реальные среды являются неоднородными, поэтому в реальных средах наблюдаются такие явления как рассеяние, дисперсия, полное внутреннее отражение. На границе раздела двух сред волны могут испытывать преломление, отражение и т.д.

### 21.1 Рассеяние световых волн

**Рассеянием света** называется явление преобразования света веществом, сопровождающееся изменением направления распространения света и проявляющееся как несобственное свечение вещества. Как уже отмечалось выше, в однородных средах вторичные волны, излучаемые колеблющимися электронами, гасят друг друга во всех направлениях, кроме направления первичной волны. Поэтому рассеяния света в однородной среде не происходит.

В неоднородной среде вторичные волны дифрагируют на неоднородностях среды и дают дифракционную картину, которая характеризуется равномерным распределением интенсивности по всем направлениям.

Среды с явно выраженной оптической неоднородностью называются **мутными средами**. К ним относятся: 1) дым – взвесь в газе мельчайших твердых частиц; 2) туман – взвесь в газе мельчайших жидких частиц; 3) взвеси или суспензии, образованные плавающими в жидкости твердыми частицами; 4) эмульсии – взвеси мельчайших частиц одной жидкости в другой, не растворяющей первую. Примером эмульсии является молоко.

Даже очень тщательно очищенные газы и жидкости в некоторой степени рассеивают свет. Причиной этого являются **флуктуации плотности** (отклонения плотности от средних значений, наблюдаемые в пределах малых объемов). Эти флуктуации вызваны беспорядочным движением молекул вещества. Обусловленное им рассеяние называется **молекулярным**.

Молекулярным рассеянием объясняется голубой цвет неба. Из-за беспорядочного движения молекул в атмосфере непрерывно возникают места сгущения и разрежения воздуха, которые рассеивают свет. Интенсивность рассеянного света обратно пропорциональна четвертой степени длины волны, поэтому голубые и синие лучи рассеиваются сильнее, чем желтые и красные, обуславливая голубой цвет неба. Когда Солнце находится низко над горизонтом, распространяющиеся от него лучи проходят большую толщину рассеивающей среды. В результате этого они оказываются обогащенными большими длинами волн. Поэтому небо на заре окрашивается в красные тона.

### 21.2 Поглощение световых волн

**Поглощением света** называется явление уменьшения энергии световой волны при ее распространении в веществе, происходящее вследствие преобразования энергии волны во внутреннюю энергию вещества. Поглощение света может вызвать нагревание вещества, возбуждение и ионизацию атомов или молекул, фотохимические реакции и другие процессы в веществе.

Интенсивность  $I$  электромагнитной волны, прошедшей поглощающий слой толщиной  $x$ , определяется законом Бугера–Ламберта:

$$I = I_0 e^{-\mu x}, \quad (21.1)$$

где  $I_0$  – интенсивность электромагнитной волны на границе среды,

$\mu$  – коэффициент поглощения, зависящий от химической природы и состояния среды, а также от частоты.

### 21.3 Преломление световых волн

**Преломлением света** называется изменение направления распространения волны в неоднородной среде, обусловленное зависимостью фазовой скорости от свойств среды. Различают преломление на плоской границе раздела двух однородных сред и преломление электромагнитных волн в плавно неоднородной среде (в масштабе длин волн).

Преломление света на плоской границе раздела двух однородных сред, подчиняется закону Снеллиуса (см. §16, п. 16.1).

От границы раздела диэлектриков распространяются две плоские волны – отраженная и преломленная. При этом интенсивности падающей волны  $I_{\text{пад}}$ , отраженной  $I_{\text{отр}}$  и преломленной  $I_{\text{прел}}$  связаны соотношениями

$$I_{\text{отр}} = I_{\text{пад}} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2; \quad I_{\text{прел}} = I_{\text{пад}} \left( \frac{2n}{n+1} \right)^2, \quad (21.2)$$

где  $n$  – показатель преломления среды.

Преломление электромагнитных волн в плавно неоднородной среде называют **рефракцией**. Рефракцией объясняются многие явления природы: миражи, звуковые каналы в океане и атмосфере, сверхдальнюю связь и т.д.

### 21.4 Дисперсия световых волн

**Дисперсией света** называется зависимость фазовой скорости электромагнитной волны в среде от ее частоты. Среда, в которых фазовая скорость зависит от частоты, называются **диспергирующими средами**. Фазовая скорость электромагнитной волны  $v = c/n$ , где  $c$  – скорость света в вакууме,  $n$  – показатель преломления среды. Скорость света в вакууме величина постоянная, поэтому существование дисперсии в среде обусловлено тем, что показатель преломления среды  $n$  зависит от частоты  $\omega$ .

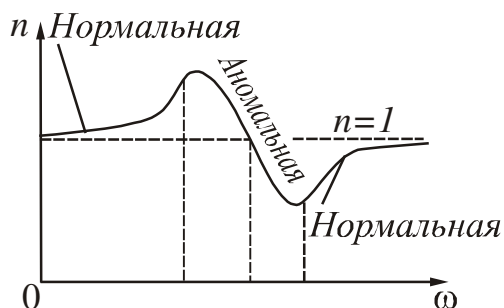


Рисунок 21.1

Если показатель преломления монотонно возрастает с увеличением частоты, то дисперсия называется **нормальной**. Если вещество поглощает часть лучей, то в области поглощения и вблизи нее наблюдается **аномальная дисперсия**. При аномальной дисперсии показате-

тель преломления убывает с увеличением частоты. На рис. 21.1 показана зависимость показателя преломления для нормальной и аномальной дисперсией.

Обычное стекло, например, прозрачно для видимого света, и в этой области частот наблюдается нормальная дисперсия света в стекле (рис. 21.2). Белый свет, пройдя через призму, образует радужный спектр. Фиолетовый луч преломляется больше, так как имеет большую частоту. В области инфракрасного и ультрафиолетового излучения для обычного стекла наблюдается аномальная дисперсия, так как оно поглощает эту часть спектра.

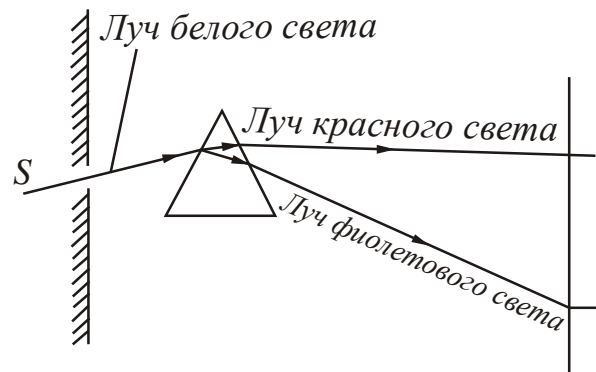


Рисунок 21.2

Если в некотором диапазоне частот фазовая скорость волны не зависит от частоты, то говорят, что дисперсия отсутствует. Примером такой волны является электромагнитная волна в вакууме.

Реальные источники создают переменные электромагнитные поля, которые описываются немонохроматическими волнами. При исследовании таких полей предполагается, что поле в данной точке может быть представлено суперпозицией бесконечного числа монохроматических волн (см. §11, п. 11.3), т.е. волна представляется в виде группы волн или волнового пакета. Волновой пакет характеризуют групповой скоростью, которая соответствует скорости распространения энергии поля. В диспергирующей среде происходит искажение формы группы волн в процессе их распространения и волновой пакет с течением времени расплывается. Понятие групповой скорости применимо только при условии, что поглощение энергии волны в данной среде невелико. При значительном затухании волн понятие групповой скорости утрачивает смысл. Такой случай имеет место в области аномальной дисперсии. В этой области поглощение очень велико и понятие групповой скорости оказывается неприменимым.

Дисперсия волн обуславливает многие природные явления и широко используется в технике. Например, все разновидности радуг объясняются спектральным расщеплением (из-за дисперсии света) и дифракцией солнечных лучей в дождевых каплях. Дисперсия волн в ионосферной плазме определяет частоту радиосигналов, отражающихся в данном слое ионосферы. На дисперсии волн основаны принципы действия многих радиотехнических, оптических и других устройств: рефрактометров, антенн с частотным сканированием, диаграмм направленности и т.д.

### 21.5 Давление световых волн

**Давлением света** называется давление, которое производят электромагнитные световые волны, падающие на поверхность какого-либо тела. В квантовой оптике световое давление является следствием того, что у фотона имеется импульс  $\vec{p}$ . При столкновении фотона с поверхностью тела этот импульс передается атомам или молекулам вещества. Аналогично этому, давление газа рас-

смаатривается как результат передачи импульса молекулами газа частицам на поверхности стенки сосуда.

Из теории Максвелла можно получить формулу для расчета давления, производимого электромагнитными волнами:

$$p = (1 + r)w, \quad (21.3)$$

где  $w$  – объемная плотность энергии электромагнитных волн,

$r$  – коэффициент отражения (если поверхность зеркальная, то  $r = 1$ , если поверхность абсолютно чёрная, то  $r = 0$ , и если тело серое, то  $0 < r < 1$ ).

Экспериментально давление света было доказано опытами П.Н. Лебедева.

## §22 Поляризация света

Электромагнитные волны являются поперечными. Это означает, что вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$  и вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  ( $\vec{E} \perp \vec{H}$ ) колеблются в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны (рис. 22.1).

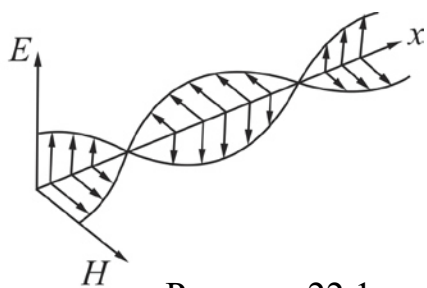


Рисунок 22.1

Как отмечалось ранее, вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$  называется световым вектором. Направление колебаний светового вектора с течением времени может изменяться.

Если все направления колебаний светового вектора в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, равновероятны, то свет называется **неполяризованным** или **естественным**. Если колебания вектора каким-либо образом упорядочены, то свет называется **поляризованным**. Упорядочение в ориентации векторов напряженности электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  полей световой волны в плоскости, перпендикулярной световому лучу называется **поляризацией света**. Поляризоваться могут только поперечные волны.

Для того чтобы определить, поляризован свет или нет, используют приборы, которые пропускают свет только с определенным направлением вектора  $\vec{E}$  (рис. 22.2). В зависимости от назначения их называют поляризаторами или анализаторами. Если свет неполяризованный, то при повороте анализатора вокруг горизонтальной оси интенсивность света, воспринимаемого фотоприемником, всегда одна и та же.

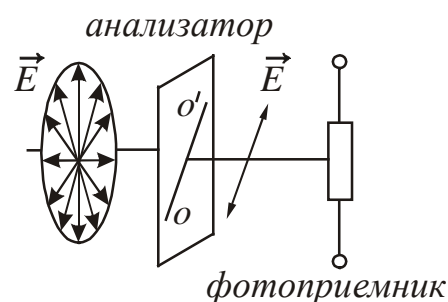


Рисунок 22.2

Кроме поляризованного света существует частично поляризованный свет. В этом случае направление светового вектора также изменяется хаотически, но имеется некоторое направление, при котором в среднем амплитуда колебаний больше. Для этого случая вводят понятие **степени поляризации**: вращая анализатор, определяют значения максимальной  $I_{\max}$  и минималь-

ной  $I_{\min}$  интенсивности, воспринимаемой фотоприемником. Степень поляризации определяется выражением:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (22.1)$$

Для неполяризованного света  $I_{\max}=I_{\min}$ , степень поляризации  $P=0$ .

Если неполяризованный свет проходит через поляризатор, то он становится линейно или плоско поляризованным светом. При этом  $I_{\min}=0$ , а степень поляризации равна 1.

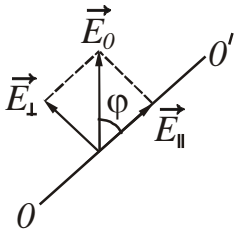


Рисунок 22.3

Плоскость, в которой происходят колебания вектора  $\vec{E}$  и которая проходит через направление распространения волны, называется **плоскостью поляризации**.

Для линейно поляризованного света справедлив закон Малюса. Пусть колебания электрического вектора происходят в вертикальной плоскости и амплитуда колебаний равна  $E_0$  (рис. 22.3). Если ось анализатора  $OO'$  повернута на угол  $\varphi$  по отношению к направлению поляризации, то к фотоприемнику пройдет свет с амплитудой

$$E_{\parallel} = E_0 \cos \varphi.$$

Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды, поэтому

$$I = I_0 \cos^2 \varphi, \quad (22.2)$$

где  $I_0$  – интенсивность поляризованного света, падающего на анализатор;

$I$  – интенсивность света, вышедшего из анализатора;

$\varphi$  – угол между плоскостью поляризации луча, падающего на анализатор и плоскостью пропускания анализатора.

Выражение (22.2) называется **законом Малюса**.

В реальных условиях необходимо учитывать, что электромагнитные волны отражаются и поглощаются, т.е. для реальных условий закон Малюса будет выглядеть следующим образом:

$$I = I_0(1 - k) \cos^2 \varphi, \quad (22.3)$$

где  $k$  – коэффициент, учитывающий потери на отражение и поглощение.

## §23 Способы получения поляризованного света

### 23.1 Отражение от границы раздела двух диэлектриков.

#### Закон Брюстера

Световые лучи, проходя через границу раздела двух сред с разными показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ , испытывают отражение и преломление. Отражённый и преломлённый лучи всегда оказываются частично поляризованными. В отражённом свете колебания происходят преимущественно перпендикулярно плоскости падения луча, в преломлённом – в плоскости падения (рис. 23.1). Д. Брюстер экспериментально установил, что отражённый луч будет полностью



поляризован, если отражённый и преломлённый лучи перпендикулярны друг другу (рис. 23.2). Соответствующий угол падения называют *углом Брюстера* и обозначают  $\alpha_B$ .

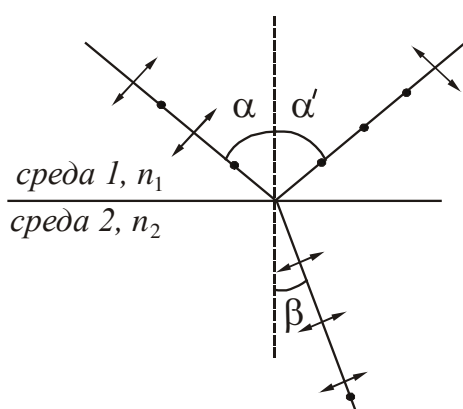


Рисунок 23.1

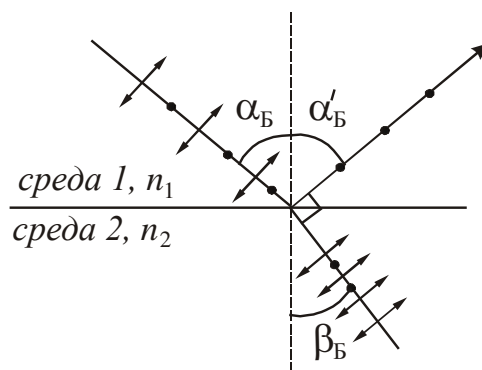


Рисунок 23.2

Угол Брюстера определяется следующим образом:

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}. \quad (23.1)$$

Выражение (23.1) называется законом Брюстера: *Свет, отражённый от границы двух диэлектриков, полностью линейно поляризован при угле падения, тангенс которого равен относительному показателю преломления среды, отражающей свет.*

### 23.2 Преломление света в тонкой пластинке

Так как свет, отражённый от границы раздела двух диэлектриков оказывается частично (или полностью) поляризованным, то проходящий свет также частично поляризуется. Преимущественное направление колебаний электрического вектора в прошедшем свете совпадает с плоскостью преломления луча (рис. 23.1, 23.2). Максимальная поляризация проходящего света достигается при падении под углом Брюстера.

Степень поляризации проходящего света можно повышать, подвергая его ряду последовательных отражений и преломлений. Это осуществляется в стопе, состоящей из нескольких одинаковых и параллельных друг другу пластин из прозрачного диэлектрика (например, стекла), установленных под углом Брюстера к падающему свету. Если число пластин достаточно велико, то проходящий через стопу свет оказывается тоже практически линейно поляризованным.

### 23.3 Двойное лучепреломление

В оптически анизотропных кристаллах наблюдается явление *двойного лучепреломления*. Это явление состоит в том, что луч света, падающий на поверхность кристалла раздваивается в нем на два преломлённых луча со взаимно перпендикулярными плоскостями колебаний. Один из лучей подчиняется



обычным законам преломления и удовлетворяет закону Снеллиуса (см. п. 16.1), поэтому его называют обыкновенным лучом и обозначают буквой  $o$  (рис. 23.3). Второму лучу обозначают буквой  $e$  и называют необыкновенным. Он не лежит в плоскости падения и не подчиняется закону

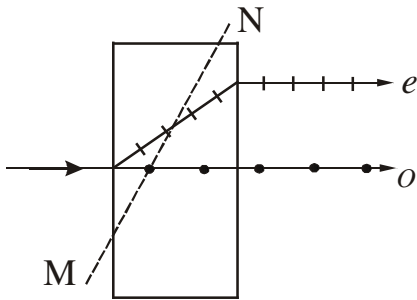


Рисунок 23.3

Снеллиуса. Например, если даже свет падает нормально (рис. 23.3), необыкновенный луч преломляется. Кристаллы, обладающие двойным лучепреломлением, подразделяются на одноосные и двуосные. У одноосных кристаллов имеется направление, вдоль которого обыкновенный и необыкновенный лучи распространяются не разделяясь. Это направление называется *оптической осью* кристалла. Оптическая ось – это не прямая

линия, проходящая через какую-то точку кристалла, а определенное направление в кристалле. Любая прямая, параллельная данному направлению, является оптической осью кристалла. У двуосных кристаллов таких направлений два.

Из кристаллов, обладающих двойным лучепреломлением, изготавливают *поляризационные призмы*. Одной из них является *призма Николя*. Она вырезана из кристалла исландского шпата так, что ее грани АВ и CD параллельны оптической оси MN кристалла (рис. 23.4). Призма разрезана по диагональной плоскости AC и склеена по этой поверхности

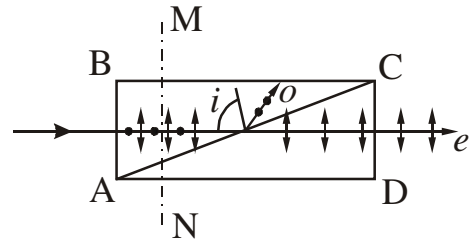


Рисунок 23.4

тонким слоем оптически изотропного вещества, которое называется канадским бальзамом. Для обыкновенных лучей канадский бальзам является средой оптически менее плотной, чем материал призмы. Для необыкновенного луча он является оптически более плотной средой. Свет падает на призму нормально к ее грани АВ. Обыкновенный и необыкновенный лучи распространяются в призме, не преломляясь, до слоя канадского бальзама. Размеры призмы подбираются таким образом, чтобы угол падения обыкновенного луча на поверхность AC был больше предельного угла внутреннего отражения (см. п. 16.1). Поэтому обыкновенная волна полностью отражается от слоя канадского бальзама (луч  $o$  на рис. 23.4). Необыкновенный луч  $e$  свободно проходит через слой бальзама и вторую половину поляризационной призмы. Таким образом, поляризационная призма может быть использована как поляризатор.

### Посмотрите лекционные демонстрации:

1. Поляризация естественного света при отражении от стекла  
<http://youtube.com/watch?v=UdmgVCi9VPY>
2. Угол Брюстера  
<http://youtube.com/watch?v=WickU6F8GrA>
3. Естественный видимый свет. Три поляризатора. Закон Малюса  
<http://youtube.com/watch?v=xDIVlk7Jf3I>

4. Поляризатор и анализатор для видимого света – 1  
<http://youtube.com/watch?v=TXeG2Tz0hb4>
5. Поляризатор и анализатор для видимого света – 2  
<http://youtube.com/watch?v=wR-WPocc128>
6. Двойное лучепреломление (кристалл исландского шпата).  
<http://youtube.com/watch?v=Ps0FcQY2y2k> <http://www.youtube.com/watch?v=xDqXUOKxNKg>
7. Двойное лучепреломление (видимый свет)  
<http://www.youtube.com/watch?v=xDqXUOKxNKg>

### §24 Искусственное двойное лучепреломление. Эффект Керра

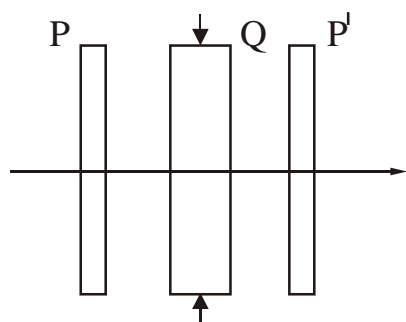


Рисунок 24.1

Двойное лучепреломление может возникать в прозрачных телах под влиянием внешних воздействий. В частности это происходит при механических деформациях тел. Поместим стеклянную пластинку Q между скрещенными поляризаторами P и P' (рис. 24.1). Если стекло не деформировано, то такая система свет не пропускает. Если пластинку сжать, то свет начинает проходить. Наблюдаемая в прошедших лучах картина оказывается испещренной цветными полосами. По расположению полос можно судить о распределении напряжений внутри пластины, так

как каждая такая полоса соответствует одинаково деформированным местам пластинки.

Возникновение двойного лучепреломления в жидкостях и аморфных телах под воздействием электрического поля называется **эффектом Керра** (обнаружен в 1875 году). Схема установки для исследования эффекта Керра показана на рис. 24.2. Между скрещенными поляризаторами P и P' помещается ячейка Керра, которая представляет собой герметичный сосуд с жидкостью. В сосуд введены пластины конденсатора. Если на пластины подать напряжение, то под действием электрического поля жидкость приобретает свойства двойного лучепреломляющего кристалла. Возникшая между обыкновенным и необыкновенным лучами разность фаз пропорциональна квадрату напряженности электрического поля:

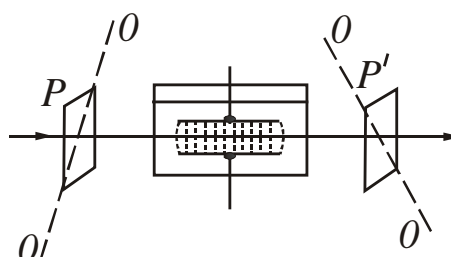


Рисунок 24.2

$$\Delta\varphi = 2\pi B l E^2, \quad (24.1)$$

где  $l$  – путь, пройденный лучами;  $B$  – постоянная Керра.

Постоянная Керра зависит от вещества, его температуры, длины волны света. Из жидкостей наибольшей постоянной Керра обладает нитробензол. Объясняется эффект Керра различной поляризуемостью молекул по разным

направлениям под действием электрического поля. Время, в течение которого устанавливается преимущественная ориентация молекул, составляет порядка  $10^{-10}$  с. Поэтому ячейку Керра можно использовать как безынерционный световой затвор. В отсутствие поля затвор будет закрыт, при включении напряжения затвор пропускает значительную часть света, прошедшего через первый анализатор Р.

### §25 Вращение плоскости поляризации

При прохождении поляризованного света через некоторые вещества происходит поворот плоскости поляризации световой волны. Это явление называется *вращением плоскости поляризации*. Вещества, которые способны поворачивать плоскость поляризации падающих на них световых волн, называются *оптически активными веществами*. Оптически активными могут быть как жидкости, так и кристаллы. Например, растворы сахара, глюкозы, скипидар, киноварь, кварц и т.д. Различают правое вращение, или положительное, и левое, или отрицательное. При правом вращении плоскость поляризации поворачивается по часовой стрелке для луча, падающего в глаз наблюдателя, при левом – в противоположном направлении.

Для оптически активных жидкостей угол поворота  $\varphi$  плоскости поляризации определяется соотношением:

$$\varphi = [a]lc, \quad (25.1)$$

где  $l$  – толщина слоя жидкости;  
 $c$  – концентрация раствора;  
 $[a]$  – удельная постоянная раствора, зависящая от природы вещества.

Угол поворота плоскости поляризации кристаллическими веществами определяется соотношением:

$$\varphi = al, \quad (25.2)$$

где  $l$  – путь, пройденный лучом в кристалле;  
 $a$  – постоянная вращения, зависящая от длины волны.

Если между двумя скрещенными поляризаторами поместить оптически активное вещество (кристалл кварца, прозрачную кювету с раствором сахара и т.п.), то поле зрения просветляется. Чтобы снова получить темноту, нужно повернуть один из поляризаторов на угол  $\varphi$ , который определяется формулами (25.1) и (25.2). В случае раствора, зная удельную постоянную вращения  $[a]$  данного вещества и длину  $l$ , можно, измерив угол поворота  $\varphi$ , найти концентрацию раствора. Такой способ определения концентрации растворов применяют в производстве различных веществ.

## Квантовая оптика

*Квантовой оптикой* называется раздел оптики, занимающийся изучением явлений, в которых проявляются квантовые свойства света. К таким явлениям относятся тепловое излучение, фотоэлектрический эффект, эффект Комптона.

## §26 Тепловое излучение. Закон Кирхгофа

Все тела в той или иной степени излучают электромагнитные волны. Например, сильно нагретые тела светятся, а при обычных температурах являются источниками только невидимого инфракрасного излучения.

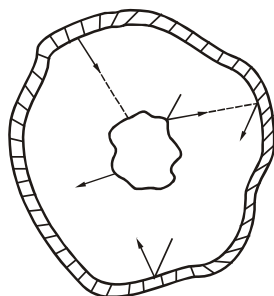


Рисунок 26.1

**Электромагнитное излучение, испускаемое веществом и возникающее за счёт его внутренней энергии, называется тепловым.** Оно зависит только от температуры и оптических свойств излучающего тела.

Окружим излучающее тело оболочкой с идеально отражающей поверхностью (рис. 26.1). Воздух из оболочки удалим. Отражённое оболочкой излучение, упав на тело, поглотится им (частично или полностью). Следовательно, будет происходить непрерывный обмен энергией между телом и заполняющим оболочку излучением.

Если распределение энергии между телом и излучением остается неизменным для каждой длины волны, то состояние системы «тело – излучение» называется равновесным. **Тепловое излучение – единственный вид излучения, который может находиться в термодинамическом равновесии с излучающими телами.** Все остальные виды излучения оказываются неравновесными. При равновесии расход энергии тела на тепловое излучение компенсируется за счёт поглощения телом такого же количества энергии падающего на него излучения. Равновесное излучение устанавливается в адиабатически замкнутой системе, т.е. такой, которая не обменивается теплом с внешней средой. В такой системе все тела находятся при одной и той же температуре.

### 26.1 Характеристики теплового излучения

В физической литературе нет единой терминологии в отношении величин, характеризующих тепловое излучение. Поэтому мы приводим в скобках второе название физической величины.

**Энергетический поток** ( $\Phi_{\text{э}}$ ) – скалярная физическая величина, равная энергии электромагнитного излучения всех участков спектра, излучаемой за единицу времени:

$$\Phi_{\text{э}} = \frac{dW}{dt}.$$

Для средних величин

$$\Phi_{\text{э}} = \frac{W}{t}. \quad (26.1)$$

$$[\Phi_{\text{э}}] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}.$$

**Энергетическая светимость (излучательность)** ( $R_{\text{э}}$ ) – скалярная физическая величина, равная энергии, излучаемой с единицы поверхности за единицу времени во всем диапазоне длин волн (от 0 до  $\infty$ ):

$$R_{\nu} = \frac{d\Phi}{dS}.$$

Для средних величин

$$R_{\nu} = \frac{W}{St}. \quad (26.2)$$

$$[R_{\nu}] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

**Спектральная плотность энергетической светимости (испускательная способность)** ( $r_{\lambda, T}$ ) – скалярная физическая величина, равная энергии, излучаемой с единицы поверхности за единицу времени в единичном интервале, выбранном вблизи заданной длины волны:

$$r_{\lambda, T} = \frac{dR_{\nu}}{d\lambda}. \quad (26.3)$$

$$[r_{\lambda, T}] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}.$$

Значение спектральной плотности энергетической светимости (испускательной способности) зависит от длины волны, температуры, химического состава тела и состояния его поверхности. Энергетическая светимость (излучательность) и спектральная плотность энергетической светимости (испускательная способность) связаны соотношением

$$R_{\nu} = \int_0^{\infty} r_{\lambda, T} d\lambda. \quad (26.4)$$

**Поглощательная способность (монохроматический коэффициент поглощения)** ( $\alpha_{\lambda, T}$ ) – безразмерная физическая величина, показывающая какая доля энергии электромагнитных волн, падающих на тело, поглощается им:

$$\alpha_{\lambda, T} = \frac{dW_{\text{погл}}}{dW_{\text{пад}}}. \quad (26.5)$$

По определению поглощательная способность не может быть больше единицы. Поглощательная способность реальных тел зависит от свойств вещества и спектрального состава падающего излучения.

## 26.2 Классификация тел

**Абсолютно чёрным телом** называется тело, которое полностью поглощает все падающее на него излучение независимо от его спектрального состава и направления падающего излучения, ничего не отражая и не пропуская. Следовательно, поглощательная способность абсолютно чёрного тела тождественно равна единице:

$$\alpha_{\lambda, T, S} \equiv 1. \quad (26.6)$$

Индекс  $s$  – это первая буква немецкого слова *schwarz* – *чёрный*.

Абсолютно чёрных тел в природе не существует. Сажа и платиновая чернь имеют поглотительную способность, близкую к единице, но в ограниченном интервале длин волн. В далекой инфракрасной области их поглотительная способность меньше единицы.

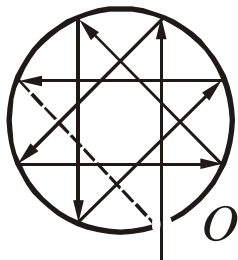


Рисунок 26.2

Моделью абсолютно чёрного тела может служить почти замкнутая полость с небольшим отверстием (рис. 26.2). Излучение, проникшее внутрь полости через отверстие  $O$ , многократно отражается от стенок. При каждом отражении часть энергии поглощается. В результате чего практически все излучение любой частоты полностью поглощается стенками полости независимо от материала.

В теории теплового излучения наряду с понятием абсолютно чёрного тела часто пользуются другой идеализированной моделью реальных тел – серым телом.

**Серым телом** называется тело, поглотительная способность которого меньше единицы и не зависит от длины волны (частоты) излучения и от абсолютной температуры.

Энергия  $dW_{\text{пад}}$ , падающая на непрозрачное тело, равна сумме отражённой  $dW_{\text{отр}}$  и поглощенной  $dW_{\text{погл}}$  энергий:

$$dW_{\text{пад}} = dW_{\text{погл}} + dW_{\text{отр}}.$$

Разделив это соотношение на  $dW_{\text{пад}}$ , получим:

$$\alpha_{\lambda, T} + \rho_{\lambda, T} = 1. \quad (26.7)$$

где

$$\rho_{\lambda, T} = \frac{dW_{\text{отр}}}{dW_{\text{пад}}}, \quad (26.8)$$

величина, называемая отражательной способностью.

**Отражательная способность** ( $\rho_{\lambda, T}$ ) – безразмерная физическая величина, показывающая, какая доля энергии электромагнитных волн, падающих на тело, отражается им.

Отражательная  $\rho_{\lambda, T}$  способность зависит от свойств вещества и спектрального состава падающего излучения. Для реальных тел :

$$0 < \alpha_{\lambda, T} < 1 \quad \text{и} \quad 0 < \rho_{\lambda, T} < 1. \quad (26.9)$$

Отражательная способность абсолютно чёрного тела равна нулю, т.е.  $\rho_{\lambda, T, s} = 0$ .

Непрозрачные тела, у которых поглотительная способность равна нулю, не излучают и не поглощают электромагнитных волн: они полностью отражают падающее на них излучение. Если отражение при этом происходит по законам геометрической оптики, то тело называется **зеркальным**. Для зеркальных тел:

$$\rho_{\lambda,T} \equiv 1, \quad \alpha_{\lambda,T} \equiv 0. \quad (26.10)$$

Абсолютно зеркальных тел в природе также не существует. Близкой к зеркалу является поверхность серебра ( $\rho_{\lambda,T} \approx 0,95$ ).

**Посмотрите лекционную демонстрацию:**

Как белое сделать чёрным. Natürlich!

<https://www.youtube.com/watch?v=l-66WYjOB1s>

### 26.3 Закон Кирхгофа

Между испускательной и поглотательной способностями непрозрачного тела имеется связь. Рассмотрим следующий эксперимент. Пусть внутри замкнутой вакуумированной оболочки, температура которой постоянна, находятся несколько тел (рис. 26.3). Эти тела могут обмениваться энергией между собой и оболочкой только путём испускания и поглощения электромагнитных волн. Опыт показывает, что через некоторое время все тела примут одинаковую температуру, равную температуре оболочки  $T$ . В таком состоянии тело, обладающее большей испускательной способностью  $r_{\lambda,T}$  теряет больше энергии, чем то тело, у которого испускательная способность меньше. Так как температура тел не меняется, то тело, испускающее больше энергии, должно больше ее поглощать, т.е. обладать бóльшей поглотательной способностью.

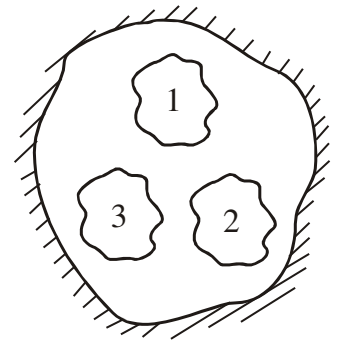


Рисунок 26.3

Таким образом, чем больше испускательная способность  $r_{\lambda,T}$  тем больше поглотательная способность  $\alpha_{\lambda,T}$ . В 1895 году немецкий физик Кирхгоф установил, что

**Отношение испускательной способности к поглотательной способности не зависит от природы тел, а является для всех тел одной и той же универсальной функцией длины волны и температуры.**

$$\left( \frac{r_{\lambda,T}}{\alpha_{\lambda,T}} \right)_1 = \left( \frac{r_{\lambda,T}}{\alpha_{\lambda,T}} \right)_2 = \left( \frac{r_{\lambda,T}}{\alpha_{\lambda,T}} \right)_3 = \dots = f(\lambda, T), \quad (26.11)$$

где индексы 1, 2, 3 ... относятся к разным телам. Соотношение (26.11) называется законом Кирхгофа.

Для абсолютно чёрного тела поглотательная способность  $\alpha_{\lambda,T,S} \equiv 1$ . Следовательно, из соотношения (26.11) вытекает, что испускательная способность  $r_{\lambda,T}$  для такого тела равна  $f(\lambda, T)$ . Таким образом, универсальная функция Кирхгофа – это испускательная способность абсолютно чёрного тела.

После установления закона Кирхгофа стало очевидным, что первоочередная задача теории теплового излучения – найти, как испускательная способность абсолютно чёрного тела  $r_{\lambda,T,S}$  зависит от длины волны  $\lambda$  и температуры  $T$ .

Разлагая излучение полости с очень маленьким отверстием в спектр и измеряя интенсивность различных участков спектра, удалось экспериментально



найти вид функции  $f(\lambda, T)$ . Результаты этого эксперимента представлены на графике (рис. 26.4). Из анализа графика были сделаны следующие выводы.

1. Энергетический спектр теплового излучения является непрерывным, т.е. в нем присутствуют все длины волн от 0 до  $\infty$ .
2. В области малых и больших длин волн излучение мало.
3. Кривые имеют максимумы, т.е. существует длина волны, при которой лучеиспускательная способность абсолютно чёрного тела принимает наибольшее значение. С повышением температуры максимум смещается в сторону более коротких длин волн.
4. Площадь, охватываемая кривой, даёт излучательность абсолютно чёрного тела при соответствующей температуре.
5. Излучательность абсолютно чёрного тела сильно возрастает с температурой.

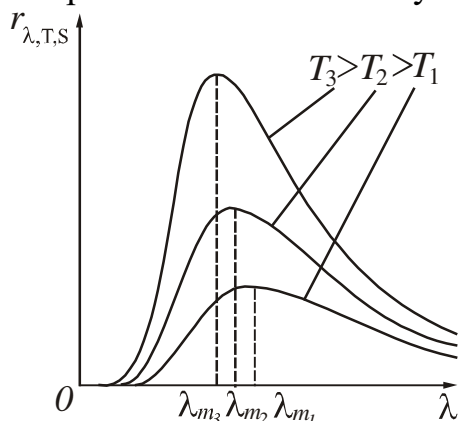


Рисунок 26.4

На основе этих выводов и других экспериментов был установлен ряд законов теплового излучения.

**Посмотрите лекционную демонстрацию:**

Походная фляга или закон Кирхгофа

<https://www.youtube.com/watch?v=ShDgf3GsiZc>

**§27 Законы Стефана – Больцмана и Вина**

По закону Стефана – Больцмана *излучательность (энергетическая светимость) абсолютно чёрного тела пропорциональна четвертой степени его абсолютной температуры:*

$$R_{\lambda} = \sigma T^4, \tag{27.1}$$

где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>К<sup>4</sup>) – постоянная Стефана – Больцмана.

Для серых тел этот закон применяют в следующем виде:

$$R_{\lambda} = \alpha \sigma T^4, \tag{27.2}$$

где  $\alpha$  – коэффициент монохроматического поглощения (поглощательная способность).

В. Вин нашел положение максимума функции и зависимость максимального значения испускательной способности абсолютно чёрного тела от температуры.

*Длина волны, на которую приходится максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости (испускательной способности) абсолютно чёрного тела, обратно пропорциональна его абсолютной температуре:*

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \tag{27.3}$$

где  $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$  м·К – постоянная Вина.



Выражение (27.3) называют законом смещения Вина.

**Максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости (испускательной способности) абсолютно чёрного тела пропорционально пятой степени его абсолютной температуры:**

$$(r_{\lambda,T})_{\max} = cT^5, \quad (27.4)$$

где  $c=1,3 \cdot 10^{-5}$  Вт/(м<sup>3</sup>·К<sup>5</sup>) – постоянная величина.

Выражение (27.4) называют вторым законом Вина.

Все попытки теоретического обоснования экспериментально найденного вида функции Кирхгофа  $f(\lambda, T) = r_{\lambda, T, S}$  в рамках классической физики оказались безуспешными.

**Посмотрите лекционную демонстрацию:**

Закон смещения Вина

<https://www.youtube.com/watch?v=SYG-hTIs954>

## §28 Гипотеза Планка. Формула Планка

В 1900 году М. Планк выдвинул новую гипотезу о природе излучения. Суть этой гипотезы заключается в следующем:

**Электромагнитное излучение испускается в виде отдельных порций энергии (квантов), величина которых пропорциональна частоте излучения.**

Энергия кванта:

$$\varepsilon = h\nu, \quad (28.1)$$

где  $\nu$  – частота излучения.

Коэффициент пропорциональности  $h$  впоследствии был назван постоянной Планка.

$$h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}.$$

Используя соотношение, связывающее скорость, длину волны и частоту  $c = \lambda\nu$ , энергию кванта можно выразить формулой

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}. \quad (28.2)$$

На основе своей гипотезы М. Планк разработал квантовую теорию теплового излучения. Ему удалось найти правильное выражение для функции Кирхгофа, т.е. получить формулу для расчёта испускательной способности абсолютно чёрного тела  $r_{\lambda, T, S}$ . Эта формула имеет вид:

$$r_{\lambda, T, S} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}, \quad (28.3)$$

где  $c$  – скорость света;

$k$  – постоянная Больцмана.

Формула (28.3) называется *формулой Планка*. Кривые, рассчитанные по этой формуле, совпали с экспериментально полученными кривыми (рис. 26.4).

Если в выражение  $R_{\lambda,T} = \int_0^{\infty} r_{\lambda,T} d\lambda$  (см. формулу (26.4)) подставить значение испускательной способности в соответствии с формулой Планка и проинтегрировать, то можно получить закон Стефана – Больцмана. Если взять производную функции  $r_{\lambda,T,S}$  по длине волны  $\lambda$  и приравнять ее к нулю, то можно рассчитать  $b$  – постоянную Вина. Полученное значение совпадает с экспериментальным значением. Это является подтверждением правильности теории Планка.

Таким образом, можно утверждать, что *свету, кроме волновых свойств, присущи также и корпускулярные свойства*.

## §29 Оптическая пирометрия

Установление законов Стефана – Больцмана и Вина позволило создать приборы для измерения температуры, работающие без контакта с раскаленными телами.

Совокупность методов измерения температуры, основанных на законах теплового излучения, называется *оптической пирометрией*. Приборы, применяемые для этого, называются *пирометрами*.

Действие *радиационных пирометров* основано на фокусировке излучения раскаленной поверхности на некотором теплоприемнике. Яркость резкого (сфокусированного) изображения не зависит от расстояния до объекта, если оно велико по сравнению с фокусным расстоянием объектива. Важным является то, что создаваемое объективом изображение должно полностью перекрывать теплоприемник.

Предварительно пирометр градуируют по абсолютно чёрному телу. Но, поскольку излучательность раскаленной поверхности меньше излучательности абсолютно чёрного тела (по закону Кирхгофа), измеренная радиационная температура оказывается меньше действительной. Соответствующие поправочные коэффициенты имеются в справочниках.

Действие *яркостных пирометров* основано на сравнении яркости свечения тела, температура которого измеряется, и некоторого другого – нити лампы накаливания. Наблюдение ведется через красный светофильтр ( $\lambda=660$  нм). Применение этих пирометров связано с металлургией. На фоне изображения светящегося окошка доменной или мартеновской печи наблюдается нить накаливания. Регулируя ток через лампочку, добиваются уравнивания их яркостей в красном свете. При этом нить лампочки становится невидимой, поэтому такой пирометр называется пирометром с «исчезающей нитью».

Пирометр градуируется по абсолютно чёрному телу – при изменении тока накала по находящейся в поле наблюдения шкале считывается температура чёрного тела, при которой нить «исчезает». Так как излучательность реального тела при той же температуре меньше, чем излучательность чёрного тела, то для достижения равенства их яркостей реальное тело должно быть нагрето сильнее. Яркостная температура оказывается завышенной.

### §30 Внешний фотоэлектрический эффект. Законы фотоэффекта

**Внешним фотоэффектом** называется явление испускания электронов поверхностью вещества под действием света.

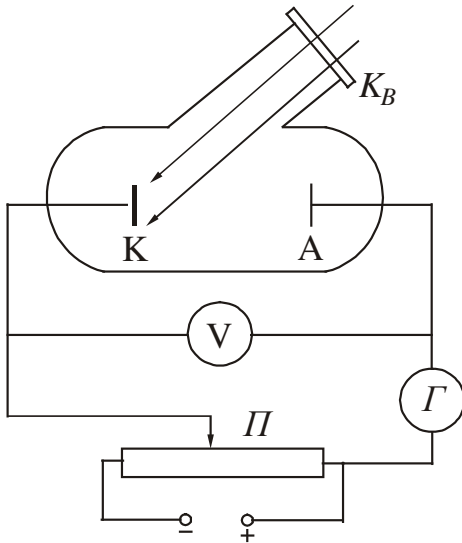


Рисунок 30.1

Электроны, вылетающие из вещества, называются **фотоэлектронами**, а электрический ток, образуемый ими при движении во внешнем электрическом поле, называется **фототоком**. Открыто явление Г. Герцем в 1887 году, основные закономерности установлены в 1888-1889 годах А. Н. Столетовым.

Исследование закономерностей фотоэффекта можно провести с помощью установки, схема которой изображена на рис. 30.1. Экспериментальные исследования показали, что даже ничтожные загрязнения поверхности металла существенно влияют на эмиссию электронов под действием света. Поэтому для изучения фотоэффекта пользуются вакуумной трубкой. Свет, проникающий через кварцевое окошко  $K_B$ , освещает катод К. Электроны, испущенные вследствие фотоэффекта, перемещаются под действием электрического поля к аноду А.

В результате в цепи прибора течет фототок, измеряемый гальванометром Г. Напряжение между анодом и катодом можно изменять с помощью потенциометра П.

Полученная зависимость фототока  $I$  от напряжения между электродами  $U$  (вольтамперная характеристика) представлена на рис. 30.2. Характеристика снималась при неизменном световом потоке  $\Phi$ .

Из анализа этой кривой можно сделать следующие выводы:

1. При некотором не очень большом напряжении фототок достигает насыщения. Это значит, что все электроны, испущенные катодом, попадают на анод. Сила тока насыщения  $I_H$  будет определяться количеством электронов, испускаемых катодом в единицу времени под действием света.
2. Пологий ход кривой указывает на то, что электроны вылетают из катода с различными по величине скоростями. При напряжении  $U=0$  часть электронов долетает до анода «самостоятельно», без помощи ускоряющего поля.
3. Для того чтобы обратить силу тока в нуль, нужно приложить **задерживающее** напряжение  $U_3$ . При таком напряжении ни одному из электронов, даже обладающему при вылете из катода наибольшим значением скорости  $v_{\max}$  не удастся достигнуть анода.

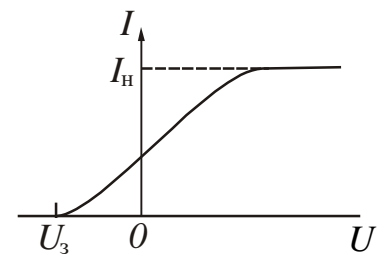


Рисунок 30.2

На основании экспериментов были установлены следующие законы фотоэффекта.

1. Фототок насыщения пропорционален световому потоку при неизменном спектральном составе света, падающего на анод.
2. Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов линейно зависит от частоты падающего света и не зависит от его интенсивности.
3. Для каждого вещества существует минимальная частота света  $\nu_0$  при которой еще возможен фотоэффект. При  $\nu < \nu_0$  (или при  $\lambda > \lambda_0$ ) фотоэффекта нет. Длину волны  $\lambda_0$  называют **красной границей фотоэффекта**.

Фотоэффект – явление безынерционное. Это означает, что между началом освещения и моментом возникновения фотоэффекта не протекает заметного времени. Опыты, произведенные в последнее время, показывают, что промежуток времени между началом освещения и появлением фототока не превышает  $10^{-9}$  с.

С точки зрения волновых представлений о свете фотоэффект объяснить не удалось. А. Эйнштейн высказал гипотезу о том, что свет не только излучается, но также распространяется в пространстве и поглощается веществом в виде отдельных квантов электромагнитного излучения. Квант оптического диапазона излучения называют **фотоном**.

Все фотоны монохроматического света частоты  $\nu$  имеют одинаковую энергию

$$\varepsilon = h\nu, \quad (30.1)$$

где  $h$  – постоянная Планка.

В случае поглощения света веществом каждый поглощенный фотон передает всю свою энергию электрону. Часть этой энергии электрон затрачивает на совершение работы выхода  $A_{\text{вых}}$  из вещества. **Работой выхода** называется минимальная энергия, которую необходимо сообщить электрону для того, чтобы удалить его из твердого или жидкого тела в вакуум. Остаток энергии образует кинетическую энергию электрона, покинувшего вещество. В этом случае по закону сохранения энергии должно выполняться соотношение

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{mv_{\text{max}}^2}{2}, \quad (30.2)$$

которое называется уравнением Эйнштейна для фотоэффекта.

Из уравнения Эйнштейна непосредственно вытекает второй закон фотоэффекта:

$$\frac{mv_{\text{max}}^2}{2} = h\nu - A_{\text{вых}}, \quad (30.3)$$

то есть максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона линейно зависит от частоты, так как работа выхода для данного вещества величина постоянная.

При  $\nu = \nu_0$  кинетическая энергия обращается в нуль. При этом

$$h\nu_0 = A_{\text{вых}}, \quad (30.4)$$

то есть красная граница фотоэффекта будет определяться природой вещества.

Если приложить задерживающее напряжение  $U_3$ , то фототок обращается в нуль. При этом работа электрического поля будет равна максимальной кинетической энергии вылетевших фотоэлектронов.

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = eU_3, \quad (30.5)$$

$m$  – масса электрона;  $e$  – заряд электрона.

Сделав замену в уравнении (30.2), получим еще одну форму записи уравнения Эйнштейна:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + eU_3. \quad (30.6)$$

### Посмотрите лекционную демонстрацию:

Фотоэффект – разрядка светом.

[https://www.youtube.com/watch?v=O5N\\_7jk3GWU](https://www.youtube.com/watch?v=O5N_7jk3GWU)

## §31 Фотон. Свойства фотона

**Фотон** – это элементарная частица, не имеющая массы покоя и движущаяся со скоростью света. Из законов релятивистской механики известна зависимость массы от скорости движения:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (31.1)$$

где  $m_0$  – масса покоя частицы. Из (31.1) найдем  $m_0$ :

$$m_0 = m\sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (31.2)$$

Фотон движется со скоростью света, т.е.  $v = c$ . Из (31.2) следует, что при  $v = c$

$$m_0 = 0.$$

Это означает, что фотон существует только в движении.

Массу фотона найдем из формулы взаимосвязи массы и энергии. По формуле Эйнштейна  $\varepsilon = mc^2$ . С другой стороны энергия фотона  $\varepsilon = h\nu$ . Приравняв эти соотношения, найдем массу фотона

$$m = \frac{h\nu}{c^2}. \quad (31.3)$$

Импульс фотона

$$p = mc = \frac{h\nu}{c}. \quad (31.4)$$

Используя соотношение, связывающее скорость, длину волны и частоту  $c = \lambda\nu$ , импульс фотона можно выразить формулой

$$p = \frac{h}{\lambda}, \quad (31.5)$$

где  $\lambda$  – длина волны в вакууме.

### §32 Эффект Комптона

Наиболее отчетливо корпускулярные свойства света проявляются в явлении, которое было открыто в 1923 году и называется эффектом Комптона. Суть явления заключается в следующем.

Если на рассеивающее вещество направить пучок монохроматического

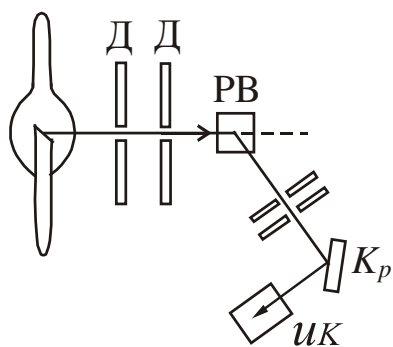


Рисунок 32.1

рентгеновского излучения, то длина волны  $\lambda'$  рассеянного излучения окажется больше длины волны  $\lambda$  падающего. Схема опыта Комптона представлена на рис. 32.1. Выделяемый диафрагмами пучок монохроматического рентгеновского излучения направлялся на рассеивающее вещество РВ. Спектральный состав исследовался с помощью рентгеновского спектрографа, состоящего из кристалла  $Kp$  и ионизационной камеры ИК. Разность  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$  оказалась зависящей только от угла  $\theta$ , образуемого направлением

рассеянного излучения с направлением первичного пучка. От длины волны  $\lambda$  и от природы рассеивающего вещества изменение длины волны  $\Delta\lambda$  не зависит.

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta), \quad (32.1)$$

где  $\theta$  – угол рассеяния, т.е. угол между направлением первоначального и рассеянного пучков;  $m_0$  – масса покоя частицы, на которой происходило рассеяние. Обозначим

$$\frac{h}{m_0c} = \lambda_C \quad (32.2)$$

и назовем  $\lambda_C$  – комptonовской длиной волны.

Подстановка в (32.2) значений  $h$ ,  $m_0$ ,  $c$  дает для электрона значение

$$\lambda_C = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м.}$$

Эффект Комптона можно объяснить, рассматривая рассеяние как процесс упругого столкновения рентгеновских фотонов с практически свободными электронами. Свободными можно считать слабее всего связанные с атомами электроны. Энергия связи этих электронов значительно меньше той, которую фотон может передать электрону при соударении.

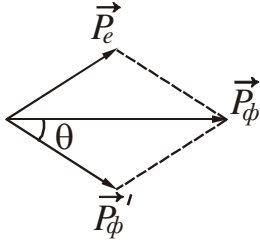


Рисунок 32.2

При упругом взаимодействии должны выполняться законы сохранения импульса (рис. 32.2) и энергии. До столкновения энергия электрона равна  $m_0c^2$  (энергия покоя), импульс равен нулю. После столкновения энергия электрона равна  $mc^2$ , импульс электрона становится равным  $\vec{p}_e$ . Фотон до столкновения имел импульс  $\vec{p}_\phi$ , энергию  $h\nu$ . После столкновения импульс фотона станет равным  $\vec{p}'_\phi$ , а энергия  $h\nu'$ .

Тогда можно записать следующие соотношения, выражающие законы сохранения импульса и энергии соответственно:

$$\vec{p}_\phi = \vec{p}'_\phi + \vec{p}_e \quad (32.2)$$

$$m_0c^2 + h\nu = mc^2 + h\nu' \quad (32.3)$$

Решение данной системы уравнений позволяет получить уравнение (32.1). Таким образом, из теории Комптона следует, что фотон передает электрону часть своей энергии и часть своего импульса. В результате уменьшения энергии падающего фотона длина волны рассеянного фотона увеличивается.

## ЧАСТЬ 3. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

### Элементы квантовой механики

**Квантовая механика** – это физическая теория явлений и процессов микромира. Под микромиром понимают совокупность объектов, линейные размеры которых порядка  $10^{-8} - 10^{-15}$  м. Возникла квантовая механика в связи с развитием экспериментальных исследований по изучению свойств теплового излучения, фотоэффекта, закономерностей атомных спектров.

#### §33 Гипотеза де Бройля

Законы классической механики и классической электродинамики оказались непригодными для описания поведения микрочастиц. Необходимо было пересмотреть представление об электроны в виде механической частицы, характеризуемой определёнными координатами и определённой скоростью.

В процессе изучения природы света выяснилось, что в оптических явлениях наблюдается корпускулярно-волновой дуализм. Интерференция, дифракция и поляризация говорят о волновой природе света, а фотоэффект и эффект Комптона – о корпускулярной.

В 1924 году Луи де Бройль выдвинул гипотезу о том, что **корпускулярно-волновая двойственность свойств имеет универсальный характер, т.е. частицы вещества наряду с корпускулярными свойствами имеют также и волновые**. Согласно гипотезе де Бройля, движение электрона или какой-либо другой частицы связано с волновым процессом, длина волны которого равна

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (33.1)$$

где  $h$  – постоянная Планка,  $p = mv$  – импульс частицы.

Если гипотеза справедлива, то должна наблюдаться дифракция микрочастиц.

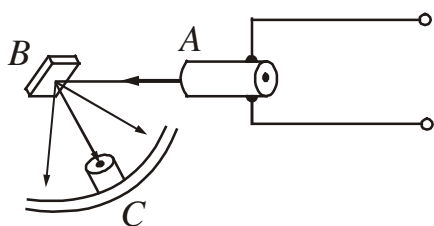


Рисунок 33.1

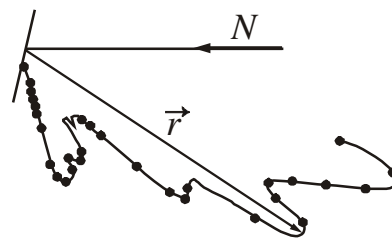


Рисунок 33.2

В 1927 году Дэвиссон и Джермер изучали рассеяние электронов на монокристалле никеля. Схема установки представлена на рис. 33.1. В электронной пушке A создавался поток электронов, который направлялся на кристалл никеля B. Скорость электронов определялась ускоряющим напряжением, созданным внутри пушки. Никелевую мишень можно было вращать вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка. Приёмник электронов C вращался вокруг той же



оси и регистрировал электроны, рассеянные мишенью по всем направлениям. Если бы электроны вели себя как классические частицы, то они должны были бы отражаться от мишени в соответствии с законами геометрической оптики. Но оказалось, что интенсивность рассеянных электронов различна по разным направлениям – имеются максимумы и минимумы числа электронов, рассеянных под разными углами, то есть наблюдалась дифракция.

На рис. 33.2 дана диаграмма рассеяния по направлениям числа электронов, рассеянных мишенью  $B$  относительно падающего пучка электронов  $N$ . Длина радиус-вектора  $\vec{r}$ , проведённого из центра мишени, пропорциональна числу электронов, рассеянных в данном направлении. Видно, что существуют максимумы и минимумы числа электронов, рассеянных под разными углами. Результаты опытов Дэвиссона и Джермера можно объяснить, используя идею де Бройля о волновых свойствах частиц. Зная ускоряющую разность потенциалов  $U_{\text{уск}}$ , можно рассчитать скорость электронов:

$$v = \sqrt{\frac{2eU_{\text{уск}}}{m}},$$

где  $e$  – заряд электрона,  $m$  – масса электрона.

Затем по формуле (33.1) можно найти соответствующую длину волны де Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2emU_{\text{уск}}}}.$$

Если пучок электронов обладает волновыми свойствами, то он должен отражаться от кристалла никеля так же, как и рентгеновское излучение, т.е. должно выполняться условие Вульфа – Брэгга:

$$2d \sin \theta = m\lambda,$$

где  $d$  – межплоскостное расстояние, известное из рентгенографических исследований. Подстановка реальных данных (значений  $d, \theta$ ) дала значение длины волны, совпадающее с длиной волны де Бройля.

Волновые свойства электронов также были обнаружены в опытах П.С. Тартаковского и Дж. П. Томсона. Была получена дифракционная картина электронного пучка, проходящего через тонкую (толщиной порядка  $10^{-7}$  м) металлическую фольгу. Опыт осуществлялся следующим образом (рис. 33.3). Пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов порядка нескольких десятков киловольт, проходил через фольгу и попадал на фотопластинку. Электрон при ударе о фотопластинку оказывает на неё такое же действие, как и фотон. Полученная таким образом электронограмма золота представлена на рис. 33.4.

Пользуясь подобными фотографиями, Томсон проверил формулу де Бройля и определил по формуле Вульфа – Брэгга период кристаллической решетки металла, через который проходили электроны. Результаты совпали с известными ранее данными рентгеноструктурного анализа.

Таким образом, идея де Бройля о волновых свойствах частиц получила экспериментальное подтверждение.

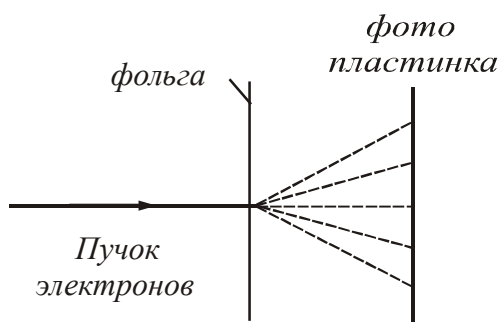


Рисунок 33.3

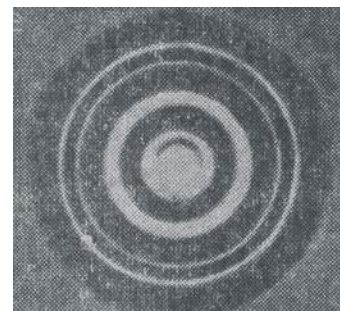


Рисунок 33.4

### Посмотрите видеоролик.

Доктор Квантум и загадка квантовой физики

<http://youtube.com/watch?v=zGa9dfCRYss>

## §34 Вероятностный смысл волн де Бройля. Волновая функция

Волны де Бройля, связанные с движущимися частицами вещества, не являются электромагнитными, то есть их распространение не связано с распространением какого-либо электромагнитного поля. Они имеют специфическую квантовую природу, не имеющую аналогии среди волн, изучающихся в классической физике.

Чтобы выяснить природу волн, надо выяснить физический смысл амплитуды этих волн. Вместо амплитуды  $A$  выберем интенсивность волны, пропорциональную квадрату модуля амплитуды  $|A|^2$ .

Из опытов по дифракции электронов следует, что пучки электронов, отражённых или рассеянных по разным направлениям, распределяются неодинаково: в некоторых направлениях наблюдается большее число электронов, чем во всех других. С волновой точки зрения наличие максимумов числа электронов в некоторых направлениях означает, что эти направления соответствуют наибольшей интенсивности волн де Бройля. Если интенсивность волны в данной точке пространства больше, то больше и вероятность попадания электронов в эту точку за 1 с. Это даёт основание говорить о статистическом, вероятностном смысле волн де Бройля.

***Квадрат модуля амплитуды волн де Бройля в данной точке является мерой вероятности того, что частица обнаруживается в этой точке.***

Чтобы описать распределение вероятности нахождения частицы в данный момент времени в некоторой точке пространства, введём функцию  $\psi(x, y, z, t)$ . Эту функцию называют **волновой** или **пси-функцией**. Интерпретация пси-функции была дана М. Борном в 1926 году. Определяется она так.

**Вероятность  $dw$  того, что частица находится в элементе объема  $dV$ , пропорциональна квадрату модуля волновой функции  $|\psi|^2$ .**

$$dw = |\psi|^2 dV = |\psi|^2 dx dy dz. \quad (34.1)$$

Физический смысл имеет не сама волновая функция  $\psi$ , а квадрат её модуля –  $|\psi|^2$ . Величина  $|\psi|^2$  имеет смысл **плотности вероятности**:

$$\rho_w = \frac{dw}{dV} = |\psi|^2, \quad (34.2)$$

т.е. определяет вероятность пребывания частицы в данной точке пространства.

Пребывание частицы где-либо в пространстве есть достоверное событие и его вероятность должна быть равна единице. Поэтому волновая функция должна удовлетворять **условию нормировки вероятностей**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dV = 1. \quad (34.3)$$

Волновая функция  $\psi$  является основной характеристикой состояния микрочастиц. С её помощью могут быть вычислены средние значения физических величин, характеризующих микрочастицу, находящуюся в состоянии, которое описывается волновой функцией  $\psi$ .

### §35 Соотношения неопределённости Гейзенберга

В классической механике в каждой точке траектории частица имеет определённые координаты  $x, y, z$  и определённый импульс  $\vec{p}$  с проекциями по осям  $p_x, p_y, p_z$ . Отличительной особенностью микрочастиц является наличие у них дуализма корпускулярных и волновых свойств. Волновые свойства микрочастиц вносят ограничения в возможность применять к таким частицам понятия координаты и импульса в их классическом смысле.

Из дифракционных опытов следует, что частицы **не имеют траектории**. Поэтому описывать их движение, задавая точное значение координаты и импульса в каждый момент времени, как это делается в классической механике, невозможно. Однако можно указать с некоторой степенью точности величину той области пространства, в которой частица с подавляюще большой вероятностью будет обнаружена, и интервал тех значений импульса, которым она при этом обладает.

Пусть  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  означают интервалы координат (неопределённость значений координаты), в которых может находиться частица, описываемая волной де Бройля,  $\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$  – интервалы (неопределённость значений проекции импульса), в которых заключены проекции её импульса по осям координат. Неопределённости значений координаты и проекции импульса связаны соотношением:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (35.1)$$

где  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  – постоянная Планка.

Аналогичные соотношения имеют место для  $y$  и  $p_y$ ,  $z$  и  $p_z$ :

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (35.2)$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (35.3)$$

Соотношения (35.1), (35.2), (35.3) установлены В. Гейзенбергом в 1927 году и называются **соотношениями неопределённости Гейзенберга**. Они являются математическим выражением одновременного наличия у микрочастиц волновых и корпускулярных свойств.

Пары величин, входящих в соотношения неопределённости Гейзенберга, называются канонически сопряженными. Утверждение о том, что **произведение неопределённости двух канонически сопряженных величин не может быть по порядку величины меньше постоянной Планка  $\hbar$** , называется принципом неопределённости Гейзенберга.

Из соотношения неопределённости вытекает следующее: **микрочастица не может иметь одновременно вполне определённые значения координаты  $x$  и импульса  $p_x$ . Это значит, что чем точнее для микрочастицы определена одна из величин – координата  $x$  или импульс  $p_x$ , – тем больше становится неточность в определении другой.**

Энергия и время также являются канонически сопряженными величинами. Для них справедливо соотношение неопределённости в виде:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (35.4)$$

Это соотношение означает, что **если частица некоторое время  $\Delta t$  находится в нестационарном состоянии, то энергия этого состояния может быть определена лишь с некоторой точностью до величины  $\Delta E$ .**

Соотношение неопределённости указывает, в какой мере можно пользоваться понятиями классической механики, в частности, с какой степенью точности можно говорить о траекториях частиц. Подставив в (35.1) вместо  $p_x$  произведение  $mv_x$ , получим соотношение

$$\Delta x \cdot \Delta v_x \geq \hbar/2m.$$

Из него следует, что чем больше масса частицы, тем меньше неопределённости её координаты и скорости и, следовательно, с тем большей точностью применимо понятие траектории.

Соотношение неопределённости является одним из фундаментальных положений квантовой механики. Оно позволяет объяснить тот факт, что электрон

не падает на ядро атома, а также оценить размеры простейшего атома и минимальную возможную энергию электрона в таком атоме.

### §36 Волновое уравнение Шрёдингера

Уравнение движения в квантовой механике должно быть таким, чтобы оно позволяло объяснить наблюдаемые на опыте волновые свойства частиц. Состояние частицы в пространстве в данный момент времени задаётся волновой функцией  $\psi(x, y, z, t)$ , точнее величиной  $|\psi|^2$  – плотностью вероятности нахождения частицы в точке с координатами  $x, y, z$  в момент времени  $t$ . Поэтому основное уравнение квантовой механики должно быть уравнением относительно функции  $\psi(x, y, z, t)$ . Это уравнение должно быть волновым, так как из него получают свое объяснение эксперименты по дифракции частиц.

Основное уравнение квантовой механики было получено в 1926 году Э. Шрёдингером. Шрёдингер установил свое уравнение, исходя из оптико-механической аналогии. Эта аналогия заключается в сходстве уравнений, описывающих ход световых лучей, с уравнениями, определяющими траектории частиц в аналитической механике. Волновое уравнение Шрёдингера можно назвать уравнением движения квантовой частицы. **Задать закон движения частицы в квантовой механике** – это значит определить значение  $\psi$ -функции в каждый момент времени и в каждой точке пространства.

Мы будем рассматривать уравнение Шрёдингера только для случая, когда пси-функция не зависит от времени, т.е.  $\psi = \psi(x, y, z)$ . Уравнение Шрёдингера при этом называют уравнением для стационарных состояний. Оно записывается в следующем виде:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0 \quad (36.1)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа;

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2};$$

$m$  – масса частицы;  $\hbar$  – постоянная Планка;  $E$  – полная энергия частицы;  $U$  – потенциальная энергия частицы.

Уравнение Шрёдингера позволяет найти пси-функцию данного состояния и, следовательно, определить вероятность нахождения частицы в разных точках пространства.

В соответствии со своим смыслом пси-функция должна быть однозначной, непрерывной и конечной. Кроме того, она должна иметь непрерывную и конечную производную. Перечисленные требования называются **стандартными условиями**. В теории дифференциальных уравнений доказывается, что уравнение вида (36.1) имеет решение, удовлетворяющее стандартным условиям, лишь при некоторых значениях параметра. В нашем случае этим парамет-

ром является полная энергия частицы  $E$ . Эти значения полной энергии называются **собственными значениями**. Решения, соответствующие собственным значениям  $E$ , называются **собственными функциями** задачи.

Совокупность собственных значений называется **спектром величины**. Если эта совокупность образует дискретную последовательность, то спектр называется **дискретным**. Если собственные значения образуют непрерывную последовательность, то спектр называют **непрерывным или сплошным**.

В случае дискретного спектра собственные значения энергии и собственные функции можно пронумеровать:

$$E_1, E_2, E_3, \dots, E_n \quad (36.2)$$

$$\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \dots, \Psi_n \quad (36.3)$$

О величинах, которые могут принимать только дискретные значения, говорят, что они **квантуются**. Таким образом, из основных положений квантовой механики вытекает квантование энергии.

Нахождение собственных значений и собственных функций является сложной математической задачей, поэтому дальше рассмотрим только некоторые частные случаи.

### §37 Частица в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме

**Потенциальной ямой** называется область пространства, в которой потенциальная энергия  $U$  частицы меньше некоторого значения  $U_{\max}$ . Если  $U_{\max} = \infty$ , и максимальная энергия зависит только от координаты  $x$ :  $U = U(x)$ , то получим бесконечно глубокую одномерную потенциальную яму.

Пусть движение частицы ограничено непроницаемыми стенками:  $x=0, x=l$  ( $l$  – ширина ямы). В этом случае потенциальная энергия частицы (рис. 37.1):

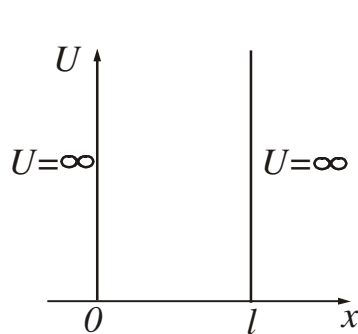


Рисунок 37.1

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & \text{если } x < 0 \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq l \\ \infty, & \text{если } x > l \end{cases}$$

Пси-функция будет зависеть только от координаты  $x$ , поэтому уравнение Шрёдингера примет вид:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0, \quad (37.1)$$

так как потенциальная энергия внутри ямы  $U=0$ . Введем обозначение:

$$\frac{2m}{\hbar^2} E = \omega^2. \quad (37.2)$$

Уравнение (37.1) при этом переписывается следующим образом:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \omega^2\psi = 0. \tag{37.3}$$

Из теории колебаний известно, что решение уравнения (37.3) имеет вид:

$$\psi(x) = A \sin(\omega x + \alpha). \tag{37.4}$$

Для нахождения параметров  $\omega$  и  $\alpha$  используют граничные условия. За пределы потенциальной ямы частица попасть не может, поэтому вероятность обнаружить частицу, а, следовательно, и функция  $\psi$  за пределами ямы равны нулю. Из условия непрерывности следует, что  $\psi$  должна быть равна нулю и на границах ямы, т.е.

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \tag{37.5}$$

Тогда можно записать:  $\psi(0) = A \sin \alpha = 0$ . Так как  $A \neq 0$ , то отсюда следует, что  $\alpha = 0$  ( $\sin 0 = 0$ ). Дальше запишем, что  $\psi(l) = A \sin \omega l = 0$ .

При этом

$$\omega l = \pm n\pi, \tag{37.6}$$

где  $n=1, 2, 3, \dots$  ( $n=0$  отпадает, так как при этом получается, что  $\psi \equiv 0$  Это означает, что частица нигде не находится).

Заменяя  $\omega$  в уравнении (37.4) по формуле (37.6), получим собственные значения волновой функции:

$$\psi_n(x) = A \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{37.7}$$

Используя условие нормировки, можно найти значение коэффициента  $A$ :

$$A = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Тогда

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{37.8}$$

Подставим (37.6) в уравнение (37.2) и найдем собственные значения энергии частицы:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2, \quad (n=1, 2, 3, ) \tag{37.9}$$

Спектр энергии оказался дискретным (рис. 37.2).

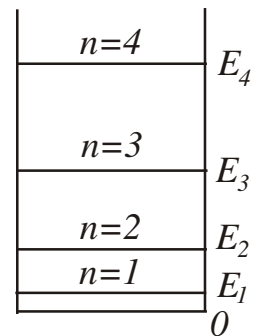


Рисунок 37.2

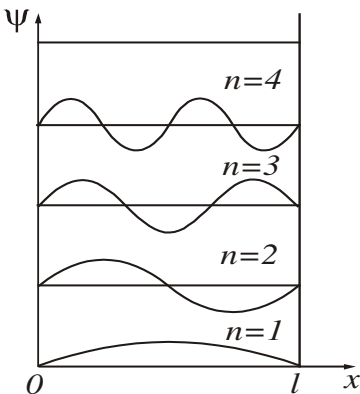


Рисунок 37.3

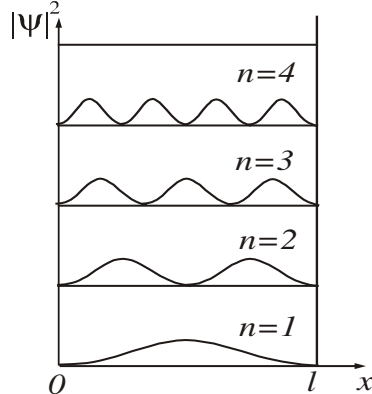


Рисунок 37.4

Графики собственных функций изображены на рис. 37.3. На рис. 37.4 показана плотность вероятности обнаружения частицы в различных точках ямы, равная  $|\psi|^2$ . Из графиков следует, что в состоянии, например, с  $n=2$  частица не может быть обнаружена в середине ямы и вместе с тем одинаково часто бывает как в левой, так и правой половине ямы. Такое поведение частицы несовместимо с представлением о траекториях, так согласно классическим представлениям все положения частицы в яме равновероятны.

Модель частицы, находящейся в бесконечно глубокой потенциальной яме, применяют для объяснения электропроводности металлов и полупроводников.

## Физика атомов и молекул

### §38 Атом водорода и водородоподобные ионы

**Атомом** называется наименьшая частица вещества, обладающая всеми свойствами данного химического элемента. В состав атома входят положительно заряженное ядро и электроны, движущиеся в электрическом поле ядра. Заряд ядра по абсолютной величине равен суммарному заряду всех электронов атома. **Ионом** называется электрически заряженная частица, которая образуется при приобретении или потере электронов атомом или молекулой.

Простейшим атомом является атом водорода, состоящий из одного протона в ядре и одного электрона, движущегося в кулоновском электрическом поле ядра. **Водородоподобными** ионами являются ионы, имеющие ядро с зарядом  $Ze$  и один электрон. Например, ионы однократно ионизованного гелия –  $\text{He}^+$ , двукратно ионизованного лития –  $\text{Li}^{++}$ , трёхкратно ионизованного бериллия –  $\text{Be}^{+++}$  и т.д.

Единственный электрон водорода и водородоподобных ионов движется в кулоновском поле ядра и обладает потенциальной энергией

$$U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r}. \quad (38.1)$$

где  $Z$  – порядковый номер элемента;  
 $r$  – расстояние между ядром и электроном.

Уравнение Шредингера в этом случае примет вид:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = 0, \quad (38.2)$$

где  $E$  – полная энергия электрона в атоме.

Мы не будем решать уравнение Шрёдингера, а только рассмотрим конечные результаты решения уравнения (38.2).



### 38.1 Квантовые числа

Волновая функция  $\psi$  зависит не только от пространственных координат, но и от целочисленных параметров  $n, l, m$ . Эти параметры называются **квантовыми числами**. Охарактеризуем каждое из них:

1.  $n$  – главное квантовое число. Принимает значения  $1, 2, 3, \dots, n$ . Соответствует номеру энергетического уровня.
2.  $l$  – орбитальное квантовое число. Принимает значения  $0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$ , то есть имеет  $n$  значений.
3.  $m$  – магнитное квантовое число. Принимает значения  $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ , то есть имеет  $(2l+1)$  значений.

Конкретный набор квантовых чисел определяет конкретный вид волновой функции и, следовательно, форму и размеры электронного облака. Значениями квантовых чисел определяются также основные динамические характеристики: энергия электрона в атоме, момент импульса, магнитный момент, проекции момента импульса и магнитного момента на направление внешнего магнитного поля.

### 38.2 Квантование энергии

Уравнение (38.2) имеет однозначные и непрерывные решения для электрона, связанного с ядром, при дискретных отрицательных значениях энергии. Эти значения энергии определяются соотношением:

$$E_n = -\frac{Rch}{n^2} Z^2, \quad (38.3)$$

где  $n$  – главное квантовое число,  $n = 1, 2, 3, \dots$   
 $R = 1,09 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$  – постоянная Ридберга;  
 $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$  – скорость света;  
 $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$  – постоянная Планка.

Если подставить значения постоянных в уравнение (38.3) и выразить энергию в электрон-вольтах, то оно примет следующий вид:

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} Z^2. \quad (38.4)$$

Набор дискретных значений энергии  $E_n$  образует энергетический спектр атома. Состояние с  $n=1$  называется **основным**, состояния с  $n>1$  называются **возбуждёнными**. В основном состоянии электрон может находиться сколь угодно долго. Важнейшим отличием возбуждённых состояний является конечное время  $\tau$  жизни электрона в этих состояниях:  $\tau \approx 10^{-8} \text{ с}$ . В основном состоянии атом обладает минимальной энергией. Чтобы перевести атом из основного состояния

в возбуждённое (т.е. в состояние с большей энергией), ему необходимо сообщить энергию. Энергию можно сообщить одним из следующих способов:

- за счёт теплового соударения (поэтому нагретые тела светятся – атомы излучают, возвращаясь из возбуждённого состояния в основное состояние);
- за счёт столкновения атома с достаточно быстрым электроном;
- за счёт поглощения атомом фотона.

Фотон при поглощении его атомом исчезает, передавая атому всю свою энергию. Атом не может поглотить часть фотона, так как фотон является неделимым. Поглощаются только те фотоны, энергия которых соответствует разности энергий двух уровней.

Энергия возбуждения

$$E_{\text{в}} = E_n - E_1, \quad (38.5)$$

где  $E_1$  – энергия электрона в основном состоянии;  
 $E_n$  – энергия электрона в возбуждённом состоянии.

Величина

$$\varphi_{\text{в}} = \frac{E_{\text{в}}}{e} \quad (38.6)$$

называется **потенциалом возбуждения** ( $e$  – заряд электрона).

Энергия электрона в атоме – величина отрицательная, поэтому наибольшее значение энергии, которое может иметь электрон  $E_{\text{max}}=0$ . При этом  $n$  стремится к бесконечности ( $n \rightarrow \infty$ ). Это соответствует ионизации атома, т.е. отрыву от него электрона. **Потенциал ионизации**

$$\varphi_i = \frac{E_i}{e}, \quad (38.7)$$

где  $E_i = -E_1$  – энергия ионизации атома.

Среди оптических свойств атома важнейшим является его спектр излучения. Так как любая спектральная линия возникает при переходе с одного энергетического уровня на другой, то оптический спектр атома водорода и водородоподобных ионов является линейчатым. Длины волн спектральных линий описываются обобщенной формулой Бальмера:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right) Z^2, \quad (38.8)$$

где  $n_i$  – номер энергетического уровня, на который переходит электрон;  
 $n_k$  – номер энергетического уровня, с которого переходит электрон.

Спектральные линии принято группировать в спектральные серии. В каждую серию входят все линии с фиксированным  $n_i$ , т.е. относящиеся к переходу электрона (при излучении) на один и тот же нижний уровень с различных верхних. На рис. 38.1 показана схема уровней энергии атома водорода и его спектральные серии.

Серию с  $n_i = 1$  ( $n_k = 2, 3, 4, \dots$ ) называют *серией Лаймана*. Линии находятся в области ультрафиолетового излучения.

Серия с  $n_i = 2$  ( $n_k = 3, 4, 5, \dots$ ) носит название *серии Бальмера*. Четыре первые линии этой серии лежат в видимой части спектра и обозначаются через  $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, H_\delta$ . Остальные линии серии Бальмера находятся в области ультрафиолетового излучения.

Серии с  $n_i = 3$  ( $n_k = 4, 5, 6, \dots$ ) – *серия Пашена*,  
 $n_i = 4$  ( $n_k = 5, 6, 7, \dots$ ) – *серия Брэкета*,  
 $n_i = 5$  ( $n_k = 6, 7, 8, \dots$ ) – *серия Пфунда*.

находятся в инфракрасной части спектра.

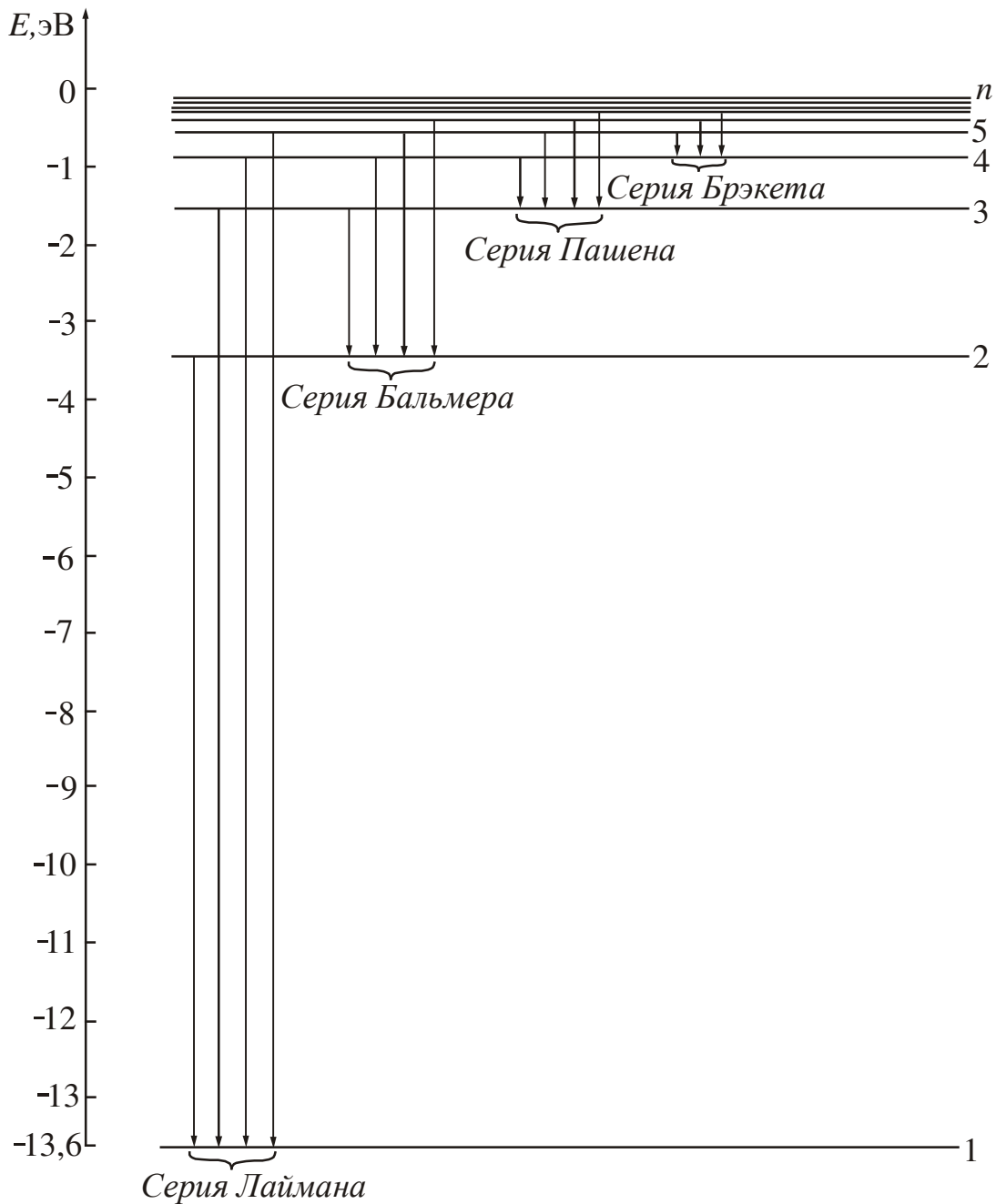


Рисунок 38.1

### 38.3 Квантование орбитального момента импульса и магнитного момента

Момент импульса электрона в атоме квантуется по формуле:

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)}, \quad (38.9)$$

где  $l$  – орбитальное квантовое число. При заданном главном квантовом числе  $n$ , орбитальное квантовое число принимает значения  $0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$ . Состояния электрона, обладающего различными значениями орбитального квантового числа, в атомной физике принято обозначать и называть следующим образом: если  $l=0$ , то состояние электрона называется  $s$ -состоянием; если  $l=1$ , то состояние электрона называется  $p$ -состоянием. Состояния с  $l=2, 3$ , и т.д. называются соответственно  $d$ -,  $f$ - и т.д. состояниями, т.е. уже в порядке следования букв латинского алфавита. Значение главного квантового числа указывается перед условным обозначением квантового числа  $l$ . Например, электрон с  $n=2$  и  $l=0$  обозначается символом  $2s$ .

Хотя в квантовой механике представление об орбитах, как и представление о траекториях является неправомерным, момент, обусловленный движением электрона в атоме, называют орбитальным моментом импульса. Движение электрона в атоме эквивалентно некоторому замкнутому контуру с током (**орбитальному току**). Следовательно, кроме орбитального момента импульса электрон обладает орбитальным магнитным моментом.

Отношение орбитального магнитного момента элементарной частицы к её орбитальному моменту импульса называется **магнитомеханическим** (или **гиромагнитным**) отношением. Для электрона оно равно

$$\frac{p_m}{L} = -\frac{e}{2m}, \quad (38.10)$$

где  $e$  – заряд электрона,  $m$  – его масса. Знак « $-$ » указывает на то, что направления моментов противоположны. Из соотношений (38.9) и (38.10) следует, что орбитальный магнитный момент  $\vec{p}_m$  также квантуется:

$$p_m = \mu_B \sqrt{l(l+1)}, \quad (38.11)$$

$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$  – величина, называемая магнетоном Бора.

Для электрона  $\mu_B = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$ .

### 38.4 Пространственное квантование

В классической механике считалось, что векторы орбитального момента импульса  $\vec{L}$  и магнитного момента  $\vec{p}_m$  могут быть ориентированы во внешнем магнитном поле совершенно произвольно. В квантовой механике доказывается, что существует пространственное квантование:

**Вектор момента импульса электрона имеет лишь такие ориентации в пространстве, при которых проекция  $L_z$  вектора  $\vec{L}$  на направление  $Z$  внешнего магнитного поля принимает квантованные, целочисленные значения, кратные  $\hbar$ .**

$$L_z = m\hbar, \tag{38.12}$$

где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l$  – магнитное квантовое число. Магнитное квантовое число может иметь  $(2l+1)$  значений. Следовательно, момент импульса  $\vec{L}$  может иметь в пространстве  $(2l+1)$  ориентаций.

Аналогично справедливо следующее утверждение:

**Вектор магнитного момента электрона имеет лишь такие ориентации в пространстве, при которых проекция  $p_{m_z}$  вектора  $\vec{p}_m$  на направление  $Z$  внешнего магнитного поля принимает квантованные, целочисленные значения, кратные  $\mu_B$ .**

$$p_{m_z} = m\mu_B. \tag{38.13}$$

Пример: электрон находится в  $p$ -состоянии, при этом  $l=1, m = 0, \pm 1$ .

Проекция орбитального момента импульса может иметь следующие значения:  $L_z = +\hbar, L_z = 0, L_z = -\hbar$ .

Изобразим вектор момента импульса  $\vec{L}$  в виде направленных отрезков (рис. 38.2). Такая схема называется **векторной моделью атома**.

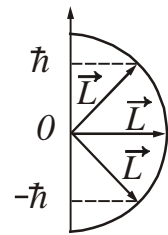


Рисунок 38.2

Аналогично изображают магнитный момент  $\vec{p}_m$ . Векторную модель нельзя понимать буквально. Её следует рассматривать как совокупность правил, позволяющих получить результаты, справедливость которых подтверждается строгими квантовомеханическими расчётами.

Экспериментальное определение магнитных моментов атомов было осуществлено Штерном и Герлахом. В их опытах пучок атомов пропусклся через сильное неоднородное магнитное поле, перпендикулярное пучку. Неоднородность поля достигалась за счёт специальной формы полюсных сердечников электромагнита (рис. 38.3). На атомы пучка должна действовать сила

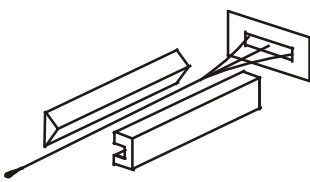


Рисунок 38.3

$$F_z = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha.$$

При хаотическом распределении магнитных моментов по направлениям в пучке имеются частицы, у которых значения угла  $\alpha$  изменяются в пределах от 0 до  $\pi$ . Узкий пучок атомов после прохождения между полюсами должен образовать на экране сплошной растянутый след (см. рис. 38.4). Опыты, проведённые с серебром и другими элементами, привели к иному результату. Вместо сплошного растянутого следа на экране наблюдались отдельные линии, расположенные симметрично относительно пучка, полученного в отсутствие поля. Число возможных проекций зависело от природы атома. Для серебра, алюминия, меди

и щелочных металлов оно равно двум, для ванадия, азота – четырем, кислорода – пяти, марганца – шести и т.д. Опыты Штерна и Герлаха не только подтвердили пространственное квантование моментов импульсов в магнитном поле, но и дали экспериментальное подтверждение выводу о том, что магнитные моменты электронов и атомов имеют дискретную природу.

Момент импульса атома (и его магнитный момент) равен сумме моментов электронов. Моменты электронов замкнутых оболочек компенсируются, поэтому суммарный момент электронов совпадает с суммарным моментом валентных электронов.

У элементов первой группы периодической системы имеется один валентный электрон. Этот валентный электрон в основном состоянии имеет орбитальное квантовое число, равное нулю, т.е. электрон находится в *s*-состоянии. Из формулы (38.9) следует, что при  $l=0$  момент импульса электрона  $L$  равен нулю. Поэтому возник вопрос о том, пространственное квантование *какого* момента импульса обнаружилось в опытах Штерна и Герлаха? Для объяснения полученного результата нужно было предположить, что у электрона кроме орбитального момента импульса и соответствующего ему магнитного момента имеется собственный механический момент импульса и собственный магнитный момент.

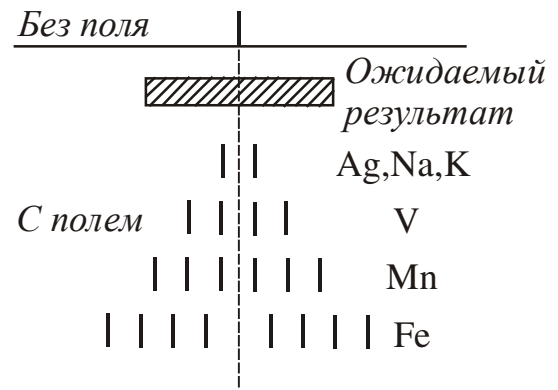


Рисунок 38.4

### 38.5 Спин электрона

В 1925 году С. Гаудсмит и Дж. Уленбек на основе анализа спектроскопических данных выдвинули гипотезу о том, что электрон обладает **собственным моментом импульса**  $\vec{L}_s$  и соответствующим ему **собственным магнитным моментом**  $\vec{p}_{m_s}$ . Этот собственный момент импульса был назван **спином**. Слово «спин» (англ. *spin*) означает верчение.

**Спин следует считать внутренним свойством, присущим электрону так же, как заряд и масса.** Предположение о спине электрона подтверждено большим количеством опытных фактов и считается совершенно доказанным.

Из общих выводов квантовой механики следует, что спин (т.е. собственный момент импульса или спиновый момент) квантуется по формуле:

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)}, \quad (38.14)$$

где  $s$  – спиновое квантовое число, которое для электрона может принимать только одно значение, равное  $1/2$ .

Проекция спина на заданное направление также квантуется:

$$L_{s_z} = m_s \hbar, \quad (38.15)$$

где для электрона  $m_s = \pm s = \pm 1/2$ .

Число  $m_s$  по аналогии с  $m$  можно было бы назвать магнитным спиновым числом. Но такое название редко применяется. Гораздо чаще, говоря о спиновом квантовом числе понимают под ним число  $m_s$ , то есть приписывают спиновому квантовому числу значения  $\pm 1/2$ . Следует, однако, помнить, что число  $s$  имеет только одно значение:  $s=1/2$ .

Для собственного магнитного момента электрона  $\vec{p}_{m_s}$  выполняются такие соотношения:

$$p_{m_s} = -2\mu_B \sqrt{s(s+1)}. \quad (38.16)$$

Знак « $-$ » указывает на то, что механический  $\vec{L}_s$  и магнитный  $\vec{p}_{m_s}$  моменты электрона направлены в разные стороны.

Проекция собственного магнитного момента электрона на заданное направление может принимать следующие значения:

$$p_{m_{sz}} = \mp 2\mu_B m_s = \mp \mu_B. \quad (38.17)$$

Минус получается, если  $m_s = +1/2$ , плюс – если  $m_s = -1/2$ .

Таким образом, проекция собственного момента импульса электрона может принимать значения  $+\hbar/2$  и  $-\hbar/2$ , а собственного магнитного момента – значения  $+\mu_B$  и  $-\mu_B$ . В ряд формул, в частности в выражение для энергии, входят не сами моменты, а их проекции. Поэтому принято говорить, что собственный механический момент (спин) равен  $1/2$  (в единицах  $\hbar$ ), а собственный магнитный момент равен магнетону Бора  $\mu_B$ .

### §39 Принцип Паули. Периодическая система элементов Менделеева

В 1925 году В. Паули установил квантово-механический закон, называемый принципом Паули или принципом запрета Паули. В своей простейшей формулировке он звучит так:

*В одном и том же атоме (или в какой-либо другой квантовой системе) не может быть двух электронов, обладающих одинаковым набором четырёх квантовых чисел:  $n, l, m, m_s$ . Иными словами, в одном и том же состоянии не могут находиться одновременно два электрона.*

Максимальное число электронов, находящихся в состояниях, описываемых набором трёх квантовых чисел  $n, l, m$  и отличающихся только ориентацией спинов электронов

$$N(n, l, m) = 2,$$

так как магнитное спиновое квантовое число может принимать только два значения  $+1/2$  и  $-1/2$ .

Максимальное число электронов, находящихся в состояниях, определяемых двумя квантовыми числами  $n$  и  $l$ :

$$N(n, l) = 2(2l+1).$$

При этом учтено, что вектор  $\vec{L}$  при заданном  $l$  может принимать  $(2l+1)$  ориентаций.

Максимальное число электронов, находящихся в состояниях, определяемых значением главного квантового числа  $n$ :

$$N(n) = 2n^2.$$

В 1869 году Д.И. Менделеев открыл периодический закон изменения химических и физических свойств элементов в зависимости от их атомных масс. Если расположить химические элементы в порядке возрастания их атомных масс, то периодически, через промежутки, называемые периодами, элементы, оказавшиеся в одном вертикальном ряду (группе), обнаруживают сходные физико-химические свойства. Менделеев ввел понятие **порядкового номера** элемента. Расположив химические элементы в порядке возрастания их номера, он получил полную периодичность в изменении химических свойств элементов. При этом часть клеток периодической системы оказалась свободной, так как соответствующие элементы ещё не были известны. Таким образом, Менделееву удалось предсказать ряд новых элементов (галлий, скандий, германий и т.д.). В дальнейшем все эти элементы были открыты. Физический смысл порядкового номера был установлен Резерфордом.

Современная теория периодической системы основывается на следующих положениях:

а) порядковый номер  $Z$  химического элемента равен общему числу электронов в атоме данного элемента;

б) состояние электронов в атоме определяется набором четырех квантовых чисел:  $n, l, m, m_s$ . Распределение электронов в атомах по энергетическим состояниям должно удовлетворять принципу минимума потенциальной энергии: с возрастанием числа электронов каждый следующий должен занять возможное энергетическое состояние с наименьшей энергией;

в) заполнение электронами энергетических состояний происходит в соответствии с принципом Паули.

Совокупность электронов в атоме с одинаковым значением главного квантового числа  $n$  называется **электронным слоем (электронной оболочкой)**. Различают следующие электронные слои:

$K$ -слой, главное квантовое число  $n=1$ ;

$L$ -слой, главное квантовое число  $n=2$ ;

$M$ -слой, главное квантовое число  $n=3$ ;

$N$ -слой, главное квантовое число  $n=4$  и т.д.

Внутри слоя электроны распределяются по **подуровням (подоболочкам)**, каждая из которых соответствует определённому значению орбитального квантового числа  $l$ .

У лёгких атомов сначала заполняется оболочка с меньшим  $n$ , и лишь затем должна заполняться электронами следующая оболочка. Внутри данной оболочки вначале заполняются состояния с  $l=0$ , а затем состояния с большими  $l$ , вплоть до  $l=(n-1)$ .



Начиная с калия ( $Z=19$ ), начинаются нарушения этого порядка. Объясняется это следующим образом. При больших квантовых числах  $n$  взаимодействие между электронами в атоме приводит к тому, что состояния с большим  $n$  и меньшим  $l$  могут иметь меньшую энергию, чем состояния с меньшим  $n$ , но с большим  $l$ , т.е. быть энергетически более выгодными. Поэтому имеются химические элементы с недостроенными предыдущими оболочками, у которых застраиваются последующие.

Таблица 39.1 Квантовые числа, характеризующие состояние электрона в атоме

Квантовое число и его значение	Величина, которая квантуется	Формула	Примечание
1. Главное квантовое число $n=1, 2, 3, \dots$ Соответствует номеру энергетического уровня	Энергия	$E_n = -\frac{Rch}{n^2} Z^2 \text{ (Дж)}$ или $E_n = -\frac{13,6}{n^2} Z^2 \text{ (Эв)}$	$R = 1,09 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ – постоянная Ридберга; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ – скорость света; $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$ – постоянная Планка.
2. Орбитальное квантовое число $l=0, 1, 2, \dots, (n-1)$	1. Орбитальный момент импульса 2. Орбитальный магнитный момент	1. $L = \hbar \sqrt{l(l+1)}$ 2. $p_m = \mu_B \sqrt{l(l+1)}$	$\mu_B = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ А}\cdot\text{м}^2$ – магнетон Бора
3. Магнитное квантовое число $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$	1. Проекция орбитального момента импульса на направление внешнего магнитного поля 2. Проекция магнитного момента на направление внешнего магнитного поля	1. $L_z = m \hbar$ 2. $p_{m_z} = m \mu_B$	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ – постоянная Планка
4. Спиновое квантовое число $s=1/2$	1. Собственный момент импульса (спин) 2. Собственный магнитный момент	1. $L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)}$ 2. $p_{m_s} = -2\mu_B \sqrt{s(s+1)}$	Число $s$ имеет только одно значение: $s=1/2$ , поэтому состояние электрона в атоме определяется
5. Магнитное спиновое число $m_s = \pm 1/2$	1. Проекция собственного момента импульса 2. Проекция собственного магнитного момента	1. $L_{s_z} = m_s \hbar$ 2. $p_{m_{s_z}} = \mp 2\mu_B m_s = \mp \mu_B$	набором четырех квантовых чисел: $n, l, m, m_s$ . Число $m_s$ чаще называют просто спиновым числом

## ЧАСТЬ 4. ОСНОВЫ ФИЗИКИ ТВЁРДОГО ТЕЛА

*Физика твёрдого тела* занимается изучением физических свойств и структуры кристаллических твёрдых тел и поведением электронов в этих телах.

### §41 Строение твёрдых тел

Твёрдыми называются тела, которые обладают постоянством формы и объема. Различают кристаллические и аморфные тела.

Характерной чертой, отличающей кристаллическое состояние от жидкого и газообразного, является наличие у кристаллов анизотропии. *Анизотропия* – это зависимость ряда физических свойств (механических, тепловых, электрических, оптических) от направления.

Причиной анизотропии кристаллов служит упорядоченное расположение частиц (атомов, молекул), из которых они построены. Упорядоченное расположение частиц проявляется в правильной внешней огранке кристаллов. Кристаллы ограничены плоскими гранями, пересекающимися под некоторыми, определёнными для данного рода кристаллов, углами. Раскалывание кристаллов легче происходит по определённым плоскостям, которые называются *плоскостями спайности*.

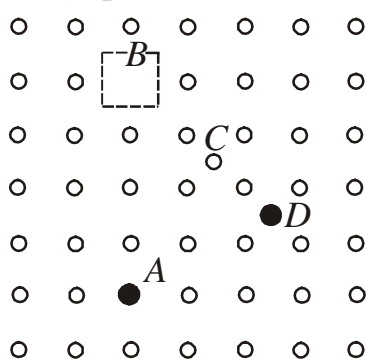
Правильность геометрической формы и анизотропия кристаллов обычно не проявляются по той причине, что кристаллические тела встречаются, как правило, в виде *поликристаллов*, то есть в виде множества сросшихся между собой, беспорядочно ориентированных мелких кристаллов. В поликристаллах анизотропия наблюдается только в пределах каждого отдельно взятого кристаллика. Аморфные тела (стекло, вар и др.) представляют собой переохлаждённые жидкости и не обладают четко выраженными свойствами кристаллов, т.е. являются изотропными.

#### 41.1 Дефекты в кристаллах

Неограниченный кристалл, построенный из ядер и электронов, находящихся при температуре абсолютного нуля в возможном наименьшем энергетическом состоянии, является абсолютно упорядоченным, математически идеальным. Всякое отклонение от этого однозначно заданного идеального состояния называют *дефектом*. Дефекты можно условно поделить на макродефекты и микродефекты. Макроскопическим нарушением структуры решётки являются границы кристалла, трещины, поры, инородные включения, царапины и т. д. Микродефектами являются инородные атомы, отдельные атомы, занимающие нерегулярные положения в решётке: домены (области спонтанной электризации или намагничивания), а также всевозможные элементарные возбуждения в кристалле. Микродефекты делят на точечные и линейные.

*Точечный дефект* – это нарушение кристаллической структуры, размеры которого во всех трёх измерениях сравнимы с одним или несколькими (немногими) межуатомными расстояниями. Простейшие точечные дефекты кристал-

ла (см. рис. 41.1): **вакансии** – отсутствие атома или иона в узле решётки (пустой квадрат, обозначенный буквой  $B$ ); **внедрённые атомы** – атомы (свои или чужие), располагающиеся на незаконном месте между узлами решётки ( $C$  и  $D$ );



**атомы замещения** – атомы ( $A$ ), замещающие частицы основного вещества в узлах решётки (атомы примеси).

Атомы примеси присутствуют в кристалле всегда. Проблема синтеза кристаллов с заданными свойствами зависит в основном от чистоты исходных материалов и от создания таких условий выращивания кристалла, при которых невозможно его загрязнение примесями из окружающей среды. В то же время, вводя примеси, можно по желанию изменять свойства кристалла. Введение нужной примеси в этом случае строго контролируется.

Рисунок 41.1

**Линейный дефект** это нарушение правильности структуры вдоль линии (не обязательно прямой). Поперечные размеры линейного дефекта не превышают одного или нескольких межуатомных расстояний, а длина может достигать размеров кристалла. Устойчивыми, стабильными в кристалле являются **дислокации**. Дислокации нарушают правильное чередование кристаллических плоскостей.

Реальный кристалл обладает всеми перечисленными дефектами и его свойства в связи с этим должны существенно отличаться от свойств идеализированных кристаллов. Дефекты структуры оказывают сильное влияние (как положительное, так и отрицательное) на многие свойства твёрдых тел. К ним относятся прочность, электропроводность, оптические свойства и т. д. Эти свойства получили название структурно чувствительных. Другая группа свойств – плотность, модули упругости, удельная теплоёмкость, диэлектрическая проницаемость и др. – слабо зависит от несовершенства структуры. Их называют структурно нечувствительными (независимыми) свойствами.

## 41.2 Энергетические зоны в кристаллах

Рассмотрим воображаемый процесс объединения атомов в кристалл. Пусть первоначально имеется  $N$  изолированных атомов какого-либо вещества. Пока атомы изолированы друг от друга, они имеют полностью совпадающие схемы энергетических уровней (рис. 41.2, правая часть). Заполнение уровней электронами осуществляется в каждом атоме независимо от заполнения аналогичных уровней в других атомах. По мере сближения атомов между ними возникает все усиливающееся взаимодействие, которое приводит к изменению положения уровней. Вместо одного одинакового для всех  $N$  атомов уровня возникает  $N$  очень близко расположенных энергетических уровней, образующих зону.

**Энергетическая зона** – это область допустимых значений энергии электронов в кристалле, состоящая из большого, но конечного числа очень близко расположенных уровней энергии.

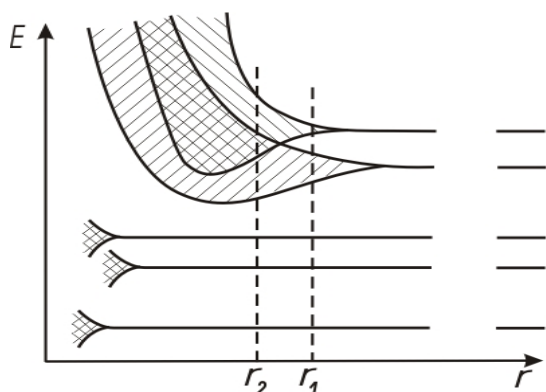


Рисунок 41.2

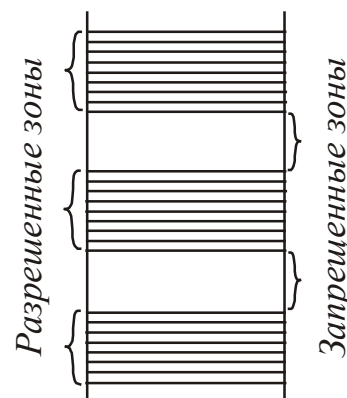


Рисунок 41.3

Соседние энергетические уровни в зоне отстоят друг от друга приблизительно на  $10^{-22}$  эВ. Величина расщепления для разных уровней не одинакова. На рис. 41.2 (левая часть) показано расщепление уровней в зависимости от расстояния  $r$  между атомами. Расщепление уровней, занятых внутренними электронами, очень мало. Заметно расщепляются лишь уровни, занимаемые валентными электронами. Такому же расщеплению подвергаются и более высокие уровни, не занятые электронами в основном состоянии атома.

Если равновесие между соседними атомами наступает при расстоянии  $r_1$  (см. рис. 41.2), то между разрешёнными зонами образуются запрещённые зоны (рис. 41.3).

**Запрещённая зона** – это интервал значений энергии, которые электроны в кристалле принимать не могут.

Если равновесие между соседними атомами наступает при расстоянии  $r_2$  (см. рис. 41.2), то соседние уровни перекрываются. Число уровней в такой слившейся зоне равно сумме уровней, на которые расщепляются уровни отдельных атомов.

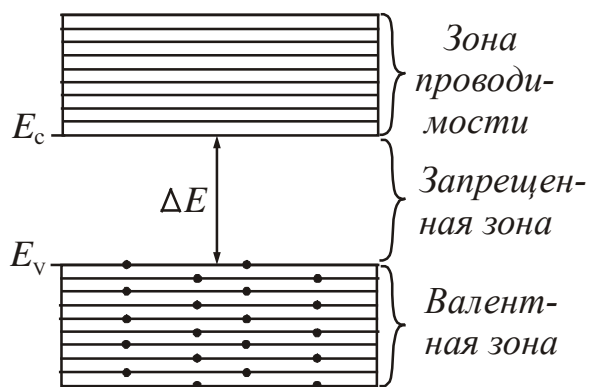


Рисунок 41.4

Электрические свойства твёрдых тел объясняются различным заполнением двух верхних разрешённых зон и шириной запрещённой зоны. Энергетическая зона, заполненная валентными электронами, называется **валентной** (рис. 41.4). Ближайшая к ней энергетическая зона, не заполненная электронами, называется **зоной проводимости**. Между валентной зоной и зоной проводимости находится запрещённая зона.  $\Delta E$  – ширина запрещённой зоны:  $\Delta E = E_c - E_v$ ;

где  $E_c$  – дно зоны проводимости,  $E_v$  – потолок валентной зоны.

Электронны в твёрдых телах могут переходить из одной разрешённой зоны в другую. Для перехода электрона из валентной зоны в зону проводимости необходимо затратить энергию, равную ширине запрещённой зоны, расположенной между ними (энергию порядка нескольких эВ). Для внутризонных переходов достаточно сообщить энергию порядка  $10^{-22}$  эВ.

В зависимости от степени заполнения валентной зоны электронами и ширины запрещённой зоны твёрдые тела делятся на проводники, полупроводники и диэлектрики (изоляторы).

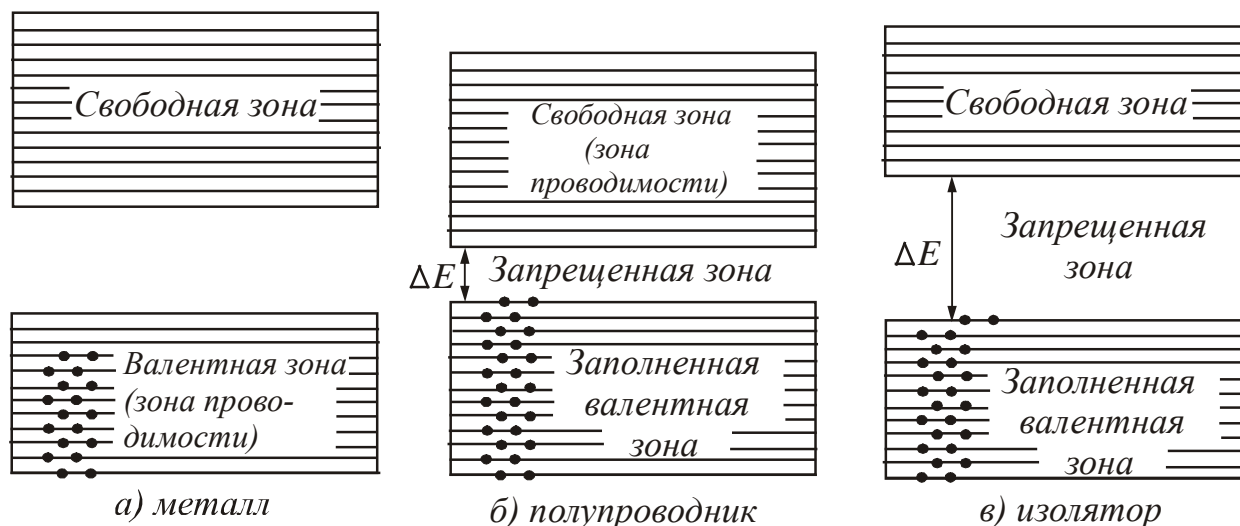


Рисунок 41.5

На рисунке 41.5 а электроны заполняют валентную зону не полностью. Поэтому достаточно сообщить электронам, находящимся на верхних уровнях, совсем небольшую энергию ( $\sim 10^{-22}$  эВ) для того, чтобы перевести их на более высокие уровни. Энергия теплового движения составляет при 1 К величину порядка  $10^{-4}$  эВ, а при комнатных температурах – 0,026 эВ. Следовательно, при температурах, отличных от абсолютного нуля, часть электронов переводится на более высокие уровни. Дополнительная энергия, вызванная действием на электрон электрического поля, также оказывается достаточной для перевода электрона на более высокие уровни. Таким образом, кристалл с подобной схемой энергетических уровней будет представлять собой проводник (металл).

На рисунках 41.5 б и 41.5 в уровни валентной зоны при  $T=0$  К полностью заняты электронами – зона заполнена. Для того, чтобы увеличить энергию электрона, необходимо сообщить ему количество энергии не меньшее, чем ширина  $\Delta E$  запрещённой зоны. Электрическое поле сообщить электрону такую энергию не в состоянии. При этих условиях, электрические свойства кристалла определяются шириной  $\Delta E$  запрещённой зоны. Если она невелика ( $\Delta E < 3$  эВ), то энергия теплового движения атомов решётки оказывается достаточной для того, чтобы перевести часть электронов в свободную верхнюю зону. Эти электроны будут находиться в условиях, аналогичных тем, в которых находятся валентные электроны в металле. Свободная зона окажется для них зоной проводимости. В оставленном электроном месте возникает избыток положительного заряда – «дырка». *Дырка* – это квазичастица, которой приписывают единичный

положительный заряд. Она возникает при нарушении ковалентных связей в атоме кристалла полупроводника, когда какой-либо валентный электрон одного из атомов покидает свое место. Вещество с таким типом проводимости является полупроводником.

Если ширина запрещённой зоны велика ( $\Delta E > 3$  эВ), тепловое движение не сможет забросить в свободную зону заметное число электронов. В этом случае кристалл оказывается диэлектриком (изолятором).

## §42 Электрические свойства твёрдых тел

Все твёрдые тела по их способности пропускать электрический ток делят на проводники, полупроводники и диэлектрики. Типичными проводниками являются металлы, типичными диэлектриками – ионные кристаллы. Полупроводники – это широкий класс веществ с ковалентным типом связи.

Способность вещества проводить электрический ток характеризуется удельной проводимостью  $\sigma$  или удельным сопротивлением  $\rho$ . Удельное сопротивление связано с удельной проводимостью соотношением:

$$\rho = \frac{1}{\sigma}. \quad (42.1)$$

Приблизительные интервалы значений  $\rho$ , которые имеют металлы, полупроводники и диэлектрики, представлены на рис. 42.1 и в таблице 42.1.

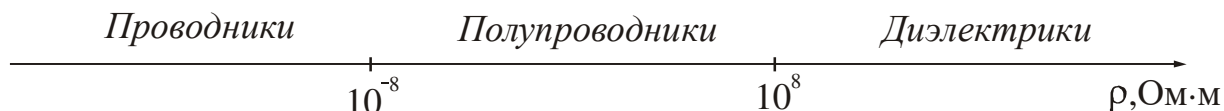


Рисунок 42.1

Таблица 42.1. Удельное сопротивление электротехнических материалов различных классов при 20°C и постоянном напряжении

Класс материала	$\rho$ , Ом·м	Знак $\alpha_\rho$ , в широком интервале температур	Тип проводимости
Проводники	$10^{-8} \div 10^{-5}$	положительный	Электронная
Полупроводники	$10^{-6} \div 10^{+8}$	отрицательный	Электронно-дырочная
Диэлектрики	$10^{+8} \div 10^{16}$	отрицательный	Ионная и электронная

Электрические свойства описывают графиком зависимости силы тока от приложенного напряжения. Его называют вольт-амперной характеристикой (ВАХ). У металлов зависимость силы тока от приложенного напряжения представляет собой прямую линию (рис. 42.2).

Более детально ток характеризуют с помощью вектора плотности тока  $\vec{j}$ . Значение плотности тока зависит от величины напряженности  $E$  электрического поля в данной точке. Зависимость  $j = f(E)$  также называется вольтамперной характеристикой.

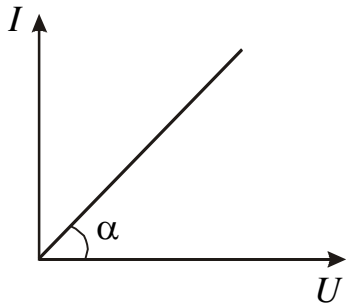


Рисунок 42.2

У металлов зависимость плотности тока от напряженности электрического поля также представляет собой прямую линию, так как выполняется условие

$$j = \sigma E. \tag{42.2}$$

Это закон Ома, записанный в дифференциальной форме.

Вольтамперная характеристика полупроводниковых и вакуумных диодов, а также других устройств может иметь более сложный вид (см. табл. 42.2).

Таблица 42.2 Примеры вольтамперных характеристик

Полупроводниковый диод		
Вакуумный диод		
Газоразрядная трубка		



## 42.1 Электропроводность металлов

В случае идеальной кристаллической решётки электроны проводимости не испытывали бы при своём движении никакого сопротивления и электропроводность металлов была бы бесконечно большой. Однако кристаллическая решётка никогда не бывает совершенной. Нарушения строгой периодичности решётки бывают обусловлены наличием примесей или вакансий, дислокаций, а также тепловыми колебаниями решётки. Рассеяние электронов проводимости на тепловых колебаниях кристаллической решётки и атомах примеси приводит к возникновению электрического сопротивления металлов. Чем чище металл и чем ниже температура, тем меньше это сопротивление.

Для большинства металлов при температурах, близких к комнатной, удельное сопротивление линейно меняется с температурой:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad (42.3)$$

где  $\rho_0$  – удельное сопротивление при  $0^\circ\text{C}$ ,  $t$  – температура в  $^\circ\text{C}$ ,  $\alpha$  – температурный коэффициент сопротивления. Для чистых металлов в твёрдом состоянии  $\alpha \approx 0,004 \text{ K}^{-1}$ .

Зависимость электрического сопротивления от температуры положена в основу работы термометров сопротивления. Такой термометр представляет собой металлическую проволоку (обычно платиновую), намотанную на фарфоровый или слюдяной каркас. Проградуированный по постоянным температурным точкам термометр сопротивления позволяет измерять с точностью порядка нескольких сотых ( $\sim 0,05^\circ\text{C}$ ) градуса как низкие, так и высокие (до  $600^\circ\text{C}$ ) температуры. В последнее время все большее применение находят термометры сопротивления из полупроводников.

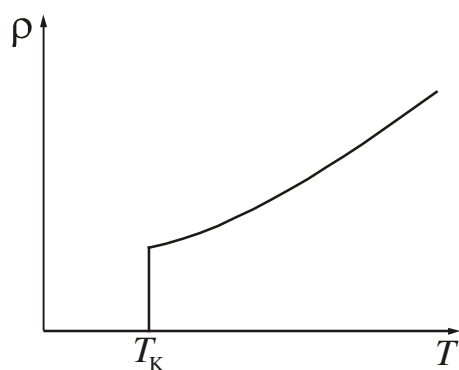


Рисунок 42.3

У большой группы металлов и сплавов при температуре порядка несколько кельвин сопротивление скачком обращается в нуль (рис. 42.3). Это явление обнаружено в 1911 году для ртути и названо *сверхпроводимостью*. Температура  $T_K$ , при охлаждении до которой совершается переход в сверхпроводящее состояние, называется температурой сверхпроводящего перехода. В дальнейшем были обнаружены и другие материалы, способные переходить в сверхпроводящее состояние (тантал, свинец, ниобий, а также сплавы: галлид

ниобия  $\text{Nb}_3\text{Ga}$ , галлид ванадия  $\text{V}_3\text{Ga}$  и др.). Эти материалы получили название сверхпроводников. Температуры сверхпроводящих переходов лежат в интервале от 1,2 К до 18 К.

### Посмотрите лекционную демонстрацию.

Зависимость сопротивления металлов от температуры.

<http://www.youtube.com/watch?v=NL1vjrwQNX8>



## 42.2 Электропроводность полупроводников

Полупроводниками являются кристаллические вещества, у которых валентная зона полностью заполнена электронами, а ширина запрещённой зоны невелика ( $\Delta E < 3 \text{ эВ}$ ). Свое название они получили потому, что по величине электропроводности занимают промежуточное положение между металлами и диэлектриками. Различают полупроводники с собственной и примесной проводимостью. Собственной проводимостью обладают химически чистые полупроводники. Электрические свойства примесных полупроводников определяются искусственно вводимыми в них примесями.

### 42.2.1 Собственная проводимость полупроводников

Типичными полупроводниками являются элементы четвертой группы периодической системы Менделеева – германий и кремний. Они образуют решётку типа алмаза, в которой каждый атом связан ковалентными (парно–электронными) связями с четырьмя равноотстоящими от него соседями. Условно такое взаимное расположение атомов можно представить в виде плоской структуры, изображенной на рис. 42.4. Кружки со знаком «+» обозначают положительно заряженные атомные остатки (т.е. ту часть атома, которая остаётся после удаления валентных электронов), кружки со знаком «–» – валентные электроны, двойные линии – ковалентные связи.

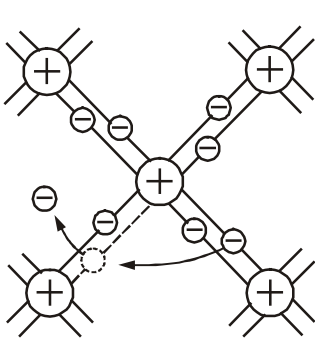


Рисунок 42.4

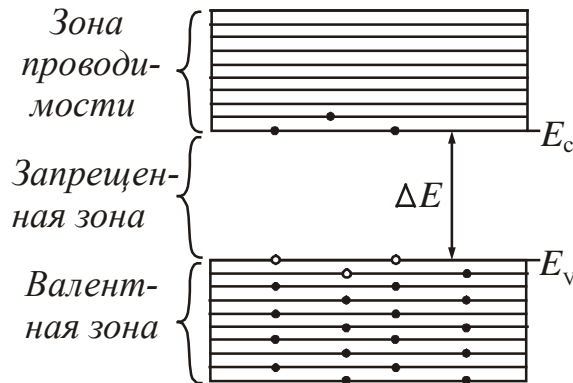


Рисунок 42.5

При температуре порядка  $T \approx 250 \div 300 \text{ К}$  тепловое движение может разорвать отдельные пары, освободив один электрон. Покинутое электроном место перестаёт быть нейтральным, в его окрестности возникает избыточный положительный заряд  $+e$  – образуется дырка (на рис. 42.4 – пунктирный кружок). На это место может перескочить соседний электрон. В результате дырка начинает также странствовать по кристаллу, как и освободившийся электрон.

Если внешнее электрическое поле отсутствует, то электроны проводимости и дырки движутся хаотически. При включении поля на хаотическое движение накладывается упорядоченное движение: электронов против поля и дырок – в направлении поля. Оба движения – и дырок, и электронов – приводят к переносу заряда вдоль кристалла. Следовательно, **собственная электропроводность обуславливается носителями заряда двух знаков – отрицательными электронами и положительными дырками.**

Если внешнее электрическое поле отсутствует, то электроны проводимости и дырки движутся хаотически. При включении поля на хаотическое движение накладывается упорядоченное движение: электронов против поля и дырок – в направлении поля. Оба движения – и дырок, и электронов – приводят к переносу заряда вдоль кристалла. Следовательно, **собственная электропроводность обуславливается носителями заряда двух знаков – отрицательными электронами и положительными дырками.**

С точки зрения зонной теории твёрдых тел собственная проводимость возникает в результате перехода электронов с верхних уровней валентной зоны

в зону проводимости (рис. 42.5) При этом в зоне проводимости появляется некоторое число носителей тока – электронов, занимающих уровни вблизи дна зоны. Одновременно в валентной зоне освобождается такое же число мест на верхних уровнях, в результате чего появляются дырки.

У собственных полупроводников количество электронов, перешедших в зону проводимости, будет равно количеству образовавшихся дырок в валентной зоне. Удельная проводимость  $\sigma$  пропорциональна концентрации носителей тока и их подвижности:

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p), \quad (42.4)$$

где  $n$  и  $p$  – концентрации электронов и дырок соответственно;

$\mu_n$  – подвижность электронов проводимости,

$\mu_p$  – подвижность дырок.

**Подвижность** – отношение средней скорости  $v$  направленного движения носителей тока к напряженности  $E$  электрического поля, вызвавшего это движение.

Для собственных полупроводников концентрация электронов равна концентрации дырок ( $n = p$ ), поэтому

$$\sigma = en(\mu_n + \mu_p), \quad (42.5)$$

Электропроводность собственных полупроводников быстро растет с температурой  $T$ , изменяясь по закону

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta E}{2kT}\right), \quad (42.6)$$

где  $\Delta E$  – ширина запрещённой зоны;

$k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана;

$\sigma_0$  – величина, определяемая свойствами конкретного материала, слабо изменяющаяся с температурой. Её можно считать константой для данного полупроводника.

Прологарифмировав соотношение (42.6), получим

$$\ln \sigma = \ln \sigma_0 - \frac{\Delta E}{2kT}, \quad (42.7)$$

т.е. зависимость  $\ln \sigma$  от  $1/T$  является линейной. График зависимости  $\ln \sigma$  от  $1/T$  для собственных полупроводников изображен на рис. 42.6.

Сопротивление полупроводников в широком интервале температур изменяется по закону:

$$R = R_0 e^{\frac{\Delta E}{2kT}}, \quad (42.8)$$

где  $R_0$  – величина, определяемая свойствами конкретного материала, слабо изменяющаяся с температурой. Её можно считать константой для данного полупроводника (нельзя говорить, что это начальное сопротивление или сопро-

тивление при нуле температуры). График зависимости температуры от сопротивления  $R = f(T)$ , представлен на рис. 42.7.

Изменение сопротивления полупроводника с изменением температуры характеризуют температурным коэффициентом сопротивления.

**Температурный коэффициент сопротивления** – это величина, численно равная отношению изменению сопротивления проводника при изменении его температуры на 1 К:

$$\alpha_T = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT}. \quad (42.9)$$

Для собственных полупроводников из (42.8) и (42.9) можно получить:

$$\alpha_T = -\frac{\Delta E}{2kT^2}. \quad (42.10)$$

Из (42.10) следует, что для собственных полупроводников  $\alpha_T < 0$  и убывает по модулю с возрастанием температуры.

**Посмотрите лекционную демонстрацию.**

Зависимость сопротивления полупроводника от температуры.

<http://www.youtube.com/watch?v=lvZpe9CC7c8>

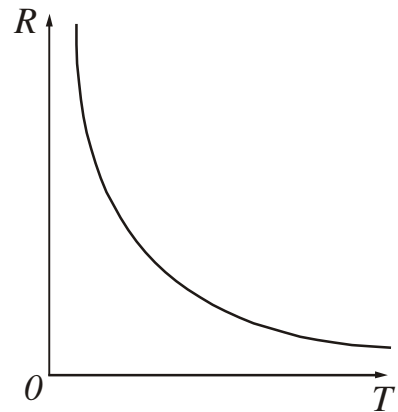


Рисунок 42.7

### 42.2.2 Примесная проводимость полупроводников

Примесная проводимость возникает, если некоторые атомы данного полупроводника заменить в узлах кристаллической решётки атомами, валентность которых отличается на единицу от валентности основных атомов. На рис. 42.8 а условно изображена решётка германия с примесью пентавалентных атомов фосфора. Для образования ковалентных связей с соседями атому фосфора достаточно четырёх электронов. Следовательно, пятый валентный электрон оказывается как бы лишним и легко отщепляется от атома за счёт энергии теплового движения, образуя странствующий свободный электрон.

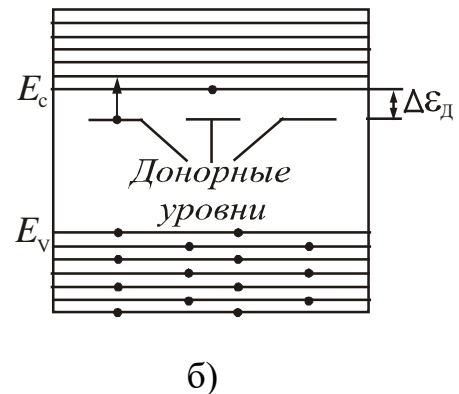
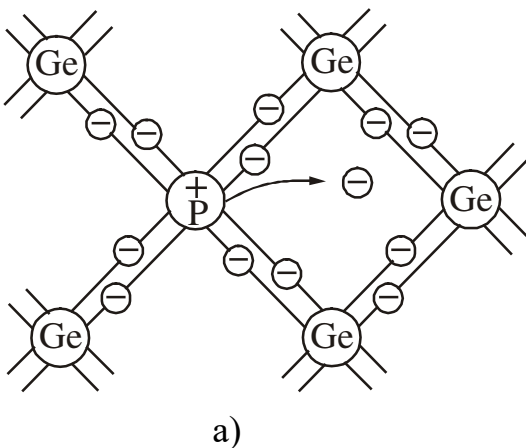


Рисунок 42.8

В отличие от собственного в примесном полупроводнике образование свободного электрона не сопровождается нарушением ковалентных связей, т. е. образованием дырки. В окрестности атома примеси возникает избыточный положительный заряд, но он связан с этим атомом и не может перемещаться по решётке. Благодаря этому заряду атом примеси может захватить приближившийся к нему электрон, но связь захваченного электрона с атомом будет непрочной и легко нарушается вновь за счёт тепловых колебаний решётки.

Таким образом, *в полупроводнике с примесью, валентность которой на единицу больше валентности основных атомов, имеется только один вид носителей тока – электроны.* Соответственно говорят, что такой полупроводник обладает *электронной проводимостью* или является полупроводником *n*-типа (от слова *negative* – отрицательный). Атомы примеси, поставляющие электроны проводимости, называются *донорами*.

Примеси искажают поле решётки. Это приводит к возникновению на энергетической схеме примесных уровней, расположенных в запрещённой зоне кристалла. В случае полупроводников *n*-типа примесные уровни называются донорными (рис. 42.8 б). На схеме  $\Delta\varepsilon_d$  – разность энергий донорного уровня и дна зоны проводимости (энергия активации донорных примесей).

Если энергия активации гораздо меньше, чем ширина запрещённой зоны ( $\Delta\varepsilon_d \ll \Delta E$ ), то энергии теплового движения даже при низких температурах оказывается достаточно для того, чтобы перевести электрон с донорного уровня в зону проводимости (рис. 42.8 б). Этому процессу соответствует отщепление пятого валентного электрона от атома примеси.

Рассмотрим случай, когда валентность примеси на единицу меньше валентности основных атомов. На рис. 42.9 а условно изображена решётка кремния с примесью трёхвалентных атомов бора.

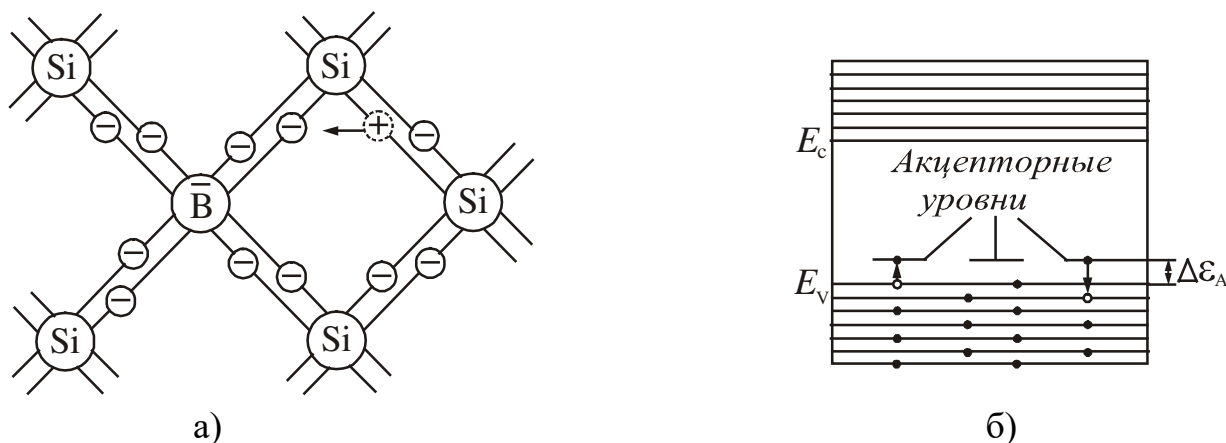


Рисунок 42.9

Трёх валентных электронов атома бора недостаточно для образования связей со всеми четырьмя соседями. Поэтому одна из связей окажется не укомплектованной, и будет представлять собой место, способное захватить электрон. При переходе на это место электрона в одной из соседних пар возникает дырка, которая будет кочевать по кристаллу. Вблизи атома примеси возникает

избыточный отрицательный заряд, но он будет связан с данным атомом и не может стать носителем тока.

Таким образом, *в полупроводнике с примесью, валентность которой на единицу меньше валентности основных атомов, возникают носители только одного вида – дырки*. Проводимость в этом случае называется *дырочной*, а о полупроводнике говорят, что он относится к *p*-типу (от слова *positive* – положительный). Примеси, вызывающие возникновение дырок, называются *акцепторными*.

На энергетической диаграмме возникают примесные уровни, которые называются акцепторными (рис. 42.9 б). На схеме  $\Delta\varepsilon_A$  – разность энергий потолка валентной зоны и акцепторного уровня (энергия активации акцепторных примесей). Акцепторные уровни оказывают существенное влияние на электрические свойства кристалла в том случае, если они расположены недалеко от потолка валентной зоны, т.е. если  $\Delta\varepsilon_A \ll \Delta E$  (рис. 42.9 б). Образованию дырки соответствует переход электрона из валентной зоны на акцепторный уровень.

Электронный характер проводимости полупроводников *n*-типа и дырочной характер проводимости полупроводников *p*-типа подтверждается экспериментально при исследовании эффекта Холла. Наблюдаемый знак холловской разности потенциалов совпадает со знаком носителей тока.

При повышении температуры концентрация примесных носителей тока быстро достигает насыщения. Это значит, что практически освобождаются все донорные уровни. Температура, при которой достигается насыщение, называется *температурой истощения примесей* ( $T_s$ ). По мере роста температуры все в большей степени начинает сказываться собственная проводимость полупроводника, обусловленная переходом электронов непосредственно из валентной зоны в зону проводимости. Эта температура называется *температурой перехода к собственной проводимости*  $T_i$ . Таким образом, электропроводность примесного полупроводника в широком интервале температур складывается из примесной и собственной. При низких температурах преобладает примесная, а при высоких – собственная проводимость.

Электропроводность примесного полупроводника может быть выражена соотношением

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT}} + \sigma_{\text{прим}} e^{-\frac{\Delta\varepsilon_{\text{прим}}}{2kT}}, \quad (42.11)$$

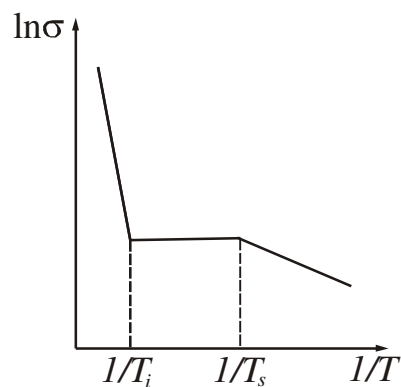


Рисунок 42.10

где  $\Delta\varepsilon_{\text{прим}}$  – энергия активации примеси;  
 $\sigma_{\text{прим}}$  – константа, определяемая типом примеси.

Первое слагаемое соответствует собственной проводимости, а второе – примесной. Схематично, график зависимости  $\ln \sigma$  от  $1/T$  имеет вид, представленный на рис. 42.10. По наклону линейных участков можно определять ширину запрещённой зоны  $\Delta E$  и энергию активации примесей  $\Delta\varepsilon_{\text{прим}}$ .

В полупроводниках, при любом характере их проводимости, число носителей тока значительно меньше, чем в металлах. Но концентрация носителей тока в полупроводниках и их энергия сильно зависят от температуры и возрастают при ее повышении. Это создает **возможность управления числом носителей тока** и их энергией в полупроводниках, широко применяемую в полупроводниковых устройствах.

### §43 Электронно-дырочный переход. Полупроводниковый диод

Область монокристаллического полупроводника, в которой происходит смена проводимости с электронной на дырочную (или наоборот), называется **электронно-дырочным переходом** (*p-n*-переходом). Такой *p-n*-переход образуется

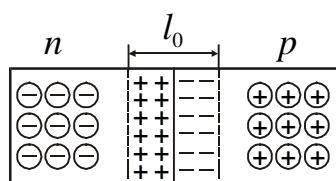


Рисунок 43.1

в кристалле полупроводника, если в нём с помощью соответствующих примесей будут созданы участки с различной (*n* и *p*) проводимостью. Так, если при выращивании монокристалла германия в расплав вводить необходимые примеси, то получается монокристалл, в котором имеются последовательно расположенные области с различными типами проводимости.

На границе двух полупроводников с различным типом проводимости образуется двойной контактный слой. Электроны из *n*-полупроводника диффундируют в дырочный *p*-полупроводник. Это приводит к обеднению электронами *n*-полупроводника вблизи границы и к образованию избыточного положительного заряда в *n*-кристалле, связанного с атомами донорной примеси. Диффузия дырок из *p*-полупроводника будет происходить в противоположном направлении и усилит образование избыточных отрицательных электрических зарядов на границе электронно-дырочного перехода, связанных с атомами акцепторной примеси. Таким образом, создается двойной электрический слой толщины  $l_0$ , который препятствует переходу электронов и дырок через границу раздела двух полупроводников (рис. 43.1) и, поэтому, называется **запирающим**. Запирающий слой имеет повышенное сопротивление, и преодолеть его основные носители могут лишь при температуре порядка тысяч градусов.

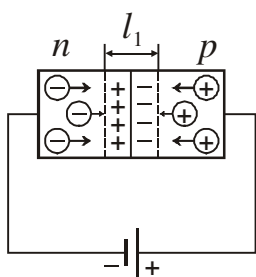


Рисунок 43.2

Действие внешнего электрического поля существенным образом влияет на сопротивление запирающего слоя. Подадим на *p-n*-переход внешнее напряжение такого направления, чтобы плюс был подключен к *p*-области, а минус – к *n*-области (рис. 43.2). Такое включение называется **прямым**. Тогда под действием электрического поля электроны в *n*-полупроводнике будут перемещаться к границе раздела полупроводников. Дырки в *p*-полупроводнике под действием того же поля будут двигаться навстречу электронам также к этой границе. При таком пропускном (прямом) направлении тока в полупроводнике толщина запирающего слоя будет непрерывно



уменьшаться. Электроны, переходя границу, «заполняют» дырки, т.е. в пограничном слое происходит рекомбинация электронов с дырками. Граница  $p$ - $n$ -перехода не будет представлять сопротивления для тока, вызываемого внешним напряжением. Это напряжение необходимо только для того, чтобы поддерживать встречное движение электронов и дырок.

Изменим полярность подключения, т.е. приложим к  $p$ - $n$ -переходу напряжение такого направления, чтобы плюс был подключен к  $n$ -области, а минус – к  $p$ -области (рис. 43.3). Такое включение называется **обратным**. Дырки в  $p$ -полупроводнике и электроны в  $n$ -полупроводнике будут перемещаться от границы раздела в противоположные стороны. В этом случае будет увеличиваться размер запирающего слоя, в котором концентрация подвижных носителей тока – электронов и дырок – будет значительно меньше, чем в остальном объеме полупроводника. В области, обеднённой подвижными зарядами, возрастает двойной электрический слой неподвижных зарядов противоположного знака (рис. 43.3).

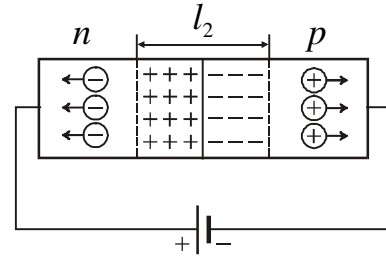


Рисунок 43.3

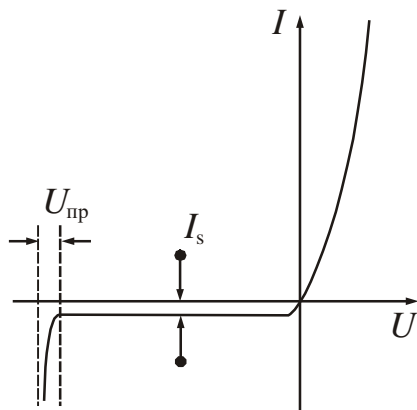


Рисунок 43.4

Чем больше будет приложенное запирающее напряжение, тем толще двойной слой, обеднённый подвижными носителями тока, и, вследствие этого, тем больше сопротивление такого слоя. При достаточном обратном напряжении запирающий слой представляет собой практически изолятор, в котором отсутствуют подвижные носители тока.

На рис. 43.4 представлена вольт-амперная характеристика  $p$ - $n$ -перехода. Небольшой обратный ток  $I_s$  обусловлен неосновными носителями (см. левую ветвь рис. 43.4).  $p$ - $n$ -переход может выдерживать обратное напряжение до определённого предела

после чего наступает пробой, аналогичный пробоем диэлектрика.

Таким образом,  $p$ - $n$ -переход обладает **свойством односторонней проводимости**. Способность  $p$ - $n$ -перехода пропускать ток в одном направлении и не пропускать или почти не пропускать его в противоположном направлении используется в приборах, называемых полупроводниковыми диодами. Это свойство диода характеризуется **коэффициентом выпрямления**

$$\alpha = \frac{I_{\text{пр}}}{I_{\text{обр}}}, \tag{43.1}$$

т.е. отношением прямого  $I_{\text{пр}}$  и обратного  $I_{\text{обр}}$  токов, измеренных при одинаковых по величине прямом и обратном напряжении. Обычно коэффициент выпрямления составляет величину в несколько сотен единиц, но может достигать и больших значений ( $10^5 \div 10^6$ ).

Достоинством полупроводникового диода являются малые размеры и масса, длительный срок службы, высокая механическая прочность, высокий коэффициент полезного действия, а недостатком – зависимость их параметров от температуры.

### §44 Внутренний фотоэффект

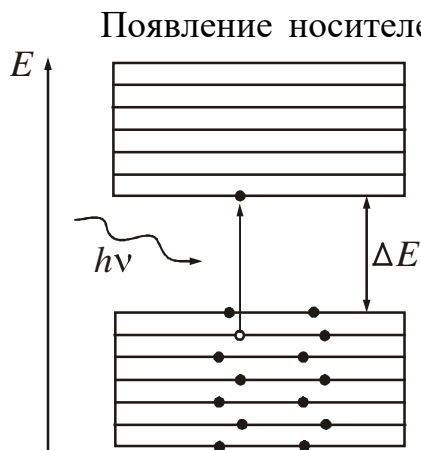


Рисунок 44.1

Появление носителей тока в полупроводниках может быть вызвано поглощением света. Если энергия кванта  $h\nu$  превышает ширину запрещённой зоны, т.е.  $h\nu \geq \Delta E$ , то электрон, поглотивший квант, переходит из валентной зоны в зону проводимости (рис. 44.1). В результате появляется дополнительная пара носителей тока – электрон и дырка, что проявляется в увеличении электропроводности вещества. Проводимость, обусловленная появлением этих электронов или дырок, называется **фотопроводимостью**. Явление перераспределения электронов по энергетическим уровням под действием света называется **внутренним фотоэффектом** (в отличие от внешнего фотоэффекта при этом они не покидают вещество).

Приборы, в которых используется свойство полупроводниковых кристаллов изменять своё электрическое сопротивление при освещении светом, называются фоторезисторами.

**Фотосопротивление** (фоторезистор) – двухэлектродный полупроводниковый фотоэлемент, который изменяет свою электропроводность в зависимости от интенсивности и спектрального состава падающего света.

Принцип устройства фоторезистора показан на рис. 44.2. На диэлектрическую пластину 1 наносится тонкий слой полупроводника 2 с контактами 3 по краям. Затем полупроводник помещают в защитный корпус, который оборудован «окном» для проникновения света. В качестве полупроводниковых материалов используют Se, Te, Ge,  $W_2S_3$ , PbS, PbSe и т. д., в зависимости от спектрального состава излучения, направляемого на фоторезистор.

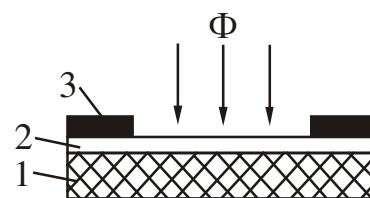


Рисунок 44.2

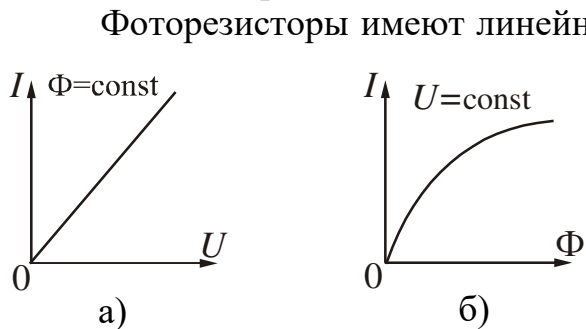


Рисунок 44.3

Фоторезисторы имеют линейную вольт-амперную (рис. 44.3 а) и нелинейную люкс-амперную характеристики (рис. 44.3 б). Вольт-амперная характеристика – зависимость фототока от приложенного напряжения – снимается при неизменном световом потоке. Люкс-амперная – зависимость фототока от светового потока – при неизменном напряжении.

Основными характеристиками фоторезисторов являются темновое сопротивление  $R_T$  и удельная чувствительность  $K$ .



**Темновое сопротивление**  $R_T$  – сопротивление фоторезистора при отсутствии облучения. Оно составляет величину порядка  $10^4 - 10^7$  Ом.

**Удельная чувствительность** – отношение фототока  $I_\Phi$  к произведению величины падающего на фоторезистор светового потока  $\Phi$  на приложенное напряжение  $U$ :

$$K = \frac{I_\Phi}{\Phi U}. \quad (44.1)$$

Обычно удельная чувствительность составляет несколько сотен или тысяч микроампер на вольт-люмен.

Значительная зависимость сопротивления от температуры, характерная для полупроводников, является недостатком фоторезисторов. Существенным недостатком также считается их большая инерционность, которая объясняется довольно большим временем рекомбинации электронов и дырок после прекращения облучения. Тем не менее, фоторезисторы широко применяются в различных схемах автоматики. Фоторезисторы применяют как детекторы излучения в системах автоматического регулирования, фототелеграфии, в фотоэлектрических пирометрах, а также в схемах измерения прозрачности жидкости и газа (дымномеры, колориметры), для измерения качества поверхности (шероховатости, блеклости), контроля размеров деталей, линейных размеров и т.д.

Они позволяют управлять на расстоянии процессами производства, автоматически отличать нарушения нормального хода процесса и останавливать в этих случаях процесс. При нарушениях хода процесса изменяется поток света, попадающего на фотоэлемент, и создается ток, выключающий весь процесс.

Количество образующихся носителей тока пропорционально падающему световому потоку, поэтому фоторезисторы применяют в фотометрии для измерения освещенности.

**Посмотрите лекционную демонстрацию:**

Фоторезистор: "А каковы Ваши намерения?"

<https://www.youtube.com/watch?v=9R7hIRE0CY>

**§45 Термоэлектрические явления**

Между тепловыми и электрическими процессами в металлах и полупроводниках имеется взаимосвязь, которая обуславливает явления, называемые термоэлектрическими. К их числу относятся явление Зеебека, явление Пельтье и явление Томсона. Эти эффекты связаны с взаимным превращением тепловой энергии в энергию электрического тока.

**45.1 Явление Зеебека**

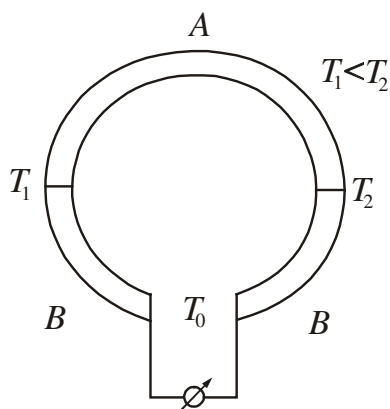


Рисунок 45.1

Если спаи 1 и 2 двух разнородных металлов А и В, образующих замкнутую цепь (рис. 45.1), имеют неодинаковую температуру ( $T_1 \neq T_2$ ), то в цепи течет электрический ток. Изменение знака у разности температур приводит к изменению направления тока. Это явление было открыто в 1821 году Т. Зеебеком.

Возникшая электродвижущая сила называется **термоэлектродвижущей силой** (термо-эдс). Содержит

жащая два спая цепь называется **термопарой**. В общем случае величина термо-эдс определяется следующим образом:

$$\varepsilon_{\text{термо}} = \int_{T_1}^{T_2} \alpha_{AB}(T) dT, \quad (45.1)$$

где  $\alpha_{AB}(T)$  – удельная термо-эдс. данной пары металлов или полупроводников.

Для большинства пар металлов  $\alpha_{AB}(T)$  зависит от температур спаев и имеет значения ( $10^{-5} \div 10^{-4}$ ) В/К; для полупроводников она может оказаться значительно больше (до  $1,5 \cdot 10^{-3}$  В/К).

В отдельных случаях удельная термо-эдс слабо зависит от температуры. Тогда формулу (45.1) можно приближенно представить в виде

$$\varepsilon_{\text{термо}} = \alpha_{AB}(T_2 - T_1), \quad (45.2)$$

т.е. термо-эдс пропорциональна разности температур спаев. Таким образом, в эффекте Зеебека происходит прямое преобразование тепловой энергии в энергию тока.

Термопары используют для измерения температур. Один спай термопары поддерживают при постоянной температуре (например, комнатной, или при  $0^\circ\text{C}$ ), другой помещают в среду, температуру которой хотят измерить (рис. 45.2). При использовании термопар для точных измерений температуры лучше измерять возникающую в цепи электродвижущую силу, а не текущий в ней ток. Это связано с тем, что электродвижущая сила зависит только от рода образующих термопару металлов и температуры спаев, а сила текущего в цепи тока определяется, кроме того, сопротивлением измерительного прибора, соединительных проводов и внутренним сопротивлением спаев. Внутреннее сопротивление спаев сильно зависит от состояния спая и поэтому меняется со временем.

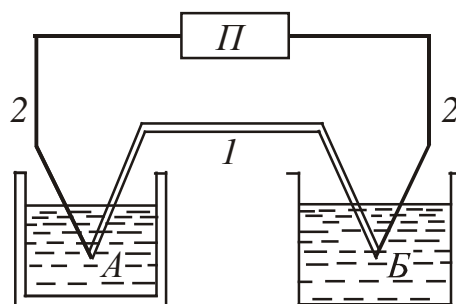


Рисунок 45.2

Для проведения быстрых измерений температуры, не требующих высокой точности, в цепь термопары включают милливольтметр по схеме, изображенной на рис. 45.3. Измерительный спай термопары приводится в контакт с телом, температуру которого надо определить. Для получения правильных результатов измерений, термопару необходимо предварительно градуировать или использовать стандартные пары с табулированными значениями термо-эдс. Градуировка термопары заключается в установлении зависимости величины термо-эдс от разности температур спаев.

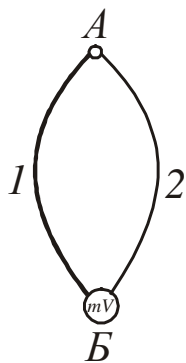


Рисунок 45.3

С помощью термопар можно измерять с точностью порядка сотых долей градуса как низкие (до  $0,1$  К), так и высокие (до  $1600$  К) температуры.

**Посмотрите лекционную демонстрацию:**  
Эффект Зеебека (термопара)

<https://www.youtube.com/watch?v=Gv1IHc1B8Mc>

### 45.2 Явление Пельтье

Эффект Пельтье (открыт в 1834 году) состоит в обратимом выделении дополнительного (к эффекту Джоуля – Ленца) тепла на контакте двух металлов или полупроводников при прохождении через него электрического тока. Таким образом, явление Пельтье оказывается обратным явлению Зеебека.

Опытным путем установлено, что количество выделившегося или поглощенного в спае тепла пропорционально заряду  $q = It$ , прошедшему через спай:

$$Q_{AB} = P_{AB} q = P_{AB} I t. \quad (45.3)$$

Коэффициент пропорциональности  $P_{AB}$  называется коэффициентом Пельтье, индексы указывают, что ток течет от звена А к звену В (рис. 45.4). Из (45.3) следует, что в отличие от тепла Джоуля – Ленца ( $Q = I^2 R t$ ), тепло Пельтье пропорционально не квадрату, а первой степени силы тока. Это означает, что при перемене направления тока  $Q_{AB}$  меняет знак, т.е. вместо выделения тепла наблюдается поглощение такого же количества тепла, т.е.  $P_{AB} = -P_{BA}$ .

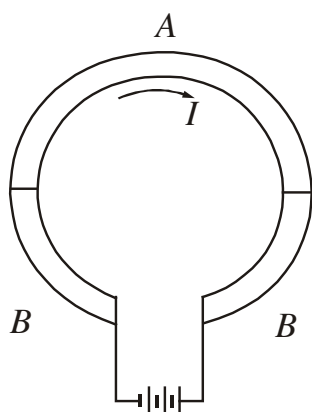


Рисунок 45.4

Из законов термодинамики вытекает, что коэффициент Пельтье и удельная термоэлектродвижущая сила связаны соотношением

$$P_{AB} = \alpha_{AB} T. \quad (46.4)$$

В случае контакта двух веществ с одинаковым видом носителей тока (металл–металл, металл–полупроводник  $n$ -типа, два полупроводника  $n$ -типа, два полупроводника  $p$ -типа) эффект Пельтье объясняется следующим образом. Носители тока по разные стороны от спаи имеют разную полную энергию. Если носители, пройдя через спай, попадают в область с меньшей энергией, то они отдают избыток энергии кристаллической решётке: спай нагревается. На другом спае носители переходят в область с большей энергией; недостающую энергию они заимствуют у решётки. Это приводит к охлаждению спаи.

А.Ф. Иоффе выдвинул идею использования эффекта Пельтье для создания холодильных установок. Рабочим элементом таких приборов является батарея из чередующихся полупроводников  $n$ -типа и  $p$ -типа. Спаи одного вида (соответствующие переходу от  $n$  к  $p$ ) введены в охлаждаемую область, а спаи другого вида (соответствующие переходу от  $p$  к  $n$ ) выведены наружу. При надлежащем направлении тока внутренние спаи поглощают тепло, понижая температуру окружающего их пространства, наружные спаи отдают тепло внешней среде. Такие холодильники имеют невысокий КПД, но находят применение в микроэлектронике.

### 45.3 Явление Томсона

Явление заключается в том, что при прохождении тока по однородному проводнику, вдоль которого имеется градиент (неоднородность) температуры, в проводнике выделяется тепло. Этот эффект был сначала У. Томсоном теоретически предсказан, а затем уже экспериментально им обнаружен в 1856 году.

Количество тепла, выделяющегося в единицу времени в элементе проводника длины  $dl$ , равно

$$dQ = \tau I \frac{dT}{dl} dl, \quad (45.5)$$

где  $I$  – сила тока;

$dT/dl$  – градиент температуры вдоль проводника;

$\tau$  – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом Томсона, зависящий от природы проводника.

Явление Томсона объясняется по аналогии с явлением Пельтье. Пусть ток течет в сторону возрастания температуры. Если носители тока – электроны, то они при своем движении будут переходить из мест с более высокой температурой (и, следовательно, большей средней энергией электронов), в места с более низкой температурой (и меньшей средней энергией). Избыток своей энергии электроны отдадут решётке, что приведет к выделению тепла. Если носителями тока служат дырки, то эффект будет иметь обратный знак.

## ЧАСТЬ 5. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА

**Ядерная физика** – это раздел физики, изучающий структуру и свойства атомных ядер и их превращения: процессы радиоактивного распада и ядерные реакции.

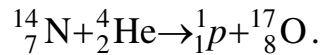
### §46 Состав и размеры ядер. Энергия связи ядер

#### 46.1 Состав ядра

**Ядро** – это центральная часть атома, в которой сосредоточена практически вся масса атома и его положительный электрический заряд. В состав ядра входит два вида частиц:

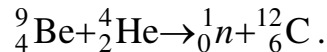
- протоны ( ${}^1_1p$ );
- нейтроны ( ${}^1_0n$ ).

**Протон** имеет положительный заряд, равный по величине заряду электрона:  $q = +e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Масса протона  $m_p = 1,00728$  а.е.м.  $\approx 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг. Протон впервые получен Резерфордом в результате ядерной реакции:



Протон – стабильная частица, тенденции к распаду не имеет (период полураспада  $T_{1/2} = 10^{30}$  с).

**Нейтрон** не имеет заряда, т.е.  $q = 0$ . Масса нейтрона  $m_n = 1,00866$  а.е.м.  $\approx 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг. Открыт в 1932 году Чедвиком при осуществлении реакции:



В свободном состоянии нейтрон испытывает радиоактивный распад с периодом полураспада  $T_{1/2} = 12,6$  мин.

В ядерной физике считается, что протон и нейтрон – это два зарядовых состояния одной частицы, которая называется нуклоном. Протон – протонное состояние нуклона с зарядом  $+e$ ; нейтрон – нейтронное состояние нуклона с нулевым электрическим зарядом.

#### 46.2 Характеристики атомного ядра

Основными характеристиками ядра являются его заряд и масса. **Зарядом** ядра называется величина  $Z \cdot e$ , где  $e$  – величина заряда протона,  $Z$  – порядковый номер химического элемента в периодической системе элементов Менделеева. Порядковый номер  $Z$  совпадает с числом протонов в ядре. В настоящее время известны ядра с  $Z$  от  $Z=1$  до  $Z=107$ . Элементы с  $Z$  от 1 до 92, кроме Tc (технеция) с  $Z = 43$  и Pm (прометия) с  $Z=61$ , встречаются в природе, элементы с  $Z$  от 93 до 107 получены искусственным путём. Их называют трансурановыми элементами. Pu (плутоний),  $Z = 94$ , обнаружен в природе в очень незначительных количествах в природном минерале – смоляной обманке.

**Масса атомного ядра** практически совпадает с массой всего атома, так как масса электронов очень маленькая. Массы атомов измеряют в атомных единицах массы (обозначается а.е.м.):  $1 \text{ а.е.м.} = 1,6605655 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ .

$A$  – массовое число ядра – целое число, ближайшее к атомной массе, выраженной в а.е.м. Оно определяет число нуклонов, т.е. общее число протонов и нейтронов в ядре:  $A = N + Z$ . Тогда число нейтронов

$$N = (A - Z). \quad (46.1)$$

Ядра обозначаются тем же символом, что и нейтральный атом:

$${}^A_Z X \quad \text{или} \quad {}_Z X^A,$$

где  $X$  – символ химического элемента.

При измерениях масс атомов были обнаружены изотопы и изобары.

**Изотопы** – ядра, имеющие одинаковый порядковый номер  $Z$ , но разное массовое число  $A$ . Водород имеет 3 изотопа:  ${}^1_1\text{H}$  – протий,  ${}^2_1\text{H}$  – дейтерий, которые являются стабильными и  ${}^3_1\text{H}$  – тритий, являющийся радиоактивным. Кислород имеет 3 изотопа:  ${}^{16}_8\text{O}$ ,  ${}^{17}_8\text{O}$ ,  ${}^{18}_8\text{O}$ . В большинстве случаев изотопы обладают одинаковыми физическими свойствами (исключение водород H), т.к. они определяются в основном структурой электронных оболочек, а она у изотопов одинакова. В природе встречается 300 устойчивых изотопов химических элементов и имеется около 1000 искусственных (радиоактивных) изотопов.

**Изобары** – ядра, имеющие одинаковое массовое число  $A$ , но разный порядковый номер  $Z$ . Например, изобары бериллия:  ${}^{10}_4\text{Be}$ ,  ${}^{10}_5\text{B}$ ,  ${}^{10}_6\text{C}$ . Изобары в основном встречаются среди тяжелых ядер.

### 46.3 Размеры ядер

Ядро является системой частиц, подчиняющихся законам квантовой механики и, следовательно, соотношению неопределенностей Гейзенберга. Вследствие этого размеры области, в которой могут находиться ядерные частицы, могут быть заданы лишь с точностью, допускаемой этим соотношением. В первом приближении ядро считается шаром, радиус которого определяется эмпирической формулой:

$$R = R_0 \sqrt[3]{A}, \quad (46.2)$$

где  $A$  – массовое число,

Величина  $R_0 = (1,3 \div 1,7) \cdot 10^{-15} \text{ м}$  может быть истолкована как пропорциональность объёма ядра числу нуклонов. В ядерной физике принята следующая единица измерения размеров:  $10^{-15} \text{ м} = 1 \text{ Ф}$  (ферми).

Объём ядра пропорционален числу нуклонов, т.е. плотность ядерного вещества примерно одинакова ( $\sim 10^{17} \text{ кг/м}^3$ ). Очень высокая плотность говорит об исключительно высокой интенсивности ядерного взаимодействия.

### 46.4 Свойства ядерных сил

Ядерное взаимодействие между нуклонами называется **сильным взаимодействием**. Его можно описать с помощью поля **ядерных** сил, которые не сводятся ни к одному из ранее рассмотренных типов сил. Отличительные особенности ядерных сил.

1. Ядерные силы – это силы притяжения. Они не имеют электрического происхождения, действуют на расстояниях  $\sim 4,2$  ферми, поэтому их называют короткодействующими.
2. Ядерные силы являются зарядово независимыми, т.е. ядерное взаимодействие двух нуклонов не зависит от того, обладают или нет электрическим зарядом оба нуклона.
3. Ядерные силы не являются центральными. Они зависят не только от расстояния между нуклонами, но от ориентации их спинов.
4. Для ядерных сил характерно насыщение. Насыщение проявляется в том, что нуклон взаимодействует не со всеми остальными нуклонами ядра, а лишь с некоторыми ближайшими соседями, причем не со всеми, даже если они находятся в радиусе действия сил.
5. Ядерные силы имеют обменный характер. Считается, что взаимодействие между двумя частицами осуществляется благодаря обмену третьей частицей. В 1935 году Юкава и Тамм обнаружили, что эти частицы имеют массу покоя  $m_0 = 200m_{0э}$ ,  $m_{0э}$  – масса покоя электрона. Назвали эти частицы  $\pi$ -мезонами или пионами.

### 46.5 Дефект массы ядра. Энергия связи

Масс-спектрометрические измерения показали, что масса ядра меньше, чем сумма масс составляющих его нуклонов.

$$\Delta m = Z m_p + (A - Z)m_n - m_{я}. \quad (46.3)$$

Величина  $\Delta m$  называется **дефектом массы**. В справочных таблицах приводятся массы атомов, а не ядер, поэтому дефект массы выражают через массу атома.

$$\Delta m = Z m_{1H} + (A - Z)m_n - m_a. \quad (46.4)$$

Всякому изменению массы должно соответствовать изменение энергии, т.е. при образовании ядра должна выделяться определенная энергия. Для разделения ядра необходимо затратить такое же количество энергии, которое выделяется при его образовании.

**Энергия связи ядра**  $E_{св}$  – энергия, которую необходимо затратить, чтобы расщепить ядро на отдельные нуклоны. Энергия связи:

$$E_{св} = \Delta m c^2 = (Z m_p + (A - Z)m_n - m_{я}) \cdot c^2.$$

Или

$$E_{\text{св}} = (Z m_{1\text{H}} + (A - Z)m_n - m_a) \cdot c^2, \quad (46.5)$$

где  $c$  – скорость света.

Если массы выразить в а.е.м., то энергия связи вычисляется по формуле:

$$E_{\text{св}} = 931,5 \Delta m \quad (\text{МэВ}), \quad (46.6)$$

так как одной атомной единице массы соответствует атомная единица энергии

$$1 \text{ а.е.э.} = c^2 \cdot 1 \text{ а.е.м.} = 9 \cdot 10^{16} \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} = 1,491 \cdot 10^{-10} \text{ Дж} = 931,5 \text{ МэВ}.$$

**Удельная энергия связи**  $\varepsilon_{\text{уд}}$  – энергия связи, приходящаяся на один нуклон. Она характеризует устойчивость (прочность) атомных ядер.

$$\varepsilon_{\text{уд}} = \frac{E_{\text{св}}}{A}. \quad (46.7)$$

Чем больше удельная энергия связи, тем устойчивее ядро. Зависимость удельной энергии связи от массового числа приведена на рис. 46.1. Для большинства элементов  $\varepsilon_{\text{уд}} \approx 8 \frac{\text{МэВ}}{\text{нуклон}}$ .

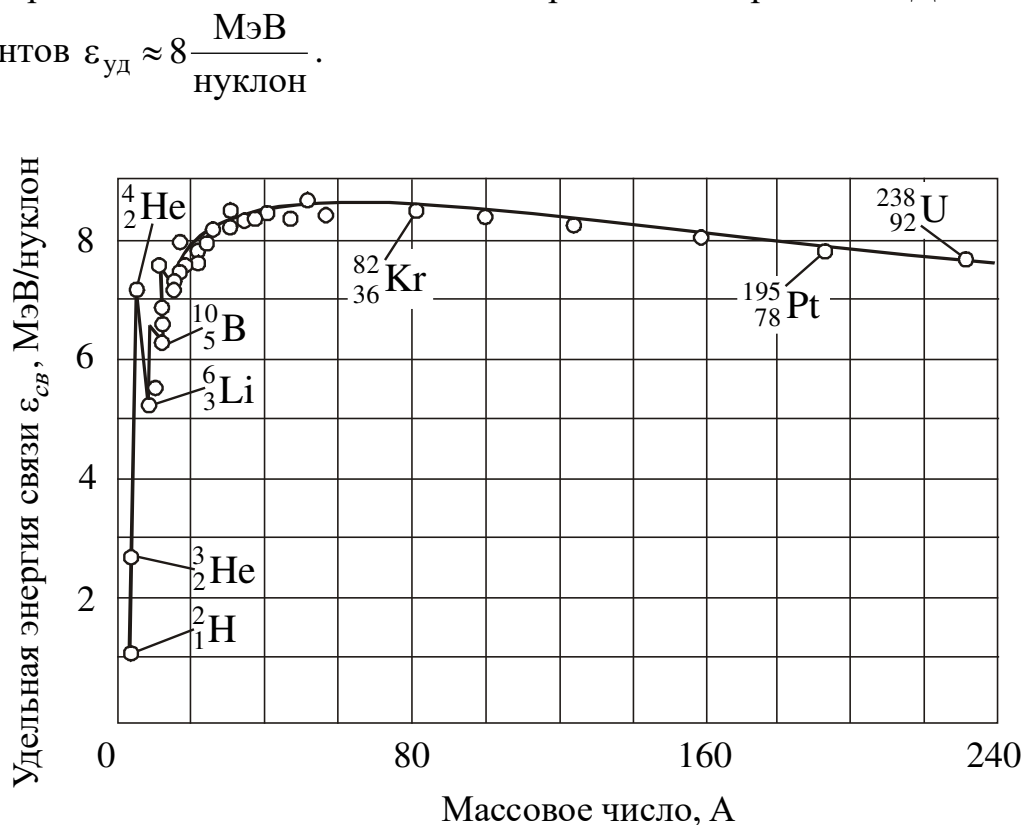


Рисунок 46.1

Наиболее устойчивыми являются ядра средней части таблицы. Легкие или тяжелые ядра менее устойчивы, т.е. энергетически выгодны следующие процессы:

1. Деление тяжелых ядер на более легкие (реакция деления). Реакции деления лежат в основе работы ядерных реакторов и ядерной бомбы.



2. Слияние легких ядер друг с другом в более тяжелые (требуют температуры  $T \sim 10^8$  К, поэтому их называют термоядерными). Происходят в недрах Солнца и звезд. Неуправляемые термоядерные реакции происходят при взрыве водородной бомбы.

Это объясняется тем, что энергия будет выделяться при таких ядерных реакциях, при которых удельная энергия связи продуктов реакции будет превышать удельную энергию связи исходных ядер.

## §47 Ядерные превращения

Существуют два типа ядерных превращений:

- ядерные реакции;
- радиоактивность.

### 47.1 Ядерные реакции

**Ядерные реакции** – превращения атомных ядер при их взаимодействии с элементарными частицами (в том числе и с  $\gamma$ -квантами) или друг с другом.

Символически ядерные реакции записываются в следующем виде:

$$X + \alpha \rightarrow Y + \beta \text{ или } X(\alpha, \beta)Y, \quad (47.1)$$

где  $X$  и  $Y$  – исходное и конечное ядра;

$\alpha$  и  $\beta$  – бомбардирующая и испускаемая в ядерной реакции частица.

В любой ядерной реакции выполняются законы сохранения электрических зарядов и массовых чисел:

**Сумма зарядов ядер и частиц, вступающих в ядерную реакцию, равна сумме зарядов продуктов реакции (ядер и частиц).**

**Сумма массовых чисел ядер и частиц, вступающих в ядерную реакцию, равна сумме массовых чисел продуктов реакции (ядер и частиц).**

Ядерная реакция характеризуется энергией ядерной реакции  $Q$ , равной разности энергий конечной и исходной пар в реакции:

$$Q = (\sum m_i - \sum m_k) \cdot c^2, \quad (47.2)$$

где  $\sum m_i$  – сумма масс частиц до реакции;

$\sum m_k$  – сумма масс частиц после реакции.

Если массы выразить в а.е.м., то энергия ядерной реакции вычисляется в МэВ (мегаэлектрон-вольтах) по формуле:

$$Q = 931,5(\sum m_i - \sum m_k). \quad (47.3)$$

Ядерные реакции могут быть:

- а) экзотермическими (с выделением тепла), при этом  $\sum m_i > \sum m_k$  ( $Q > 0$ );
- б) эндотермическими (с поглощением тепла), при этом  $\sum m_i < \sum m_k$  ( $Q < 0$ ).

## 47.2 Радиоактивность

### 47.2.1 Общие сведения

**Радиоактивность** – явление самопроизвольного (спонтанного) распада ядер, при котором образуется новое ядро, и испускаются частицы.

Ядро, испытывающее распад, называется материнским, возникающее ядро называется дочерним.

Естественная радиоактивность наблюдается в основном у тяжелых ядер, которые располагаются в периодической системе Менделеева за свинцом. Открыто явление Анри Беккерелем в 1896 году.

В зависимости от того, какая частица испускается, различают следующие виды распада:

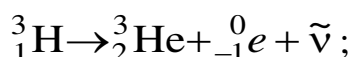
1.  **$\alpha$ -распад** – испускание  $\alpha$ -частицы, т.е. ядер гелия –  ${}^4_2\text{He}$ .

Сущность процесса заключается в вылете из ядра двух протонов и двух нейтронов, связанных в  $\alpha$ -частицу.

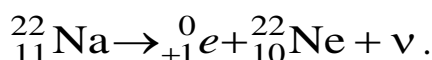


2.  **$\beta$ -распад** – испускание:

а) электронов –  $e^-$  ( $\beta^-$ -распад)

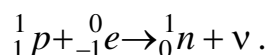


б) позитронов –  $e^+$  ( $\beta^+$ -распад)



Сущность  $\beta$ -распада заключается во взаимном превращении нейтронов и протонов.

в) **K-захват** (электронный захват). Превращение протона в нейтрон идет по схеме

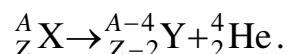


Электронный захват заключается в том, что один из электронов на ближайшем к ядру K-слое атома захватывается ядром. Здесь  $\tilde{\nu}$  и  $\nu$  – электронные нейтрино и антинейтрино.

3. **Гамма-излучение ( $\gamma$ -излучение)** – это жесткое электромагнитное излучение с длиной волны  $\lambda < 10^{-10}$  м. Обладает большой проникающей способностью, так как энергия квантов  $\varepsilon \geq 10^4$  эВ.

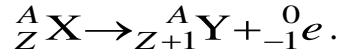
При анализе результатов радиоактивных распадов опытным путём были открыты правила смещения (правила Фаянса и Содди).

1) при  $\alpha$ -распаде:



$\alpha$ -распад уменьшает массовое число на 4, а зарядовое на 2, т.е. дочерний элемент смещается на две клетки влево в таблице Д. И. Менделеева.

2) при  $\beta$ -распаде:



$\beta$ -распад не изменяет массового числа, зарядовое число увеличивает на единицу, т.е. дочерний элемент смещается на 1 клетку вправо.

### 47.2.2 Закон радиоактивного распада

Радиоактивный распад уменьшает с течением времени число нераспавшихся ядер. Самопроизвольный распад ядер подчиняется закону радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (47.4)$$

где  $N_0$  – число ядер в данном объеме вещества в момент времени  $t = 0$ ;

$N$  – число ядер в том же объеме к моменту времени  $t$ ;

$\lambda$  – постоянная распада.

**Постоянная распада**  $\lambda$  – это физическая величина, численно равная доле ядер, распадающихся за единицу времени:

$$\lambda = \frac{dN}{N dt}. \quad (47.5)$$

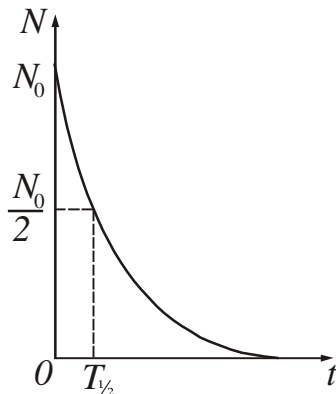
$$[\lambda] = \text{с}^{-1}.$$

Таким образом, постоянная распада определяет скорость радиоактивного распада.

Величина  $\tau = 1/\lambda$  называется **средней продолжительностью жизни** (среднее время жизни) радиоактивного изотопа.

Для оценки устойчивости ядер обычно используют не постоянную распада, а величину, которая называется периодом полураспада.

**Период полураспада** ( $T_{1/2}$ ) – время, в течение которого распадается половина первоначального количества ядер данного радиоактивного вещества (рис. 47.1). Период полураспада может меняться в очень широких пределах (от долей секунд до тысяч лет). Период полураспада и постоянная распада связаны следующим соотношением:



$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (47.6)$$

Рисунок 47.1

Закон самопроизвольного радиоактивного распада основывается на двух предположениях: 1) постоянная распада не зависит от внешних условий; 2) число ядер, распадающихся за время  $dt$  пропорционально начальному количеству ядер  $N_0$ . Это означает, что закон радиоактивного распада является статистическим законом. Статистические за-

коны можно применять только к большому количеству ядер. Закон радиоактивного распада не отвечает на вопрос, какое именно ядро распадется, т.к. все ядра неразличимы и распад данного ядра является случайным событием, имеющим ту или иную вероятность.

Часто бывает, что возникающие в результате радиоактивных превращений ядра в свою очередь оказываются радиоактивными. Новые продукты распада также могут оказаться радиоактивными, т.е. возникает целый ряд радиоактивных превращений. В природе существуют три радиоактивных ряда, родоначальниками которых служат уран ( ${}^{238}_{92}\text{U}$ ), торий ( ${}^{232}_{90}\text{Th}$ ) и актиний ( ${}^{235}_{89}\text{Ac}$ ). Конечным продуктом во всех случаях служат изотопы свинца.

Для исследования радиоактивных изотопов обычно используют препараты. **Препарат** – это определенное количество радиоактивного вещества, специально приготовленного для эксперимента, например, нанесенного на подложку или заключенного в оболочку.

**Активность  $a$  препарата (радиоактивного источника)** – число распадов, происходящих за единицу времени:

$$a = \frac{dN}{dt}. \quad (47.7)$$

$$[a] = 1 \frac{\text{расп}}{\text{с}} = 1 \text{ Бк} \quad (\text{беккерель}).$$

Для измерения активности допускается применение внесистемной единицы – кюри (Ки).

**1 кюри** – активность препарата, в котором происходит  $3,7 \cdot 10^{10}$  распадов в секунду.

$$1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}.$$

Такой активностью обладает 1 г радия.

Активность препарата равна произведению постоянной распада  $\lambda$  на число  $N$  нераспавшихся атомов, содержащихся в этом препарате:

$$a = -\lambda N. \quad (47.8)$$

Знак « $-$ » означает, что активность с течением времени уменьшается.

Заменив  $N$  по формуле (47.4), получим закон изменения активности:

$$a = a_0 e^{-\lambda t}, \quad (47.9)$$

где  $a_0$  – активность в момент времени  $t = 0$ .

**Удельная активность  $a_{\text{уд}}$**  – активность, отнесенная к единице массы вещества.

$$a_{\text{уд}} = \frac{a}{m}. \quad (47.10)$$

$$[a_{\text{уд}}] = 1 \frac{\text{Бк}}{\text{кг}}.$$

### 47.4 Гамма-излучение

Гамма-лучи ( $\gamma$ -лучи) представляют собой коротковолновое электромагнитное излучение. Так как  $\gamma$ -излучение обладает весьма малой длиной волны ( $\lambda \leq 10^{-10}$  м), то, вследствие этого, оно имеет ярко выраженные корпускулярные свойства, то есть является потоком частиц – гамма-квантов.

Испускание  $\gamma$ -квантов не является, как правило, самостоятельным видом излучения. Оно сопровождает  $\alpha$ - и  $\beta$ -распады.

Различают:

- мягкое  $\gamma$ -излучение с энергией квантов  $\varepsilon \sim$  кэВ;
- жесткое  $\gamma$ -излучение с энергией квантов  $\varepsilon \sim$  МэВ.

$\gamma$ -излучение может взаимодействовать с электронной оболочкой атомов и молекул, вызывая их ионизацию, а также с ядрами.

При прохождении  $\gamma$ -лучей через вещество происходит их ослабление. Закон изменения интенсивности  $\gamma$ -излучения подчиняется закону:

$$I = I_0 e^{-\mu x}, \quad (47.12)$$

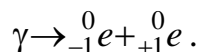
где  $I_0$  – интенсивность  $\gamma$ -излучения, падающего на поверхность вещества;

$\mu$  – коэффициент линейного ослабления  $\gamma$ -лучей в веществе, зависящий от природы вещества и спектрального состава потока  $\gamma$ -излучения;

$x$  – толщина поглощающего слоя.

$\gamma$ -излучение может вызывать в веществе различные процессы:

- 1) фотоэффект (существенное значение имеет для мягкого излучения,  $\varepsilon \sim 10^4 - 10^5$  эВ);
- 2) эффект Комптона ( $\varepsilon \sim 0,5$  МэВ);
- 3) рождение электронно-позитронных пар:



Большая энергия  $\gamma$ -квантов объясняет их высокую проникающую способность, поэтому  $\gamma$ -излучение применяют в следующих областях.

1.  **$\gamma$ -дефектоскопия** – метод обнаружения дефектов в изделии путём просвечивания их  $\gamma$ -лучами. Повреждения обнаруживаются по различной интенсивности  $\gamma$ -лучей, прошедших через исследуемую поверхность. Так исследуют размеры и формы дефектов (трещины, раковины, непроваренные швы и т.д.).
2. **Медицина (онкология)** – лечение злокачественных опухолей.

### § 48 Элементы дозиметрии ионизирующих излучений

Об опасности, возникающей при работе с радиоактивными веществами, рентгеновским излучением и другими источниками ионизирующих излучений известно давно. Первоначально развитие дозиметрии определялось главным образом необходимостью защиты от воздействия рентгеновского и  $\gamma$ -излучения естественных радиоактивных веществ. Защита человека от вредного действия ионизирующих излучений сводится к защите от внешних потоков излучения

(внешнее облучение) и от попадания радиоактивных веществ внутрь организма (внутреннее облучение).

В настоящее время под *дозиметрией* понимают измерения, исследования и теоретические расчёты тех характеристик ионизирующих излучений, от которых зависят радиационные эффекты в облучаемых объектах живой и неживой природы.

1. *Поглощённая доза D* – отношение энергии ионизирующего излучения, поглощённой веществом к массе этого вещества.

$$D = \frac{W}{m}.$$

$$[D] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} = \text{Гр} \quad (\text{грей})$$

Поглощённая энергия расходуется на нагрев вещества и на его химические и физические превращения. Величина дозы зависит от вида излучения, энергии его частиц, плотности их потока и от состава облучаемого вещества. При прочих равных условиях доза тем больше, чем больше время облучения, то есть доза накапливается со временем.

Широко распространена внесистемная единица дозы – рад (от англ. radiation absorbed dose).

$$1 \text{ рад} = 0,01 \text{ Гр}.$$

2. *Мощность поглощенной дозы N* – доза, отнесенная к единице времени.

$$N = \frac{D}{t},$$

Мощность дозы измеряется в Гр/с.

$$[N] = \text{Гр/с}.$$

3. *Экспозиционная доза излучения D<sub>Э</sub>* – доза рентгеновского и  $\gamma$ -излучения, определяемая по ионизации воздуха. Она определяется как отношение суммарного заряда всех ионов одного знака  $\sum Q$ , созданных в единице объёма воздуха, к массе воздуха  $\Delta m$  в этом объёме:

$$D_{\text{Э}} = \frac{\sum Q}{\Delta m}.$$

Единица экспозиционной дозы в СИ – Кл/кг.

$$[D_{\text{Э}}] = \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}.$$

Экспозиционная доза в 1 Кл/кг означает, что суммарный заряд всех ионов одного знака, образованных в 1 кг воздуха, равен 1 Кл.

Внесистемной единицей экспозиционной дозы является рентген (Р):  $1 \text{ Р} = 2,57976 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/кг}$ , что соответствует образованию  $2,08 \cdot 10^9$  пар ионов в  $1 \text{ см}^3$  воздуха (при  $0^\circ\text{C}$  и 760 мм рт. ст.)

4. **Эквивалентная доза  $H$**  – оценивается по биологическому воздействию ионизирующего излучения. При облучении живых организмов, в частности человека, возникают биологические эффекты, величина которых при одной и той же поглощённой дозе различна для разных видов излучения. Таким образом, знание поглощённой дозы недостаточно для оценки радиационной опасности. Принято сравнивать биологические эффекты, вызываемые любыми ионизирующими излучениями, с эффектами от рентгеновского и  $\gamma$ -излучения. Коэффициент, показывающий, во сколько раз радиационная опасность в случае хронического облучения человека (в сравнительно малых дозах) для данного вида излучения выше, чем рентгеновского излучения при одинаковой поглощённой дозе, называется коэффициентом качества излучения ( $K$ ). Для рентгеновского и  $\gamma$ -излучения  $K=1$ . Для всех других ионизирующих излучений  $K$  устанавливается на основании радиобиологических данных. Все эти величины используются при установлении норм радиационной безопасности.

**Эквивалентная доза  $H$**  определяется как произведение поглощённой дозы на коэффициент качества излучения  $H=DK$ . Эквивалентная доза может измеряться в тех же единицах, что и поглощённая.

Существует специальная единица эквивалентной дозы – бэр (биологический эквивалент рентгена). Эквивалентная доза в 1 бэр соответствует поглощённой дозе в 1 рад при  $K=1$ . Единица эквивалентной дозы СИ – зиверт (Зв).

$$1 \text{ Зв} = 100 \text{ бэр}$$

Радиационный контроль и измерение доз осуществляется дозиметрическими приборами. **Дозиметрические приборы** (дозиметры) – это устройства для измерения доз ионизирующих излучений и их мощностей. Основными частями дозиметрических приборов являются детектор и измерительное устройство. В зависимости от типа детектора дозиметры делятся на:

- ионизационные (с ионизационной камерой, пропорциональными счётчиками или счётчиками Гейгера);
- радиолюминесцентные (сцинтилляционные, термо- и фотолюминесцентные);
- полупроводниковые;
- фотографические;
- химические;
- калориметрические.

Существуют дозиметрические приборы для измерения одного вида излучения (например, нейтронные дозиметрические приборы,  $\gamma$ -дозиметры и др.), а также дозиметры для измерения в полях смешанного излучения.