Оптимизация в задачах математического моделирования

Любой исследуемый объект или процесс характеризуется своими *конкретными параметрами* (размерами, свойствами, показателями). При математическом моделировании их обычно записывают в виде вектора

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Эти параметры всегда бывают связанными между собой и зависят друг от друга. Взаимозависимости между параметрами описываются разнообразными *уравнениями*, а требования на отдельные показатели объекта задаются *неравенствами и функциональными зависимостями*.

При проектировании рабочего узла конкретного объекта, или при организации и управления производственным процессом, нас интересует *наилучший вариант* решения проблемы. Показатель, который характеризует качество выполнения задачи, называется *целевой функцией или критерием оптимальности*. Общая задача оптимизации формулируется следующим образом: подобрать переменным $x_1, x_2, \cdots, x_n$ такие значения, которые обеспечивают экстремум целевой функции.

На языке математики задача оптимизации записывается так:

найти $$\max(\min) \quad f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad (1)$$

при условиях $$\begin{cases} \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_j, & j = \overline{1,k} \\ \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le (\ge)\, b_j, & j = \overline{k+1,m} \end{cases} \qquad (2)$$

Если целевая функция (1) и система ограничений (2) линейны, то задача оптимизации (1)-(2) называется *задачей линейного программирования* (ЗЛП).

Общая задача линейного программирования (ЗЛП) формулируется следующим образом: найти экстремум (максимум или минимум) линейной целевой функции *n* переменных

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min),$$

удовлетворяющие системе линейных ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \,(\le, =, \ge)\, b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \,(\le, =, \ge)\, b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \,(\le, =, \ge)\, b_m, \end{cases}$$

где коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$; $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – заданные числа, а величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные. Каждое из ограничений системы может содержать один из трех возможных знаков: $\le, =, \ge$.

Систему ограничений вида неравенств всегда можно свести к ограничениям типа равенств с помощью дополнительных переменных. Тогда, задачу линейного программирования можно представить в *канонической* форме:

найти $\min \; f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

при условиях $\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j,$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

В задачах линейного программирования случай нахождения $\max \; f(x)$ отдельно не выделяется, т.к. он сводится к нахождению $\min[-f(x)]$, причем

$$\max f(x) = -\min[-f(x)].$$

Универсальным методом решения задач линейного программирования является *симплекс-метод*, на основе которого лежит многократное решение системы линейных алгебраических уравнений. Простейшие двухмерные задачи линейного программирования могут быть решены графическим способом.

Пример 1. Сельскохозяйственное предприятие может приобрести тракторы марок M_1 и M_2 для выполнения работ P_1, P_2 и P_3. Производительность тракторов при выполнении указанных работ, общий объем работ, и стоимость каждого трактора приведены в таблице.

Вид работ	Объем работ, га	Производительность трактора марки	
		M_1	M_2
P_1	60	4	3
P_2	40	8	1
P_3	30	1	3
Стоимость трактора, ден. ед.		7	2

Найти такой оптимальный вариант приобретения тракторов, обеспечивающий выполнение всего комплекса работ, чтобы затраты на технику были минимальными.

Решение.

Для составления математической модели обозначим:

x_1 - число тракторов марки M_1;

x_2 - число тракторов марки M_2.

Принимая во внимание значения, приведенные в таблице 1, получаем систему ограничений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 60, \\ 8x_1 + x_2 \geq 40, \\ x_1 + 3x_2 \geq 30. \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Общую стоимость техники можно выразить в виде линейной функции $f(x) = 7x_1 + 2x_2$.

Стандартная математическая модель задачи:

необходимо найти значения x_1 и x_2, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 60, \\ 8x_1 + x_2 \geq 40, \\ x_1 + 3x_2 \geq 30. \end{cases}$$

условиям $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, при которых линейная функция $f(x) = 7x_1 + 2x_2$ принимает минимальное значение.

Пример 2. Хозяйству требуется не более 6 шт. двухтонных и не более 4 шт. пятитонных автомашин. На приобретение машин у хозяйства имеется 40 у.е., а стоимость одной машины равна 5 у.е. и 8 у.е. соответственно. Сколько следует приобрести машин каждой марки, чтобы их суммарная грузоподъемность была максимальной?

Решение.

Для составления математической модели обозначим:

x_1 - количество двухтонных машин;

x_2 - количество пятитонных машин.

Учитывая условие задачи, получаем систему ограничений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \leq 40, \\ x_1 \leq 6, \\ .x_2 \leq 4 \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Суммарную грузоподъемность машин можно выразить в виде линейной функции $f(x) = 2x_1 + 5x_2$.

Стандартная математическая модель задачи:

$$f(x) = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \leq 40, \\ x_1 \leq 6, \\ .x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$

Решим ЗЛП геометрическим способом.

Для построения прямой $5x_1 + 8x_2 = 40$ определим точки пересечения ее с осями координат, то есть для данной прямой имеем таблицу значений:

x_1	0	8
x_2	5	0

Возьмем точку (0; 0) и подставим в неравенство $5x_1 + 8x_2 \le 40$, получим $0 \le 40$ - неравенство выполняется $\Rightarrow$ данному неравенству соответствует нижняя полуплоскость, содержащая точку (0; 0).

Построим прямые $x_1 = 6$ и $x_2 = 4$.

Неравенство $x_1 \le 6$ геометрически определяет полуплоскость, лежащую левее граничной прямой $x_1 = 6$. Решением неравенства $x_2 \le 4$ является нижняя полуплоскость с граничной прямой $x_2 = 4$.

Решением неравенств $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ является I четверть плоскости X_1OX_2.

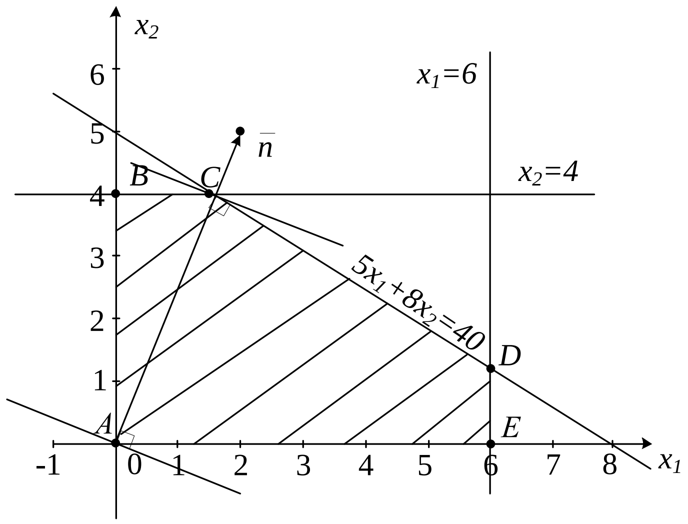


Рисунок 1.4 – Область допустимых решений системы неравенств

Выпуклый пятиугольник *ABCDE*, имеющий пять угловые точки *A*(0; 0), *B*(0; 4), *C*(1,6; 4), *D*(6; 1,33) является областью допустимых решений системы неравенств (рис. 1.4).

Построим вектор-градиент $\bar{n} = (2;5)$ и прямую $2x_1 + 5x_2 = 0$, она будет проходить через начало координат перпендикулярно вектору $\bar{n} = (2;5)$. Перемещая линию уровня по направлению вектора $\bar{n}$, получим, что на пятиугольнике решений максимальное значение линейной формы будет достигнуто в угловой точке *C*(1,6; 4):

$$F_{\max} = 2 \cdot 1{,}6 + 5 \cdot 4 = 23{,}2.$$

Так как по смыслу задачи переменные x_1 и x_2 – количество машин, следовательно, они должны быть целочисленные, то линию уровня передвигаем назад до нахождения ближайшей целой точки (1; 4):

$$F_{\max} = 2\cdot 1 + 5\cdot 4 = 22.$$

Таким образом, для того, чтобы суммарная грузоподъемность машин была максимальной, хозяйству следует приобрести 1 двухтонную машину и 4 пятитонных машин. Любой другой вариант приобретения машин дает меньшую суммарную грузоподъёмность.

Транспортная задача

Формулировка транспортной задачи:

Пусть имеется ***m*** пунктов $A_1, A_2, \ldots, A_m$, в которых имеются запасы груза в количестве $a_1, a_2, \ldots, a_m$ единиц. Кроме того имеется ***n*** пунктов назначения $B_1, B_2, \ldots, B_n$, подавших заявки на $b_1, b_2, \ldots, b_n$ единиц товара соответственно.

Стоимость c_{ij} перевозок единицы груза из пункта A_i в пункт B_j называют истинным тарифом. Эти тарифы даны в виде таблицы

	B_1	B_2	…	B_n	Запасы a_i
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_{mn}
Заявки b_j	b_1	b_2	…	b_n	

Требуется установить такие объемы перевозок x_{ij} от каждого поставщика к каждому потребителю, чтобы суммарные затраты на перевозки были минимальными и потребности всех потребителей были удовлетворены.

Математическая постановка задачи.

Общая затрата на перевозки определяется как сумма затрат по всем возможным маршрутам. Суммарные затраты должны быть минимальными:

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} \to \min.$$

По условиям задачи

1)все грузы должны быть вывезены:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m, \end{cases};$$

2) потребности всех потребителей должны быть удовлетворены:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n, \end{cases}.$$

Кроме того, обратные перевозки исключаются:

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4).$$

Пример 3. Пусть у транспортной задачи исходные данные представлены в таблице:

Поставщики	Портребители				Запасы
	1	2	3	4	
1	5	3	4	2	500
2	1	7	8	10	700
3	4	5	6	9	400
Спрос потребителя	600	200	450	350	1600

Математическая модель этой задачи имеет вид:
найти минимум

$$f(\bar{x}) = 5x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 2x_{14} + x_{21} + 7x_{22} + \\ + 8x_{23} + 10x_{24} + 4x_{31} + 5x_{32} + 6x_{33} + 9x_{34},$$

при условиях

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 500,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 700,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 400,$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 600,$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 200,$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 450,$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 350,$$
$$x_{ij} \geq 0, \quad (i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4).$$

Пример 4. Задача об оптимальном использовании земельных участков

Имеются пять участков земли для посева: 1) ржи, 2) пшеницы, 3) ячменя, 4)кукурузы. Площади участков соответственно равны 270, 250, 200, 350, 430 га. Стоимость центнера зерна соответствующих культур равны z_1=5, z_2=8, z_3 =7, z_4=3 единиц. Урожайность культур (ц/га) на соответствующих участках земли представлена матрицей $D = \{d_{ij}\}$:

$$D=\begin{pmatrix} 25 & 20 & 22 & 23 & 20 \\ 21 & 22 & 20 & 25 & 23 \\ 14 & 16 & 18 & 21 & 15 \\ 40 & 50 & 46 & 42 & 48 \end{pmatrix}.$$

Требуется определить, сколько гектаров земли засеять каждой из культур на каждом участке земли, чтобы суммарная стоимость собранного зерна была максимальной, если известно, что из-за ограниченности в семенном фонде можно засеять рожью, пшеницей, ячменем и кукурузой соответственно 200, 500, 350 и 450 га.

Математическая постановка задачи.

Обозначим через x_{ij} – количества гектаров засеянной i-ой культурой земли на j-ом участке. Суммарный вес собранного зерна в центнерах может быть вычислен по формуле

$$f(\bar{x})=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} d_{ij}x_{ij}.$$

Так как стоимости центнера зерна выращиваемых культур известны, урожайность можно характеризовать в единицах руб/га. Значения стоимостей центнера зерна посеянных культур запишем в виде диагональной матрицы S с элементами

$$s_{ij}=\begin{cases} z_i, & i=j; \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

При этом урожайность культур на соответствующих участках земли в измерении «руб/га» может быть представлена матрицей C, полученной умножением матрицу D на матрицу S слева

$$C=\begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} \end{pmatrix}.$$

Тогда суммарная стоимость собранного зерна в рублях вычисляется по формуле

$$F(\bar{x})=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij}.$$

Таким образом, математическая модель задачи примет следующий стандартный вид:

найти максимум

$$\begin{aligned} F(\bar{x}) = {} & c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+c_{14}x_{14}+c_{15}x_{15}+ \\ & +c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+c_{23}x_{23}+c_{24}x_{24}+c_{25}x_{25}+ \\ & +c_{31}x_{31}+c_{32}x_{32}+c_{33}x_{33}+c_{34}x_{34}+c_{35}x_{35}+ \\ & +c_{41}x_{41}+c_{42}x_{42}+c_{43}x_{43}+c_{44}x_{44}+c_{45}x_{45}, \end{aligned}$$

при условиях

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=200,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=500,$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=350,$$

$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}=450,$$
$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=270,$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=250,$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=200,$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=350,$$
$$x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}=430,$$
$$x_{ij}\geq 0, \quad (i=\overline{1,4};\ j=\overline{1,5}).$$

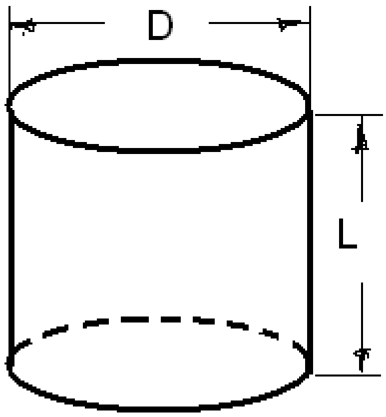
Для численной реализации однокритериальных задач существует большое количество программ, которые доступны через Интернет. В стандартных программных пакетах офисного назначения, как правило, такая программа присутствует в составе *электронной таблицы*. В электронной таблице EXCEL оно называется надстройкой **Поиск решения**, которая вызывается из пункта главного меню **Данные**.

Если в пункте Данные надстройка Поиск решения отсутствует, то ее следует активизировать. Для этого перейти по адресу Кнопка “**Office**” → **Параметры** EXCEL → **Надстройки** → **Перейти** и поставит галочку напротив **Поиск решения**.

Нелинейные задачи

Если среди функций имеется хотя бы одна нелинейная функция, то (1)-(2) называется задачей нелинейного программирования (НЛП).

Пример 5. Оптимальное проектирование емкости



Постановка задачи

Необходимо определить высоту (L) и диаметр (D) цилиндрической емкости заданного объема (V), при которых суммарные затраты на ее изготовление будут минимальными .

Стоимость емкости складывается из стоимостей площадей обечайки и двух днищ. Она может быть вычислена из следующего выражения

$$f = c_s \pi DL + c_t \pi D^2 / 2, \qquad (1)$$

где c_s, c_t – стоимости изготовления единицы поверхности обечайки и днища, соответственно;

Задача оптимального проектирования емкости записывается в виде:

$$\min_{D,L} f \qquad (2)$$

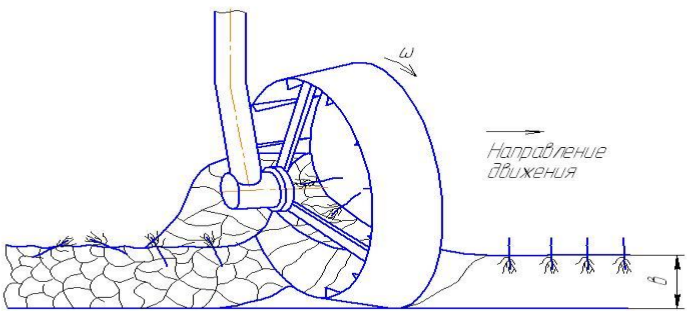
При ограничениях: $V = (\pi D^2 / 4)L, D \geq 0, L \geq 0$ (3)

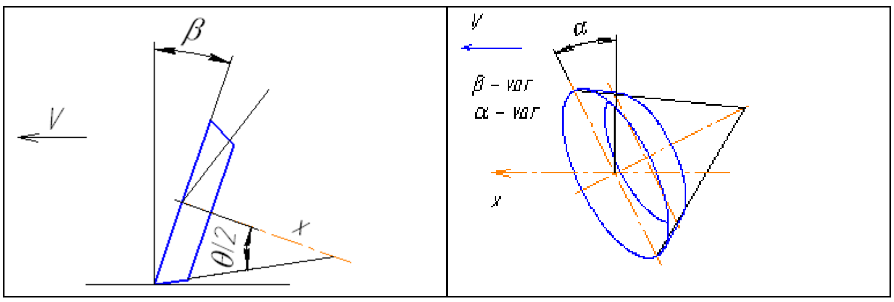
Задача (1)-(3) – является нелинейной условной задачей

Для решения задач нелинейного программирования используют различные итерационные процедуры поиска оптимума, поскольку для них прямых методов не существуют. Эти итерационные процедуры, как правило, предназначены для решения безусловных задач *(метод градиентов, метод покоординатного спуска, метод наискорейшего спуска*). Условные задачи предварительно сводятся, например, при помощи штрафных функций, к задачам безусловной оптимизации.

Когда исследуемый объект или процесс характеризуется несколькими целевыми функциями, возникает многокритериальная задача. Многокритериальные задачи очень разнообразны по содержанию, по объему и качеству информации. Считается, что до сих пор нет приемлемой классификации многокритериальных задач и подходов к их решению.

Например, рассмотрим **ротационный конический рабочий орган**, предназначенный для поверхностной мульчирующей обработки почвы





После проведения опытов была решена задача идентификации. Для величины тягового усилия установлена зависимость

$$F = 169{,}67 - 2{,}61\alpha - 3{,}91\beta + 0{,}031\alpha\beta + 0{,}022\alpha^2 + 0{,}046\beta^2 .$$

Для скорости вращения:

$$\omega = -4{,}97 + 0{,}32\alpha + 0{,}129\beta + 0{,}0004\alpha\beta - 0{,}0038\alpha^2 - 0{,}0024\beta^2 .$$

Расчет рациональных параметров эксплуатации ротационного конического почвообрабатывающего рабочего органа сводится к решению следующей двухкритериальной задачи оптимизации:

найти

$$\min F(\alpha,\beta) = 169{,}67 - 2{,}61\alpha - 3{,}91\beta + 0{,}031\alpha\beta + 0{,}022\alpha^2 + 0{,}046\beta^2 ,$$

$$\max \omega(\alpha,\beta) = -4{,}97 + 0{,}32\alpha + 0{,}129\beta + 0{,}0004\alpha\beta - 0{,}0038\alpha^2 - 0{,}0024\beta^2 .$$

при ограничениях

$$20 \le \alpha \le 50 ,$$
$$20 \le \beta \le 45 .$$

Целевые функции, как правило, *бывают противоречивыми* и поэтому многокритериальная задача не имеет единственного решения. Решение ищется в виде некоторого **компромиссного варианта**, то есть наилучшей альтернативы.

Рассмотренную двухкритериальную задачу можно свести к однокритериальной, если в качестве целевой функции принять отношения построенных критериев

$$\Phi(\alpha,\beta) = \frac{F(\alpha,\beta)}{\omega(\alpha,\beta)}$$

Тогда получим следующую однокритериальную задачу

Найти

$$\min \Phi(\alpha,\beta) = (169{,}67 - 2{,}61\alpha - 3{,}91\beta + 0{,}031\alpha\beta + 0{,}022\alpha^2 + 0{,}046\beta^2) / (-4{,}97 + 0{,}32\alpha + 0{,}129\beta + 0{,}0004\alpha\beta - 0{,}0038\alpha^2 - 0{,}0024\beta^2) ,$$

при ограничениях

$$\alpha \ge 20 ,$$
$$\alpha \le 50 ,$$
$$\beta \ge 20 ,$$
$$\beta \le 45 .$$

Основываясь на различных определениях наилучшей альтернативы, можно провести некоторую классификацию известных процедур решения многокритериальных задач. В качестве основных можно привести следующие два подхода:

1. Построение множества оптимальных по Парето альтернатив и выбор из этого множества альтернативы наиболее предпочтительный с точки зрения лица, принимающего решения (ЛПР).

2. Априорные процедуры (сведение многокритериальной задачи к однокритериальной с помощью компромисса и решающих правил).