

**Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Казанский государственный аграрный университет**

Институт механизации и технического сервиса

Кафедра физики и математики

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Методические указания

для аспирантов направления подготовки 35.06.04 –
«Технологии, средства механизации и энергетическое оборудо-
вание в сельском, лесном и рыбном хозяйстве» и магистран-
тов направления подготовки 35.04.06 – «Агроинженерия»

Казань, 2019

УДК
ББК

Авторы-составители: Ибяттов Р.И., Киселева Н.Г.,
Зиннатуллина А.Н.

Рецензенты:

Шайхутдинов Р.Р. – к.т.н., доцент кафедры
«Эксплуатация и ремонт машин»

Шамсиев М.Н. – д.т.н., ведущий научный сотрудник
ИММ ФИЦ КазНЦ РАН

Математическое моделирование: методические указания / Р.И. Ибяттов, Н.Г. Киселева, А.Н. Зиннатуллина – Казань: Изд-во Казанского ГАУ, 2019. – с.

Данные методические указания предназначены для аспирантов, обучающихся по направлению подготовки 35.06.04 – «Технологии, средства механизации и энергетическое оборудование в сельском, лесном и рыбном хозяйстве» и магистрантов направления подготовки 35.04.06 – «Агроинженерия».

В методических указаниях рассмотрены многочисленные примеры, в которых показаны методы построения математических моделей с помощью дифференциальных уравнений.

Методические указания «Математическое моделирование» обсуждены и рекомендованы к изданию на заседании кафедры физики и математики Казанского ГАУ протокол № от . .2019г.

УДК
ББК

© Казанский государственный аграрный университет, 2019 г.

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальное уравнение является одним из основных математических понятий при моделировании состояний разнообразных объектов или процессов. Дифференциальное уравнение, полученное в результате исследования какого-либо реального объекта или процесса, называется его *дифференциальной моделью*. При этом необходимо отметить, что существуют различные типы самих дифференциальных моделей.

Дифференциальными называются уравнения, в которых неизвестная функция входит вместе со своими производными или дифференциалами. Если в уравнение входят неизвестные функции одной переменной, то уравнение называется *обыкновенным*. Если неизвестной является функция нескольких переменных и неизвестная функция входит в уравнение вместе со своими частными производными, то уравнение называется *уравнением с частными производными*. *Порядком дифференциального уравнения* называется наивысший порядок производной, входящей в уравнение.

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке ее в это уравнение обращает его в тождество. Поскольку производная от постоянной величины равна нулю, решение дифференциального уравнения определяется с точностью до некоторой константы. Количество таких констант определяется порядком дифференциального уравнения. Иными словами, дифференциальное уравнение задает семейство интегральных кривых (поверхностей) на заданной области. Для выделения однозначно определенной интегральной кривой (поверхности) необходимо задавать дополнительные условия. Дополнительные условия обычно

называют либо граничными (краевыми), либо начальными условиями.

Дополнительное условие называется *граничным (краевым) условием*, если оно задает численное значение искомой функции или ее производных в определенных точках. Дополнительное условие называется *начальным условием*, если дифференциальное уравнение используется для описания динамических процессов, то есть процессов, происходящих во времени.

Для решения дифференциальных уравнений с учетом заданных дополнительных условий применяются различные подходы. В некоторых случаях удается решить дифференциальное уравнение в, так называемой, замкнутой форме (в квадратурах), то есть представить решение в виде *аналитической формулы*, использующей конечное число простейших операций над элементарными функциями. Иногда удается построить приближенное решение в виде бесконечного ряда. К сожалению, они позволяют получить аналитические или приближенные решения только для относительно несложных математических моделей в узком диапазоне значений параметров.

В настоящее время практически для любого вида дифференциальных уравнений имеются подходящие численные методы, которые реализуются на вычислительных машинах. При *численном подходе* совокупность математических соотношений модели заменяется конечномерным аналогом. Это достигается дискретизацией исходных соотношений, то есть переходом от функций непрерывного аргумента к функциям дискретного аргумента.

Целью данных методических указаний является оказание помощи аспирантам и магистрантам в получении компетенций

по составлению математических моделей. На многочисленных примерах показаны методы построения математических моделей с помощью дифференциальных уравнений для объектов и процессов разного характера. Методы решения дифференциальных уравнений, за исключением нескольких простейших примеров, не рассматриваются.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Моделью называется искусственный, созданный человеком новый объект любой природы, отражающий главные, наиболее существенные свойства оригинала.

Модель нужна для того, чтобы:

- 1) понять как устроен конкретный объект;
- 2) определять наилучшие способы управления объектом при заданных целях и критериях;
- 3) прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект.

Модели делятся на материальные и идеальные. Материальные модели представляют собой некоторые материальные аналоги, отражающие основные характеристики данного объекта. Идеальные модели всегда имеют теоретический характер. Одним из видов идеального моделирования является математическое моделирование.

Математическим моделированием называется моделирование, при котором описание объекта осуществляется на языке математики, а исследование модели проводится с использованием математических методов.

При математическом моделировании имеют дело с тремя компонентами – входными данными, математическим описанием объекта и выходными данными. Как правило, необходимо знать или предположить известными два из вышеперечисленных компонентов и, следовательно, возникают три разновидности задач.

Прямая задача. Известны входные данные и набор уравнений, описывающий поведение объекта. Требуется найти отклик математической модели на входные воздействия.

Обратная задача. Задан набор уравнений и известен отклик математической модели объекта. Необходимо определить вектор входных воздействий, соответствующих данному отклику.

Задача идентификации. Заданы совокупности входных и соответствующих выходных показатели, необходимо построить адекватное математическое описание изучаемого объекта. Подобная проблема возникает при обработке результатов экспериментальных исследований.

Действия, связанных с математическим моделированием объекта, можно представить в виде нескольких взаимосвязанных этапов:

- 1) анализ изучаемого объекта с целью выявления наиболее существенных параметров и связей между ними (концептуальная постановка задачи);
- 2) составление математического описания изучаемого объекта;
- 3) выбор метода решения уравнений математического описания и реализации вычислительного эксперимента;

4) установление соответствия результатов вычислительного эксперимента поведению реального объекта, то есть проверка адекватности математической модели.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Моделирование процесса остывания образца

В лабораторной установке, где проводятся долговременные опыты, должна поддерживаться постоянная температура образца, равная 65 градусов. Дежурный обнаружил, что лабораторная установка отключена и температура образца упала до 41 градуса. Через два часа температура опустилась еще на восемь градусов. Требуется установить время отключения установки, если в комнате поддерживается постоянная температура $a=25^{\circ}\text{C}$.

Согласно закону излучения тепла скорость охлаждения предметов в воздухе пропорциональна разности между температурой предмета и температурой воздуха. Следовательно, если в момент времени t температура воздуха составляла x градусов, то через малый промежуток времени Δt температура составит $x(t + \Delta t) = x(t) + k(x - a)\Delta t$ градусов, где k – положительный коэффициент пропорциональности.

Построенную зависимость перепишем в виде:

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = k(x - a).$$

Отсюда, после предельного перехода $\Delta t \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dx}{dt} = k(x-a),$$

которое описывает изменения температуры по времени.

Проинтегрируем полученное уравнение:

$$\ln(x-a) = -kt + C.$$

Постоянную интегрирования C определим из начального условия $x = x_0$ при $t = 0$, где x_0 – температура образца в момент времени $t = 0$. Тогда $C = \ln(x_0 - a)$. Итак, математическая модель процесса остывания образца имеет вид:

$$\ln \frac{x-a}{x_0-a} = -kt. \quad (1)$$

Предположим, что поломка отопителя произошла в момент времени $t = 0$. Тогда, воспользовавшись имеющимися данными, из соотношения (1) получим коэффициент пропорциональности

$$k = -\frac{1}{2} \ln \frac{33-25}{41-25} = 0,30103.$$

Далее, подставляя в формулу (1) полученное значение k и значение $x=65$, находим:

$$t = -\frac{1}{0,301} \ln \frac{41-25}{65-25} = -1,32.$$

Таким образом, между моментом отключения лабораторной установки и временем обнаружения аварии прошел 1 час и 19 минут.

2.2. Моделирование полета частицы

Рассмотрим полет тела (рис. 1), брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью V_0 . Движение происходит в поле силы тяжести с постоянным ускорением свободного падения g с учетом сопротивления воздуха [2].

Массовая сила состоит из постоянной силы тяжести mg и силы сопротивления воздуха. При небольших скоростях сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна скорости тела

$$\vec{F} = -k\vec{V},$$

где k – коэффициент сопротивления, зависящий от свойств среды и формы тела.

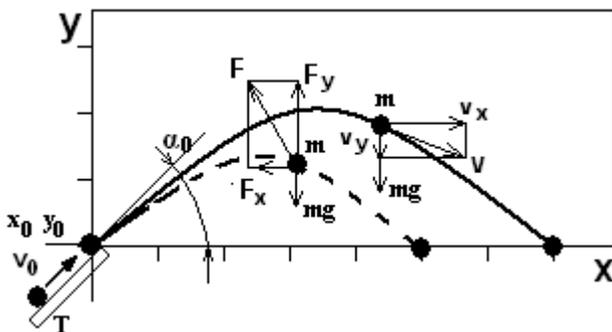


Рисунок 1 – Схема полета зерна

Для тела в форме шара коэффициент сопротивления определяется по формуле Стокса:

$$k = 6\pi\mu R,$$

где μ – динамическая вязкость среды, R – радиус шара. Для несферических тел параметр k умножается на коэффициент формы.

При больших скоростях используется квадратичная зависимость силы сопротивления:

$$\vec{F} = -k_1\vec{V} - k_2|V|\vec{V}.$$

Под действием массовых сил происходит изменение скорости тела:

$$m\bar{V}(t + \Delta t) = m\bar{V}(t) + \bar{F}\Delta t .$$

Отсюда, после предельного перехода $\Delta t \rightarrow 0$, получим следующее векторное уравнение движения

$$m \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F} . \quad (2)$$

В проекциях на оси декартовой системы координат уравнения движения имеют вид

$$m \frac{dV_x}{dt} = -F_x , \quad (3)$$

$$m \frac{dV_y}{dt} = -F_y - mg . \quad (4)$$

Дополним систему (3)-(4) уравнениями траектории полета

$$\frac{dx}{dt} = V_x , \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dt} = V_y , \quad (6)$$

которые получаются из соотношений для перемещений

$$x(t + \Delta t) = x(t) + V_x \Delta t ,$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + V_y \Delta t ,$$

после предельного перехода $\Delta t \rightarrow 0$.

Для решения системы уравнений (3)-(6) необходимо задавать начальные условия при $t = 0$. Пусть в момент броска положение тела определяется координатами x_0 и y_0 . Тогда начальные условия имеют вид:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad V_x = V_0 \cos \alpha, \quad V_y = V_0 \sin \alpha . \quad (7)$$

Таким образом, расчет траектории полета частицы сводится к решению системы дифференциальных уравнений (3)-(6) с начальными условиями (7).

2.3. Моделирование прогиба балки под действием внешних сил

Рассмотрим горизонтально расположенную балку постоянного поперечного сечения. Предположим, что под влиянием сил, которые действуют на балку в вертикальной плоскости, балка прогибается. Действующие силы могут быть обусловлены весом балки, внешне приложенной нагрузкой или как той, так и другой силами вместе [3].

Существуют различные типы балок в зависимости от способов их крепления или опоры. Например, на рис. 2а изображена балка, у которой левый конец жестко закреплен, а второй конец свободен. Такая балка называется *консольной балкой*. На рис. 2б показана балка, лежащая свободно на двух опорах.

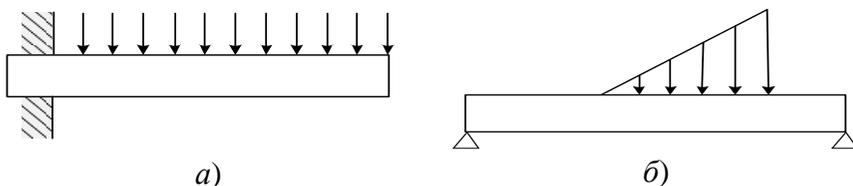


Рисунок 2 – Способы крепления балок и схемы приложений нагрузок

Существуют различные способы приложения внешних нагрузок. Например, на рис. 2а показана равномерно распределенная нагрузка. На рис. 2б показана переменная нагрузка,

действующая в некоторой части балки. Нагрузка может быть сосредоточенной или комбинированной.

Обозначим через $M(x)$ изгибающий момент вертикальном поперечном сечении балки с координатой x . Изгибающий момент определяется как алгебраическая сумма моментов тех сил, которые действуют с одной стороны балки в положении x . Изгибающий момент в положении x связан с радиусом кривизны упругой линии соотношением:

$$EJ \frac{y''}{\sqrt{(1+(y')^2)^3}} = M(x), \quad (8)$$

где E – модуль упругости Юнга, который зависит от материала, J – момент инерции поперечного сечения балки в положении x относительно горизонтальной прямой, проходящей через центр тяжести этого поперечного сечения.

Произведение EJ обычно называют *жесткостью при изгибе*.

На практике допускаются небольшие прогибы конструкции, когда угол наклона упругой линии относительно горизонта φ мало. Тогда угловой коэффициент упругой линии $y' = tg \varphi$ будет очень мал, и поэтому вместо уравнения (8) можно рассматривать приближенное уравнение

$$EJy'' = M(x).$$

Трудоемкость решения последнего уравнения зависит от вида функции изгибающего момента $M(x)$. В простейших случаях крепления балки и способа приложения внешней нагрузки оно решается аналитически.

Рассмотрим простой случай (рис. 3). Пусть горизонтальная однородная балка длиной L свободно лежит на двух опорах и прогибается под действием собственного веса, равного p

кг на единицу длины. Требуется найти уравнение упругой линии и максимальный прогиб балки.

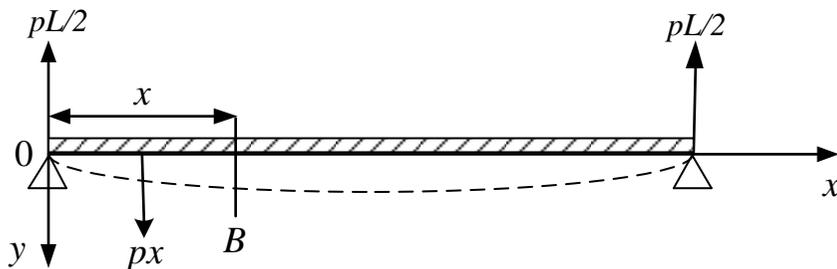


Рисунок 3 – Схема прогиба балки

Поскольку балка является двухопорной, то каждая из опор создает направленную вверх реакцию, равную $pL/2$ (половине веса балки). Изгибающий момент $M(x)$ есть алгебраическая сумма моментов этих сил, действующих на балку с одной стороны от точки B .

Рассмотрим действие сил слева от точки B . На расстоянии x от точки B сила $pL/2$ действует на балку снизу вверх и создает отрицательный момент. Сила же px , которая действует на балку сверху вниз на расстоянии $x/2$ от точки B , создает положительный момент. Следовательно, суммарный изгибающий момент в точке B задается формулой

$$M(x) = -pLx/2 + px^2/2.$$

Тогда уравнение (7) принимает вид

$$EJy'' = -pLx/2 + px^2/2.$$

Данное уравнение легко интегрируется аналитически

$$EJy = -pLx^3/12 + px^4/2 + C_1x + C_2.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из граничных условий:

$$y = 0 \text{ при } x = 0,$$

$y=0$ при $x=L$.

Тогда, уравнение упругой линии запишется в виде:

$$y = \frac{P}{24EJ}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x).$$

Максимальный прогиб находится на середине балки. Не трудно установить, что при $x=L/2$ максимальный прогиб равен $5pL^4/(384EJ)$.

При комбинированной (нелинейной) действующей силы определение изгибающего момента становится трудоемкой задачей. Как правило, изгибающий момент аналитическими формулами не представляется и определяется как решение дифференциального уравнения второго порядка. Итак, в общем случае, расчет прогиба при изгибе балки сводится к интегрированию системы двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$EJ \frac{d^2y}{dz^2} = -M_x, \quad (9)$$

$$\frac{d^2M_x}{dz^2} = -q_y(z), \quad (10)$$

при соответствующих граничных условиях. Здесь q_y - приведенная распределенная нагрузка к оси бруса; J - осевой момент инерции площади поперечного сечения относительно оси x .

Условия закрепления балки учитываются через граничные условия. Предположим, что балка шарнирно оперта на концах z_0 и z_n . Тогда для крайних сечений балки ставятся условия отсутствия прогиба y и изгибающего момента M_x :

$$y = 0, \quad M_x = 0 \quad \text{при} \quad z = z_0 \quad (11)$$

$$y = 0, \quad M_x = 0 \quad \text{при} \quad z = z_n. \quad (12)$$

Задача сводится к численному решению краевой задачи (8)-(12).

Пусть теперь балка жестко закреплена одним концом. Тогда граничные условия задаются в виде отсутствия прогиба и угла наклона в месте закрепления:

$$y = 0, \quad \frac{dy}{dz} = 0 \quad \text{при} \quad z = z_0. \quad (13)$$

Для свободного конца балки задаются условия отсутствия изгибающего момента и его изменения

$$M_x = 0, \quad \frac{dM_x}{dz} = 0 \quad \text{при} \quad z = z_n. \quad (14)$$

В этом случае решается краевая задача (8)-(9),(13)-(14).

2.4. Математическое моделирование процесса протравливания семян зерновых культур

Рассмотрим работу пневмомеханического протравливателя, предназначенного для обработки защитно-стимулирующими препаратами семян зерновых культур перед посевом [4]. Предварительная камера протравливания пневмомеханического протравливателя представляет собой горизонтальный трубопровод, перпендикулярно присоединенный к выгрузному патрубку бункера-дозатора семян.

В установленном режиме работы через предварительную камеру протравливания с постоянным расходом движется воздух. В воздушный поток дозировано подаются семена и в мелкодисперсном виде впрыскивается рабочая жидкость. Далее смесь семян и мелкодисперсных частиц поступает в основную камеру протравливания. При совместном движении в воздушном потоке внутри предварительной камеры происхо-

дит обволакивание семян мелкодисперсными частицами рабочей жидкости. Чем больше семян будет обволакиваться рабочей жидкостью в предварительной камере, тем выше будут полнота и равномерность протравливания.

Рассмотрим процесс совместного движения смеси семян и мелкодисперсных частиц рабочей жидкости в воздушном потоке (рис. 4).

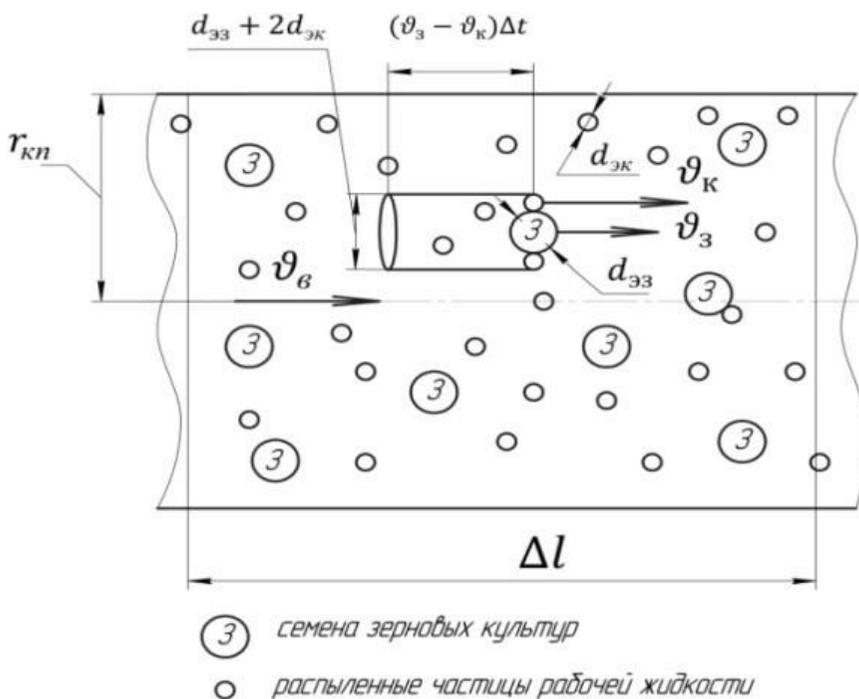


Рисунок 4 – К моделированию процесса протравливания

Осевую скорость воздуха в начальном сечении обозначим $U_в$. Осевые скорости семян и распыленных частиц рабочей жидкости в зоне подачи в предварительную камеру равны нулю. Под действием движущегося воздуха они начинают

набирать скорость и разгоняются до своих асимптотических значений, зависящих от коэффициентов парусности.

Движение семян и распыленных частиц рабочей жидкости в воздушном потоке можно описать с помощью дифференциального уравнения вида (2). Если для учета силы сопротивления воздуха использовать квадратичную зависимость, то для каждой дисперсной фазы можно записать следующие дифференциальные уравнения [5]:

$$m_3 \frac{dU_3}{dt} = \frac{k_3 S_3 \rho_в}{2} |U_в - U_3| \cdot (U_в - U_3), \quad (15)$$

$$m_K \frac{dU_K}{dt} = \frac{k_K S_K \rho_в}{2} |U_в - U_K| \cdot (U_в - U_K), \quad (16)$$

где m_3 , m_K – соответственно, массы семян и распыленных частиц рабочей жидкости, кг; U_3 , U_K , $U_в$ – соответственно, скорости зерна, распыленных частиц рабочей жидкости и воздуха, м/с; t – время движения, с; k_3 , k_K – коэффициенты сопротивления семян и распыленных частиц; S_3 , S_K – миделево сечения зерна и распыленных частиц рабочей жидкости, м²; $\rho_в$ – плотность воздуха, кг/м³.

Массы и площади миделево сечения семян и распыленных частиц определяются по следующим формулам через их эквивалентные диаметры:

$$S_3 = \frac{\pi d_{\text{ЭЗ}}^2}{4}, \quad S_K = \frac{\pi d_{\text{ЭК}}^2}{4},$$

$$m_3 = \frac{\pi d_{\text{ЭЗ}}^3}{6} \rho_3, \quad m_K = \frac{\pi d_{\text{ЭК}}^3}{6} \rho_K,$$

где $d_{эз}$, $d_{эс}$ – соответственно, эквивалентные диаметры семян и распыленных частиц, м; $\rho_з$, $\rho_к$ – соответственно, плотности семян и распыленных частиц, кг/м³.

После перехода к эквивалентным диаметрам зерна и распыленных частиц рабочей жидкости, а также с учетом того, что скорость воздушного потока больше скорости зерна и капель, уравнения (15) и (16) примут следующий вид:

$$\frac{dU_з}{dt} = \frac{4}{3} k_з \frac{\rho_б}{\rho_з d_{эз}} (U_б - U_з)^2, \quad (17)$$

$$\frac{dU_к}{dt} = \frac{4}{3} k_к \frac{\rho_б}{\rho_к d_{эк}} (U_б - U_к)^2. \quad (18)$$

При решении уравнений (17) и (18) скорость воздушного потока считается известной. Однако она не является постоянной. Для определения изменения скоростей воздушно-зернового потока запишем интегральное уравнение сохранения материального баланса среды:

$$\int_0^{r_{кп}} 2\pi r_{кп} \mu_б \rho_б U_б dr_{кп} + \int_0^{r_{кп}} 2\pi r_{кп} \mu_з \rho_з U_з dr_{кп} + \int_0^{r_{кп}} 2\pi r_{кп} \mu_к \rho_к U_к dr_{кп} = Q, \quad (19)$$

где Q – сумма массовых расходов воздуха, семян и распыленных частиц рабочей жидкости; $r_{кп}$ – радиус предварительной камеры протравливания, м; $\mu_б$, $\mu_з$, $\mu_к$ – объемные концентрации воздуха, семян и распыленных частиц рабочей жидкости, кг/м³.

После вычисления интегралов уравнение (19) примет вид:

$$\pi r_{кп}^2 \mu_б \rho_б U_б + \pi r_{кп}^2 \mu_з \rho_з U_з + \pi r_{кп}^2 \mu_к \rho_к U_к = Q.$$

Отсюда получим следующую формулу для определения скорости воздушного потока:

$$U_{\text{в}} = \frac{Q}{\pi r_{\text{кп}}^2 \mu_{\text{в}} \rho_{\text{в}}} - \frac{\mu_{\text{з}} \rho_{\text{з}}}{\mu_{\text{в}} \rho_{\text{в}}} U_{\text{з}} - \frac{\mu_{\text{к}} \rho_{\text{к}}}{\mu_{\text{в}} \rho_{\text{в}}} U_{\text{к}}. \quad (20)$$

Рассматриваемый поток представляет собой гетерогенную среду с двумя дисперсными фазами. При их столкновении происходит осаждение мелкодисперсных частиц рабочей жидкости на поверхность семян. Поэтому концентрация распыленных частиц $\mu_{\text{к}}$ является переменной величиной, которая убывает по времени, то есть уменьшается.

Величину уменьшаемой концентрации распыленных частиц $\sigma(t)$ за время dt можно представить как

$$\sigma(t) = \mu_{\text{к}}(t) - \mu_{\text{к}}(t + \Delta t).$$

Объем и вес осажденных частиц рабочей жидкости будут учитываться в характеристиках твердой фазы и воздушного потока по следующему соотношению

$$\rho_{\text{з}}(t + \Delta t) = \mu_{\text{з}} \rho_{\text{з}} + \sigma(t) \rho_{\text{к}}.$$

Уменьшение вязкости воздуха можно не учитывать из-за незначительности.

Для проведения дальнейших теоретических исследований необходимо определить общие объемы семян и распыленных частиц рабочей жидкости в рабочей зоне предварительной камеры протравливания.

Общий объем распыленных частиц рабочей жидкости на рабочем участке камеры протравливания длиной Δl (рис. 4) составляет:

$$V_{\text{ок}}(t) = \pi r_{\text{кп}}^2 \Delta l \mu_{\text{к}}(t). \quad (21)$$

Вычислим количество распыленных частиц рабочей жидкости на рассматриваемом участке:

$$N_{OK}(t) = \frac{V_{OK}(t)}{V_K}.$$

Подобные формулы можно записать для общего объема и количества семян в рассматриваемом участке:

$$\begin{aligned} V_{O3}(t) &= \pi r_{kn}^2 \Delta l \mu_3(t), \\ N_{O3}(t) &= \frac{V_{O3}(t)}{V_3}. \end{aligned} \quad (22)$$

Рассмотрим фронтальный обдув одного зерна потоком воздуха и распыленных частиц рабочей жидкости (рис. 4). За время Δt об зерновку ударяются все частицы рабочей жидкости, находящиеся в элементарном цилиндре диаметром $d_{\varepsilon 3} + 2d_{\varepsilon K}$ и длиной $(U_3 - U_K)\Delta t$, объем которого равен:

$$V_u = \frac{\pi}{4} (d_{\varepsilon 3} + 2d_{\varepsilon K})^2 \cdot (V_3 - V_K) \Delta t.$$

Вычислим количество частиц рабочей жидкости в элементарном цилиндре, осаждаемых на одно зерно:

$$n(t) = \frac{3(d_{\varepsilon 3} + 2d_{\varepsilon K})^2 \cdot (U_3 - U_K) \Delta t \mu_K}{2d_{\varepsilon K}^3}.$$

Объем рабочей жидкости V_{PK} , осаждаемой в виде капель на поверхности зерна за время Δt на участке Δl рабочей зоны камеры протравливания, определяется следующим образом:

$$V_{PK}(t) = \frac{\pi (d_{\varepsilon 3} + 2d_{\varepsilon K})^2}{4} \cdot (U_3 - U_K) \Delta t \mu_K N_{O3}(t). \quad (23)$$

Запишем условие сохранения количества рабочей жидкости на участке предварительной камеры протравливания длиной Δl :

$$V_{OK}(t + \Delta t) - V_{OK}(t) = V_{PK}(t).$$

Отсюда, с учетом формул (21), (22) и (23) после подстановки и сокращений получим:

$$\mu_k(t + \Delta t) - \mu_k(t) = \frac{3(d_{эз} + 2d_{эк})^2}{2} (U_з - U_к) \Delta t \mu_k \frac{\mu_з}{d_{эз}^3}.$$

Далее, используя формулу определения производной

$$\mu'_k = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mu_k(t + \Delta t) - \mu_k(t)}{\Delta t},$$

получим следующее дифференциальное уравнение для вычисления изменения средней концентрации капель рабочей жидкости во времени:

$$\frac{d\mu_k}{dt} = \frac{3(d_{эз} + 2d_{эк})^2}{2d_{эз}^3} |U_з - U_к| \mu_k \mu_з. \quad (24)$$

Уравнения (17), (18) и (24) решаются численно при начальных условиях

$$t = 0: U_з = 0; U_к = 0; \mu_k = \mu_k^H, \quad (25)$$

где μ_k^H – концентрация частиц рабочей жидкости в момент впрыска в камеру протравливания. Так как скорость воздушного потока не является постоянной, то при каждом шаге численного интегрирования скорость воздушного потока уточняется по формуле (20).

Полученные уравнения (17), (18), (24), а также начальные условия (25) представляют собой математическую модель процесса протравливания семян зерновых культур в предварительной камере пневмомеханического протравливателя.

2.5. Математическое моделирование траектории зерна в рабочем пространстве пневмомеханического шелушителя

Рассмотрим работу пневмомеханического шелушителя зерновых культур. Основным рабочим органом шелушения зерна является лопастной диск, который вращается внутри закрытой сверху цилиндрической поверхности (деки). На вращающийся диск подается зерновой материал, который разгоняется и выбрасывается в направлении рабочей поверхности (деки), при ударе о которую происходит шелушение (рис. 5). Дека может быть неподвижна, а может иметь обратное вращение вокруг лопастного диска [6].

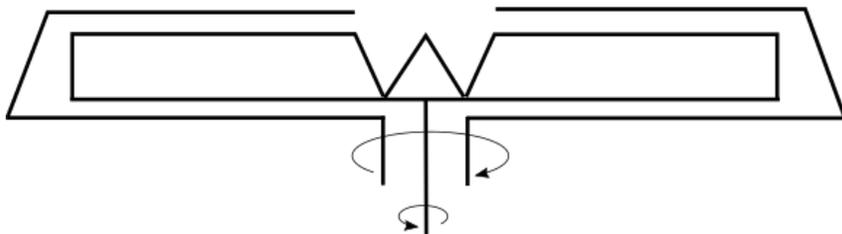


Рисунок 5 – Схема пневмомеханического шелушителя с вращающейся декой

Конструкция деки заметно ограничивает приток воздуха в рабочую зону аппарата. Поэтому можно считать, что между ротором и декой тангенциальная компонента скорости потока W_θ преобладает над остальными составляющими. Тогда осесимметричное стационарное движение воздушного потока может быть описано формулой [5]:

$$W_\theta(r) = \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{\omega_2 R_2^2}{r} + \frac{R_2^2 - r^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{\omega_1 R_1^2}{r}. \quad (26)$$

Несложно проверить, что данная зависимость соответствует граничным условиям $W(R_1) = \omega_1 R_1$ и $W(R_2) = \omega_2 R_2$, а при $\omega = \omega_1 = \omega_2$ дает формулу $W_6 = \omega r$.

Скорость потока в радиальном направлении меняется от максимального значения V_0 у кромки диска до нуля на стенке деки. Ее можно представить в виде функции:

$$V_6 = V_0 f\left(\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1}\right).$$

Если приток воздуха в рабочую зону аппарата контролируется и его объем q_0 известен, то среднюю скорость у кромки вращающегося диска можно вычислить по формуле:

$$V_0 = \frac{q_0}{2\pi R_1 h}.$$

Свободный полет зерна после ее срыва с ротора можно считать горизонтальным из-за достаточно большой скорости и малой рабочей зоны $R_2 - R_1$. Осаждение зерна вниз под действием сил гравитации и движения воздушного потока не большое, его влияние на время полета и эффективность шелушения можно пренебречь. Тогда математическую модель движения зерна можно строить в двухмерной постановке.

Движение зерна в кольцевой щели после отрыва с ротора можно описать с помощью следующих дифференциальных уравнений:

$$\frac{dW_3}{dt} = K_n |W_6 - W_3| (W_6 - W_3), \quad (27)$$

$$\frac{dV_3}{dt} = -K_n (V_6 - V_3)^2, \quad (28)$$

где $K_n = 3c_{\mu} \rho_6 / 4d\rho_3$ – коэффициент парусности зерна.

Наличие обозначения модуля относительной скорости в уравнении (27) продиктовано необходимостью правильного учета аэродинамической силы сопротивления при изменении направлений движения воздушного потока и частицы зерна в тангенциальном направлении.

По известным скоростям можно определить траекторию движения зерна в цилиндрической системе координат. Построим уравнения траектории движения зерна. Изменение координаты зерновки за время Δt в тангенциальном направлении составит $AC = W_3 \Delta t$ (рис. 6). Из треугольника OAC определим тангенс элементарного угла $\Delta\varphi$:

$$\operatorname{tg} \Delta\varphi = \frac{W_3 \Delta t}{r}.$$

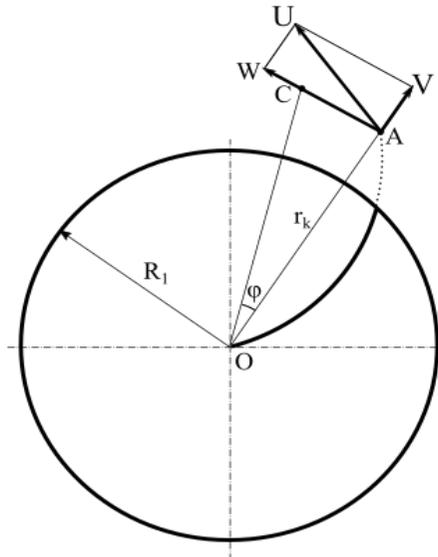


Рисунок 6 – К выводу уравнения траектории

Поскольку $\frac{\operatorname{tg} \Delta \varphi}{\Delta t} \rightarrow \frac{d\varphi}{dt}$ при $\Delta t \rightarrow 0$, из последнего соотношения получим уравнения перемещения зерновки по тангенциальному направлению

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{W_3}{r}. \quad (29)$$

Перемещение частицы в сторону деки по радиальному направлению является следствием двух скоростей - V_3 и W_3 . Вклад радиальной составляющей скорости является тривиальным:

$$\Delta r = V_3 \Delta t.$$

Отсюда, при $\Delta t \rightarrow 0$, получим:

$$\frac{dr}{dt} = V_3, \quad (30)$$

Движение зерновки в тангенциальном направлении сопровождается ее удалением от центра вращения. Для определения вклада тангенциальной составляющей скорости на перемещение частицы по радиальному направлению воспользуемся треугольником OAC (рис. 6). Пусть текущая радиальная координата зерновки равна $r_k = OA$. Из решения прямоугольного треугольника следует, что при повороте радиус-вектора r_k на угол φ , длина текущего радиуса увеличится до значения

$$r = \frac{r_k}{\cos \varphi}. \quad (31)$$

Найдем производную от функции r по переменной φ :

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r_k \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}. \quad (32)$$

Так как,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

для определения вклада тангенциальной составляющей скорости, с учетом уравнения (29) при $r = r_k$ и зависимости (32), получим

$$\frac{dr}{dt} = \frac{W_3 \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}. \quad (33)$$

Перемещения, вызванные радиальными и тангенциальными составляющими скоростей, складываются. Поэтому, с учетом (30) и (33), можно записать

$$\frac{dr}{dt} = V_3 + \frac{W_3 \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}. \quad (34)$$

Используя значения радиальной координаты $r_{k+1} = OC$, полученного в результате очередного шага, можно составлять новое соотношение вида (31) и соответствующие дифференциальные уравнения (32)-(34). Это означает, что движение зерновки в радиальном направлении описывается дифференциальным уравнением (34).

Таким образом, расчет траектории зерновки в области между ротором и декой сводится к решению системы дифференциальных уравнений (27)-(29), (34) при начальных условиях:

$$t = 0: \quad r = R_1, \varphi = \varphi_n, W_3 = W_{3n}, V_3 = V_{3n}. \quad (35)$$

3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Многие задачи механики и физики приводят к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка [7]. Например, процессы распространения тепла в однородном изотопном теле описываются *уравнением теплопроводности*:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right).$$

Для плоского двухмерного случая уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right),$$

а в одномерном случае:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (36)$$

Вывод последнего уравнения покажем в параграфе 3.1.

При рассмотрении устанавливающегося теплового состояния в однородном изотропном теле мы приходим к *уравнению Пуассона*:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -f(x, y, z), \quad (37)$$

где функция $f(x, y, z)$ характеризует свойства источника тепла.

При отсутствии источников тепла внутри тела уравнение (37) переходит в *уравнение Лапласа*:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Уравнения Пуассона или Лапласа позволяют моделировать и другие объекты самого разного характера. Например, как будет показано в параграфе 3.2, уравнение Пуассона при $f(x, y, z) = -2G\theta$, где G – модуль сдвига, θ – относительный угол закручивания, будет описывать упруго-деформированное состояние стержня при кручении.

Покажем, что к решению уравнения Лапласа сводится расчет установившегося движения несжимаемой жидкости. Пусть движение жидкости невихревое, то есть потенциальное. Тогда скорость $\bar{V}(x, y, z)$ есть потенциальный вектор

$$\bar{V} = -grad \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \bar{k} \right).$$

Для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности имеет вид

$$div \bar{V} = 0.$$

Дивергенция векторной функции $\bar{V}(x, y, z) = (V_x \bar{i} + V_y \bar{j} + V_z \bar{k})$ есть скалярная функция, определяемая следующим образом:

$$div \bar{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}.$$

Подставляя сюда выражение для скорости, получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

То есть потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа. Потенциалы поля тяготения и стационарного электрического поля также удовлетворяют уравнению Лапласа, в

котором отсутствуют массы и соответственно электрические заряды.

При изучении различных видов волн – упругих, звуковых, электромагнитных, а также других колебательных явлений мы приходим к *волновому уравнению*:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right),$$

где c – скорость распространения волны в данной среде.

В одномерном случае волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Данное уравнение описывает свободные колебания струны. Здесь $U(x, t)$ – смещение точек струны в момент времени t от положения равновесия. Коэффициент в правой части $a = \sqrt{T_0/\rho}$, где T_0 – натяжение струны, ρ – плотность.

Аналогичным уравнением описываются свободные продольные колебания стержня. В этом случае $a = \sqrt{E/\rho}$, где E – модуль упругости материала стержня, ρ – плотность.

Вынужденные колебания струн и стержней описываются уравнением вида:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + g(x, y).$$

Функция $g(x, y)$ учитывает влияния внешних или массовых сил.

Крутильное колебание однородного стержня так же описывается подобным уравнением:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2},$$

где $\Theta(x, t)$ угол поворота сечения x в момент времени t . В этом случае коэффициент в правой части вычисляется по формуле $a = \sqrt{GJ/K}$, где G – модуль сдвига материала стержня, J – полярный момент инерции, K – момент инерции единицы стержня.

3.1. Моделирование процесса теплопроводности

Покажем вывод уравнения теплопроводности (36) для однородного стержня. Если нагреть один из концов металлического стержня, то другой конец через некоторое время тоже нагреется. Скорость нагрева зависит от материала, размеров стержня и других факторов.

Рассмотрим линейный и однородный стержень, боковая поверхность которого теплоизолирована [8]. Тогда распределение температуры в стержне характеризуется продольной координатой x . Температура, кроме того, может меняться по времени t , следовательно, она является функцией двух переменных $u(x, t)$.

Построим уравнение, описывающее процесс изменения температуры в стержне. Выбираем некоторую точку x_0 и выделим около нее малый участок стержня длиной Δx (рис. 7). Изменение количества тепла в избранном участке стержня за счет притока и (или) оттока его через два сечения приведет к нагреванию или охлаждению этого участка в соответствии с его теплоемкостью. Выразим тепловой баланс математическим языком.

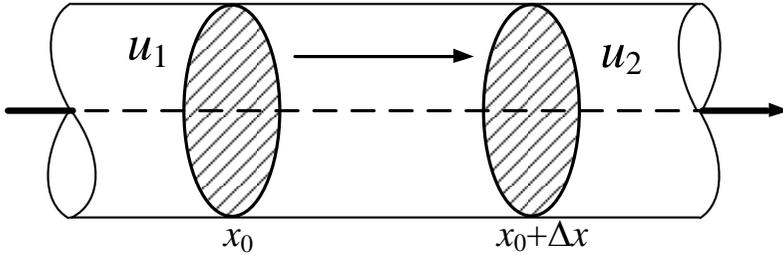


Рисунок 7 – Поток тепла через участок стержня длиной Δx .

Количество тепла, проходящее через поперечное сечение стержня в точке x_0 за время Δt , пропорционально площади поперечного сечения S , градиенту температуры $\partial U/\partial t$ и промежутку времени Δt : $\Delta Q \approx S \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \Delta t$.

Градиент температуры задает скорость притока тепла. Поток тепла через некоторый участок стержня длиной Δx тем больше, чем больше разность температуры $(u_1 - u_2)$ на его концах и чем меньше расстояние Δx :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1 - u_2}{\Delta x}.$$

Способность материала передавать тепло называется коэффициентом теплопроводности. В таблице 1 приведены значения коэффициента теплопроводности для некоторых материалов в единицах системы СИ: Вт/(м·К). Коэффициент теплопроводности обозначается через k и участвует в уравнение теплового баланса как коэффициент пропорциональности.

Таблица 1 – Значения коэффициентов теплопроводности материалов

Медь	384	Лед (0 ⁰ С)	2,23	Асбест	0,4 – 0,8
Алюминий	209	Бетон	0,2 – 0,7	Дерево	0,1 – 0,2
Сталь	47	Кирпич	0,7	Воздух	0,034

Итак, количество тепла проходящее через поперечное сечение стержня в точке x_0 за время Δt равно:

$$\Delta Q|_{x=x_0} = kS \cdot \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=x_0} \cdot \Delta t. \quad (38)$$

Теперь запишем количество тепла, проходящее через сечение в точке $x = x_0 + \Delta x$:

$$\Delta Q|_{x=x_0+\Delta x} = kS \cdot \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=x_0+\Delta x} \cdot \Delta t. \quad (39)$$

Выразим градиент температуры в точке $x = x_0 + \Delta x$ через составляющие градиента в сечении $x = x_0$. Воспользуемся формулой разложения функции $y(x)$ в ряд Тейлора в точке X_0 , ограничиваясь первым порядком приращения Δx :

$$y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=x_0} \cdot \Delta x. \quad (40)$$

Разложим функцию $\partial U / \partial x$ в ряд Тейлора согласно формуле (40):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_0+\Delta x} \approx \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_0} + \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right|_{x=x_0} \cdot \Delta x.$$

Тогда с учетом (39) имеем

$$\Delta Q|_{x=x_0+\Delta x} = K \cdot S \left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_0} + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_0} \cdot \Delta x \right) \Delta t. \quad (41)$$

Если через сечения $x = x_0$ и $x = x_0 + \Delta x$ за время Δt прошло разное количество тепла, то та его часть, которая пошла на нагревание этого участка стержня, определяется как разность

$$\Delta Q = \Delta Q|_{x=x_0+\Delta x} - \Delta Q|_{x=x_0}.$$

Тогда с учетом формул (38) и (41) получим:

$$\Delta Q = kS \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_0} \cdot \Delta x \cdot \Delta t.$$

Пусть за время Δt температура участка изменилась на величину Δu . Тогда

$$\Delta Q = mC\Delta u$$

где m – масса, C – удельная теплоемкость. Приравниваем два выражения для ΔQ :

$$mC\Delta u = kS \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=x_0} \cdot \Delta x \Delta t. \quad (42)$$

Поскольку массу можно представить через плотность ρ как $m = \rho S \Delta x$, то, поделив на обе части уравнения на $\rho \Delta x \Delta t$ имеем:

$$\rho C \frac{\Delta u}{\Delta t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Поскольку $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}$, после предельного перехода $\Delta t \rightarrow 0$ окончательно получим:

$$\rho C \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (43)$$

В уравнении (46) удобно объединить три постоянные, характеризующие материал стержня, в одну $a = k/(\rho C)$. Тогда уравнение (43) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (44)$$

где $a = k/(\rho C)$ называется коэффициентом температуропроводности. Уравнение (44) является основным уравнением теплопроводности для однородного стержня.

Аналогично, можно получить уравнение теплопроводности для плоского двухмерного и трехмерного случаев, которые приведены выше.

Эти уравнения описывают процесс изменения температуры тела во времени и в пространстве. Ясно, что для отслеживания такого процесса надо знать распределение температуры в теле в начальный момент времени.

$$u(x, 0) = u|_{t=0} = f(x), \quad (45)$$

где $f(x)$ - заданная функция.

Кроме того, в тех местах, где возможен теплообмен с окружающей средой, надо знать условия этого теплообмена. Для стержня теплоизолированной боковой поверхностью такими местами являются концы. Тогда на концах стержня задаются граничные (краевые) условия.

Рассмотрим тепловой поток в одномерном стержне длиной L и предположим, что на концах стержня каким-то образом обеспечивается изменение температуры по законам $g_1(t)$ и $g_2(t)$. Тогда граничные условия для уравнения (44) имеют вид

$$U(0,t) = g_1(t), \tag{46}$$

$$U(L,t) = g_2(t)$$

Теперь предположим, что концы теплоизолированного стержня соприкасаются с другими средами, например, омываются потоками воздуха или жидкости (рис. 8) с температурами $g_1(t)$ и $g_2(t)$.

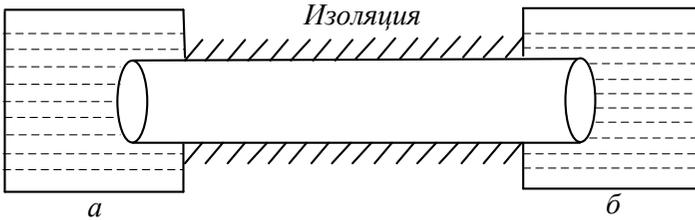


Рисунок 8 – Конвективный теплообмен через границы:

а – жидкость при температуре $g_1(t)$;

б – жидкость при температуре $g_2(t)$.

В этом случае мы не можем считать граничные температуры стержня такими же, как у жидкости. На концах стержня тепло будет втекать (или вытекать) в стержень со скоростью, пропорциональной разности температур. Количества тепла, проходящих через концы стержня определяются как:

$$h[U(0,t) - g_1(t)]$$

$$h[U(L,t) - g_2(t)]$$

где h - коэффициент теплообмена, который показывает, сколько калорий протекает через границу за одну секунду при разности температур в один градус.

Вытекающий поток равен числу калорий, проходящих через конец стержня в одну секунду. Отметим, что вытекающий поток тепла будет положителен на том конце стержня, где температура стержня выше температуры окружающей среды.

С другой стороны, тепло, которое проходит через концы стержня, должно транспортироваться во внутрь стержня с учетом теплопроводности материала. Согласно закону Фурье, поток тепла, проходящий через границу и транспортируемый по стержню, пропорционален нормальной производной температуры

$k \frac{\partial U}{\partial x}$. Здесь коэффициент пропорциональности k называется *коэффициентом теплопроводности* материала, который служит мерой того, как хорошо материал проводит тепла.

Производная $\partial U / \partial x$ может показывать изменения температуры в направлениях как внешней, так и внутренней нормали, в зависимости от выбора направления осей системы координат. Если температура возрастает в направлении внешней нормали к границе, то поток будет втекать в рассматриваемый стержень. И наоборот, если температура возрастает в направлении внутренней нормали, то тепло будет вытекать из стержня.

Итак, искомые граничные условия для задачи, изображенной на рис. 8, имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(0,t)}{\partial x} &= \frac{h}{k} [U(0,t) - g_1(t)], \\ \frac{\partial U(L,t)}{\partial x} &= \frac{h}{k} [U(L,t) - g_2(t)]. \end{aligned} \quad (47)$$

Предположим, что кроме диффузии тепла вдоль стержня имеет место теплообмен через боковую поверхность стержня. Теплообмен через боковую поверхность пропорционален раз-

ности температур боковой поверхности и окружающей среды U_0 . Поэтому уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta(U - U_0). \quad (48)$$

Когда коэффициент пропорциональности $\beta > 0$, уравнение (48) описывает отток тепла, при $\beta < 0$ описывает приток тепла. Если коэффициент β велик по сравнению с a , то приток тепла вдоль стержня будет мал по сравнению с потоком через боковую поверхность. Тогда уравнение теплопроводности упрощается

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\beta(U - U_0).$$

С помощью уравнения (48), также, можно описать процесс изменения концентрации субстанции в химической реакции. Пусть через U обозначена концентрация субстанции. Тогда уравнение (48) означает, что скорость изменения $\partial U / \partial t$ количества субстанции зависит как от диффузии $a \partial^2 U / \partial x^2$, так и от возникновения ($\beta < 0$) или распада ($\beta > 0$) субстанции в химической реакции и пропорциональна разности между двумя концентрациями U и U_0 .

3.2. Моделирование кручения прямолинейного стержня

Рассматривается однородный стержень произвольного поперечного сечения, скручиваемый крутящим моментом M_k (рис. 9).

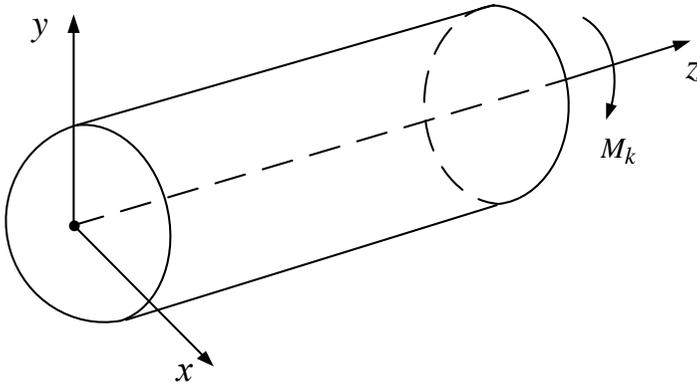


Рисунок 9 – Кручение однородного стержня

Пусть один конец бруса удерживается неподвижным, а некоторое поперечное сечение поворачивается вокруг оси Oz на некоторый угол φ . Естественно предположить, что угол φ пропорционален расстоянию z рассматриваемого сечения до неподвижного основания, то есть $\varphi = \theta z$. Здесь θ - постоянная, которая измеряет угол взаимного поворота поперечных сечений, отстоящих друг от друга на единицу длины. Угол θ называется относительным углом закручивания и определяется по формуле

$$\theta = \frac{M_k}{GI_k}, \quad (49)$$

где I_k – пока еще неизвестный момент инерции при кручении,

G – модуль сдвига материала стержня.

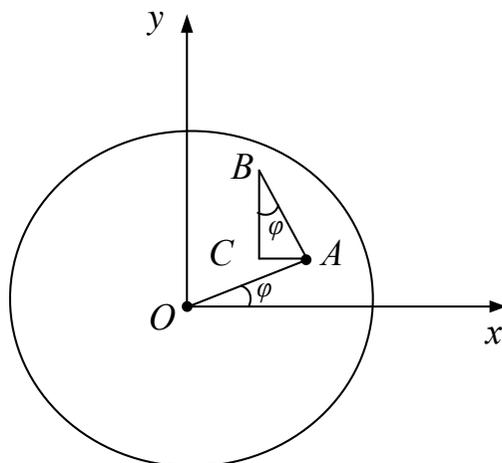


Рисунок 10 – К определению компонентов перемещений

Пусть при повороте некоторого поперечного сечения на угол φ произвольная точка A , находящаяся на расстоянии r от центра кручения, смещается на величину $AB = w = \varphi r$ (рис.10). Разложим смещение w на составляющие, параллельные осям Ox и Oy

$$w_x = -w \sin \varphi,$$

$$w_y = w \cos \varphi.$$

Поскольку $\sin \varphi = \frac{y}{r}$, $\cos \varphi = \frac{x}{r}$, а также принимая во внимание формулу $w = \theta_z r$, для определения компонентов перемещений получим:

$$w_x = -\theta_z y, \quad w_y = \theta_z x. \quad (50)$$

При кручении некруглого стержня сечения не остаются плоскими, а искривляются [9]. Для однородных стержней все

сечения искривляются одинаково, поэтому перемещения по осевому направлению представим в виде

$$w_z = \theta\psi(x, y), \quad (51)$$

где $\psi(x, y)$ – некоторая функция от x, y , подлежащая определению.

Компоненты касательных напряжений, с учетом (50)-(51), определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \tau_{x,y} &= G \left(\frac{\partial W_x}{\partial y} + \frac{\partial W_y}{\partial x} \right) = 0; \\ \tau_{x,z} &= G \left(\frac{\partial W_z}{\partial x} + \frac{\partial W_x}{\partial z} \right) = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) = 0; \\ \tau_{y,z} &= G \left(\frac{\partial W_z}{\partial y} + \frac{\partial W_y}{\partial z} \right) = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Ввиду отсутствия при кручении стержня нормальных компонентов напряжения уравнения равновесия записываются в виде [8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{x,z}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{y,z}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{x,z}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{y,z}}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Первые два из этих уравнений уже удовлетворяются, так как τ_{xz} и τ_{yz} , определяемые уравнениями, не зависят от z . Третье уравнение означает, что τ_{xz} и τ_{yz} можно выразить в виде

$$\begin{aligned}\tau_{x,z} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial y}; \\ \tau_{y,z} &= -\frac{\partial \psi_1}{\partial x},\end{aligned}\tag{53}$$

где $\psi_1(x, y)$ называется функцией напряжений. Из уравнений (52) и (53) вытекает, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_1}{\partial y} &= G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \\ -\frac{\partial \psi_1}{\partial x} &= G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right).\end{aligned}$$

Из непосредственного дифференцирования этих соотношений видно, что функция напряжений должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} = -2G\theta.\tag{54}$$

Если ввести функцию

$$U = \frac{\psi_1}{2G\theta},\tag{55}$$

то уравнение (54) примет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -1.\tag{56}$$

Когда боковая поверхность стержня свободна от внешней нагрузки, уравнение (56) необходимо интегрировать при граничном условии

$$U|_{s=0} = 0.\tag{57}$$

Таким образом, исследование напряженного и деформированного состояния при кручении цилиндрического стержня с произвольной формой поперечного сечения сводится к ре-

шению краевой задачи (56)–(57). После определения $U(x, y)$ момент инерции при кручении можно определить по соотношению

$$I_K = 4 \iint_F U(x, y) dx dy,$$

где F – область поперечного сечения стержня. Относительный угол закручивания θ и касательные напряжения τ_{xz} , τ_{yz} , возникающие при кручении, определяются из выражений (49) и (53) с учетом соотношения (55).

Действительный угол кручения φ в общем случае определяется из решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \theta$$

при соответствующих граничных условиях. В частном случае, когда скручиваемый стержень имеет постоянное поперечное сечение, а начало координат выбрано на конце стержня, это решение записывается в виде

$$\varphi = \theta z,$$

где координата z расположена на оси стержня.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что такое модель и моделирование?
2. Разновидности задач математического моделирования.
3. Этапы математического моделирования.
4. Чем отличаются обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнений с частными производными при математическом моделировании?
5. Как влияют на величину прогиба модуль упругости, момент инерции поперечного сечения и длина балки?
6. Как определяется эквивалентный диаметр зерна?
7. Чему равно миделево сечение зерна?
8. Обсудите структуру формулы коэффициента парусности. Как влияют плотность воздуха, плотность и размер зерновки на значение коэффициента парусности?
9. Как влияют динамическая вязкость среды, радиус и плотность зерна на дальность полета?
10. Обсудите уравнение, определяющее изменения средней концентрации протравочной жидкости. От каких параметров зависит интенсивность протравки семян?
11. Докажите выполнения граничных условий для скорости воздушного потока, вычисляемого по формуле (26)?
12. Зерно выбрасывается вращающимся диском. Как учитывается влияние тангенциальной скорости зерна, на его перемещение в радиальном направлении?
13. Что означает потенциальное течение жидкости?
14. Чем отличаются начальное и граничное условия?
15. Чем отличаются коэффициенты теплопроводности и теплообмена? Можно ли повлиять на их числовые значения?
16. Что означает коэффициент температуропроводности?

17. Объясните физический смысл граничного условия

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial t} = \frac{h}{k}[u(0,t) - g(t)].$$

18. Как влияют на относительный угол закручивания модуль сдвига, момент инерции, крутящий момент и длина стержня?

19. Как вычислить момент инерции при кручении, если известна форма поперечного сечения стержня?

20. Чем отличаются уравнения поперечного, продольного и крутильного колебания упругого стержня?

Задачи для самостоятельного решения:

1. В момент выключения лабораторной установки температура исследуемого образца составляла 70°C . Через час температура упала на m градусов. Определить температуру образца через четыре часа после отключения установки, если в комнате поддерживается постоянная температура 20°C .

2. Как изменится максимальный прогиб балки, которая свободно лежит на двух опорах, если его длину увеличить на n процентов?

3. Металлическая балка свободно лежит на двух опорах и прогибается под действием собственного веса $p=500$ н/см. Определите наибольшую допустимую длину балки, обеспечивающий не более n сантиметра прогиба на ее середине, если $E=21 \cdot 10^6$ н/см², $J=30000$ см⁴.

Параметры m и n выбираются самостоятельно или задаются преподавателем.

Литература

1. Вороненко Б.А. Введение в математическое моделирование: Учеб.-метод. пособие / Б.А. Вороненко, А.Г. Крысин, В.В. Пеленко, О.А. Цуранов. – Спб.: НИУ ИТМО; ИХиБТ, 2014. – 44 с.
2. Гордеев А.С. Моделирование в агроинженерии. – СПб.: Издательство «Лань», 2014. – 384 с.
3. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука, 1987. – 160 с.
4. Нуруллин Э.Г., Салахов И.М., Ибяттов Р.И. Математическая модель процесса протравливания семян в предварительной камере пневмомеханического протравливателя // Вестник Казанского технологического университета, 2014. Т. 17, № 14. – С. 387-389.
5. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. – М: Наука, 1987.- 464 с.
6. Ибяттов Р.И., Дмитриев А.В. Об уравнения траектории движения зерна в центробежном поле. Современное состояние, проблемы и перспективы развития механизации и технического сервиса агропромышленного комплекса / Материалы международной научно-практической конференции Института механизации и технического сервиса. – Казань: Издательство Казанского ГАУ, 2019. С. 62-64.
7. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
8. Могилев А.В., Пак Н.И., Хеннер Е.К. Информатика. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 816 с.
9. Седов Л.И. Механика сплошных сред. Т. 2. – М.: Наука, 1970. – 568 с.