Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Казанский государственный аграрный университет»
Институт механизации и технического сервиса

Кафедра физики и математики

ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Методические указания
для практических и самостоятельных работ

Казань, 2017

УДК 51 (07)
ББК 22.01Р

Составители: Ибятов Р.И.
Киселева Н.Г.

Рецензенты:
Кандидат технических наук, доцент кафедры «Тракторы, автомобили и энергетические установки», доцент Халиуллин Ф.Х.
Зам. директора по научной работе ООО «НПП ЭкоЭнергоМаш», кандидат технических наук Иванов В.В.

Печатается по решению методической комиссии ИМ и ТС (протокол № 4 от 12.12.2017 г.), кафедры физики и математики (протокол №3 от 25.10.2017 г.).

Ибятов Р.И., Киселева Н.Г. Задачи линейного программирования: методические указания для практических и самостоятельных работ. – Казань: Изд-во Казанского ГАУ, 2017. – 51 с.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлениям: 35.03.06 – Агроинженерия, 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, 20.03.01 – Техносферная безопасность, 23.05.01 – Наземные транспортно-технологические средства, 21.04.02 – Землеустройство и кадастры, изучающие дисциплины «Математическое моделирование в инженерии», «Прикладная математика». Содержат краткие теоретические сведения, примеры построения математических моделей, методы решения задач линейного программирования, задачи, связанные с рациональным использованием ресурсов. Приведены задания для самостоятельной работы.

Методические указания также можно использовать для самостоятельной работы аспирантов при изучении дисциплины «Математическое моделирование».

УДК 51 (07)
ББК 22.01Р

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Разнообразные задачи человеческой деятельности связаны с отысканием наилучшего (оптимального) варианта решения. Каждый день, даже не осознавая этого, человек решает задачи, связанные с ограничением средств, желая получить наибольшую выгоду. Для получения желаемого, необходимо составить план. Задачи на отыскание лучшего плана принято называть задачами оптимизации. Во всех задачах оптимизации существует множество вариантов решений, а требуется найти наилучший вариант решения.

Моделирование многих задач производственных ситуаций сводится к решению оптимизационных задач с линейными функциями. Методические указания рассматривают примеры построения математических моделей отдельных операций сельскохозяйственного производства, которые сводятся к решению задач линейного программирования.

1. Линейное программирование
1.1. Постановка задачи линейного программирования

Линейное программирование – это раздел математики, в котором изучаются методы нахождения минимума или максимума линейной функции конечного числа переменных при условии, что переменные удовлетворяют конечному числу дополнительных условий (ограничений), записанных в виде линейных уравнений или линейных неравенств.

Общая задача линейного программирования (ЗЛП) формулируется следующим образом: найти экстремум (максимум или минимум) линейной целевой функции n переменных

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min), \tag{1}$$

удовлетворяющие системе линейных ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\,(\le, =, \ge)\,b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n\,(\le, =, \ge)\,b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n\,(\le, =, \ge)\,b_m, \end{cases} \tag{2}$$

где коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$; $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – заданные числа, а величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные. Каждое из ограничений системы может содержать один из трех возможных знаков: $\le, =, \ge$.

Математической моделью ЗЛП называется совокупность целевой функции (1) и системы ограничений (2).

Допустимым решением ЗЛП называется любой набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющий системе ограничений (2).

Оптимальным решением ЗЛП называется допустимое решение, на котором достигается требуемый экстремум целевой функции (1).

Областью допустимых решений (ОДР) называется множество всех допустимых решений ЗЛП.

Общая ЗЛП допускает ограничения всех видов: и уравнения, и неравенства.

Стандартной называется ЗЛП, в которой все переменные неотрицательны ($x_j \ge 0$, $j = \overline{1, n}$), а система ограничений (2) состоит только из неравенств.

Стандартная модель ЗЛП на максимум	Стандартная модель ЗЛП на минимум
$f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \to \max$	$f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \to \min$
$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_j \ge 0 \quad j=\overline{1,n} \end{cases}$	$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \ge b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \ge b_m, \\ x_j \ge 0 \quad j=\overline{1,n} \end{cases}$

Рассмотрим примеры построения математических моделей стандартной ЗЛП.

Пример 1.1. Предприятие производит два вида изделий A_1 и A_2. Для изготовления одного изделия вида A_1 требуется 3ед. металла и 2 часа рабочего времени, а для изготовления одного изделия вида A_2 – 7ед. металла и 8 часов рабочего времени. Всего в наличие имеется 20 ед. металла и 40 ч рабочего времени (табл. 1.1).

Таблица 1.1

	Вид изделий		Запас
	A_1	A_2	
Металл, ед	3	7	20
Рабочее время, ч	2	8	40

Прибыль при производстве изделия вида A_1 составляет 3 ден. ед., при производстве изделия вида A_2 – 5 ден. ед. Сколько изделий необходимо изготовить, чтобы получить максимальную прибыль?

Решение.

Для составления математической модели обозначим:

x_1 - число изготовленных изделий вида A_1;

x_2 - число изготовленных изделий вида A_2.

Принимая во внимание значения, приведенные в таблице 1.1, получаем систему ограничений:

$$\begin{cases} 3x_1+7x_2 \le 20, \\ 2x_1+8x_2 \le 40. \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Общую прибыль при производстве изделий можно выразить в виде линейной функции $f(x)=3x_1+5x_2$.

Стандартная математическая модель задачи: необходимо найти значения x_1 и x_2, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \le 20, \\ 2x_1 + 8x_2 \le 40, \end{cases}$$

условиям $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, при которых линейная функция $f(x) = 3x_1 + 5x_2$ принимает максимальное значение.

Пример 1.2. Сельскохозяйственное предприятие может приобрести тракторы марок M_1 и M_2 для выполнения работ P_1, P_2 и P_3. Производительность тракторов при выполнении указанных работ, общий объем работ, и стоимость каждого трактора приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Вид работ	Объем работ, га	Производительность трактора марки	
		M_1	M_2
P_1	60	4	3
P_2	40	8	1
P_3	30	1	3
Стоимость трактора, ден. ед.		7	2

Найти такой оптимальный вариант приобретения тракторов, обеспечивающий выполнение всего комплекса работ, чтобы затраты на технику были минимальными.

Решение.

Для составления математической модели обозначим:

x_1 - число тракторов марки M_1;

x_2 - число тракторов марки M_2.

Принимая во внимание значения, приведенные в таблице 1.2, получаем систему ограничений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \ge 60, \\ 8x_1 + x_2 \ge 40, \\ x_1 + 3x_2 \ge 30. \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Общую стоимость техники можно выразить в виде линейной функции $f(x) = 7x_1 + 2x_2$.

Стандартная математическая модель задачи: необходимо найти значения x_1 и x_2, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 60, \\ 8x_1 + x_2 \geq 40, \\ x_1 + 3x_2 \geq 30. \end{cases}$$

условиям $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, при которых линейная функция $f(x) = 7x_1 + 2x_2$ принимает минимальное значение.

Канонической называют ЗЛП, в которой все ограничения системы заданы уравнениями, и все переменные удовлетворяют условию неотрицательности ($x_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$).

Каноническая форма ЗЛП в координатной форме имеет вид:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,n},$$

или с использованием знака суммирования

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \quad (\min),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad i = \overline{1,m}, \tag{4}$$

$$x_j \geq 0.$$

Для приведения общей ЗЛП к каноническому виду необходимо неравенства преобразовать в равенства с помощью введения *дополнительных* (балансовых, выравнивающих) переменных. Если линейное неравенство вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b$, то дополнительная неотрицательная переменная x_{n+1} вводится со знаком «+»:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = b,$$

в неравенство-ограничение вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geq b$, со знаком «–»:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n - x_{n+1} = b.$$

Дополнительные переменные вводятся в целевую функцию с нулевыми коэффициентами и поэтому не влияют на ее значение.

Пример 1.3. Привести ЗЛП к каноническому виду

$$f(x) = 3x_1 + 5x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13, \\ x_1 - 5x_2 \ge 20, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0 .$$

Решение.

В левые части первого и второго ограничений-неравенств типа «$\le$» вводим соответственно дополнительные неотрицательные переменные x_3 и x_4 со знаком «+», а в левую часть третьего ограничения-неравенства типа «$\ge$» дополнительную неотрицательную переменную x_5 со знаком «–». В целевую функцию дополнительные переменные x_3, x_4, x_5 входят с коэффициентом ноль. Получаем

$$f(x) = 3x_1 + 5x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 13, \\ x_1 - 5x_2 - x_5 = 20, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,5}$$

- каноническая форма ЗЛП.

1.2. Геометрический метод решения ЗЛП с двумя переменными

Пусть требуется найти максимальное значение функции

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2\,, \tag{5}$$

удовлетворяющей системе ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{6}$$

На плоскости в прямоугольной системе координат изображают графически решение неравенств системы (6). Рассмотрим неравенство $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$, которое определяет полуплоскость, лежащую по одну из сторон прямой $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$. Координаты точки другой полуплоскости удовлетворяют противоположному неравенству $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ge b_1$ (рис. 1.1).

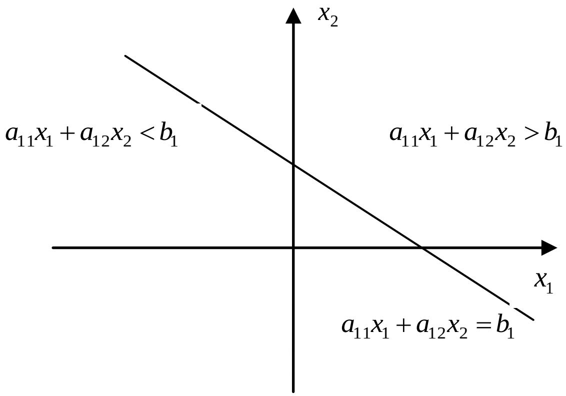


Рисунок 1.1 – Полуплоскости прямой $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$

Чтобы определить, какую именно полуплоскость определяет неравенство, достаточно взять произвольную точку плоскости (x_1, x_2), (например, начало координат) и подставить ее координаты в неравенство. Если получится верное утверждение, то полуплоскость, содержащая данную точку – искомая. В противном случае нужная полуплоскость лежит по другую сторону прямой $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$. Точки пересечения всех полуплоскостей, определяемых каждым из ограничений, составляют ОДР системы (6).

Для решения ЗЛП с двумя переменными используют следующий алгоритм:

1) строится область допустимых значений переменных, являющихся решениями соответствующих неравенств – допустимый многоугольник *X*;

2) изображается целевой вектор $\bar{n} = (c_1; c_2)$;

3) через допустимое множество проводится перпендикуляр к целевому вектору – это линия уровня целевой функции;

4) линию уровня параллельно самой себе перемещают по направлению (против направления) целевого вектора до тех пор, пока не определится последняя точка касания с многоугольником *X*. Эта точка и будет точкой максимума (минимума) (рис. 1.2);

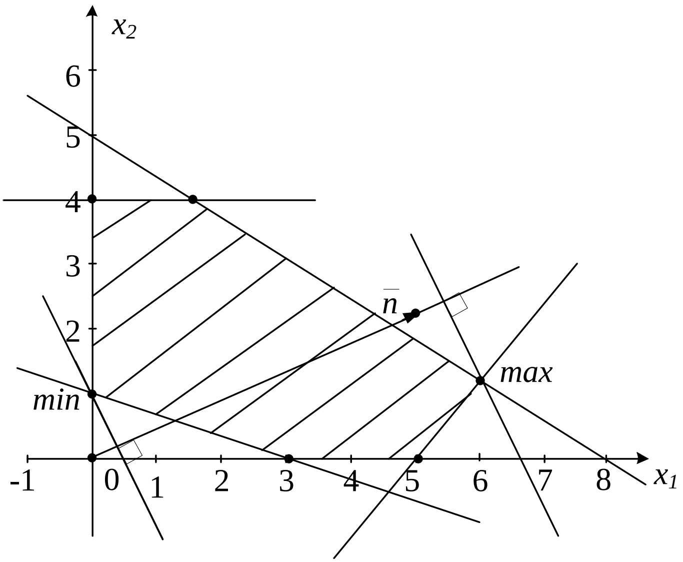


Рисунок 1.2 – Многоугольник допустимых значений

5) вычисляют значение целевой функции в точке максимума (минимума).

Решением ЗЛП, исходя от вида ОДР и целевой функции $f(x)$, могут быть следующие случаи: единственное решение, отрезок прямой, бесконечное множество решений или нет ни одного оптимального решения (рис. 1.3).

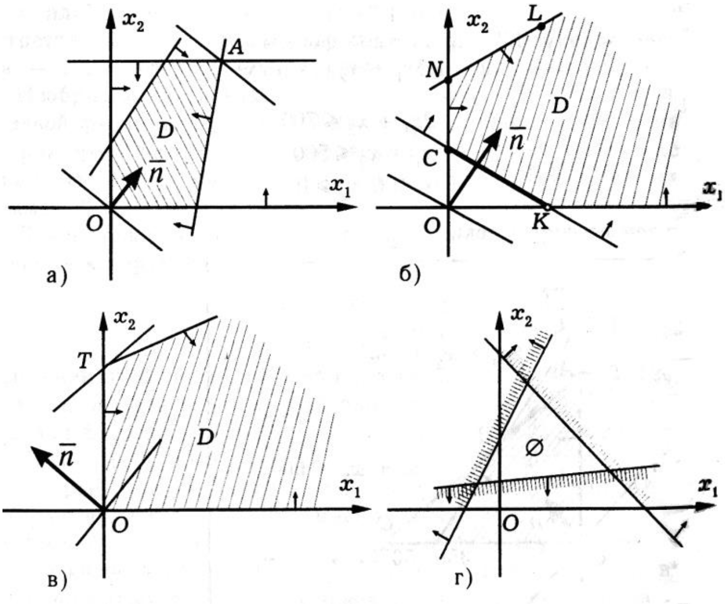


Рисунок 1.3 – Различные случаи ОДР

Задача имеет единственное решение – рис. 1.3а при решении на максимум (точка *A*), рис. 1.3в при решении на максимум (точка *T*) и рис. 1.3а при решении на минимум (точка *O*); отрезок прямой – рис. 1.3б при решении на минимум (отрезок *CK*); бесконечное множество решений – рис. 1.3б при решении на максимум и рис. 1.3в при решении на минимум; нет решений – рис. 1.3г.

Пример 1.4. Хозяйству требуется не более 6 шт. двухтонных и не более 4 шт. пятитонных автомашин. На приобретение машин у хозяйства имеется 40 у.е., а стоимость одной машины равна 5 у.е. и 8 у.е. соответственно. Сколько следует приобрести машин каждой марки, чтобы их суммарная грузоподъемность была максимальной?

Решение.

Для составления математической модели обозначим:

x_1 - количество двухтонных машин;

x_2 - количество пятитонных машин.

Учитывая условие задачи, получаем систему ограничений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \le 40, \\ x_1 \le 6, \\ .x_2 \le 4 \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Суммарную грузоподъемность машин можно выразить в виде линейной функции $f(x) = 2x_1 + 5x_2$.

Стандартная математическая модель задачи:

$$f(x) = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \le 40, \\ x_1 \le 6, \\ .x_2 \le 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Решим ЗЛП геометрическим способом.

Для построения прямой $5x_1 + 8x_2 = 40$ определим точки пересечения ее с осями координат, то есть для данной прямой имеем таблицу значений:

x_1	0	8
x_2	5	0

Возьмем точку (0; 0) и подставим в неравенство $5x_1 + 8x_2 \le 40$, получим $0 \le 40$ - неравенство выполняется $\Rightarrow$ данному неравенству соответствует нижняя полуплоскость, содержащая точку (0; 0).

Построим прямые $x_1 = 6$ и $x_2 = 4$.

Неравенство $x_1 \le 6$ геометрически определяет полуплоскость, лежащую левее граничной прямой $x_1 = 6$. Решением неравенства $x_2 \le 4$ является нижняя полуплоскость с граничной прямой $x_2 = 4$.

Решением неравенств $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ является I четверть плоскости X_1OX_2.

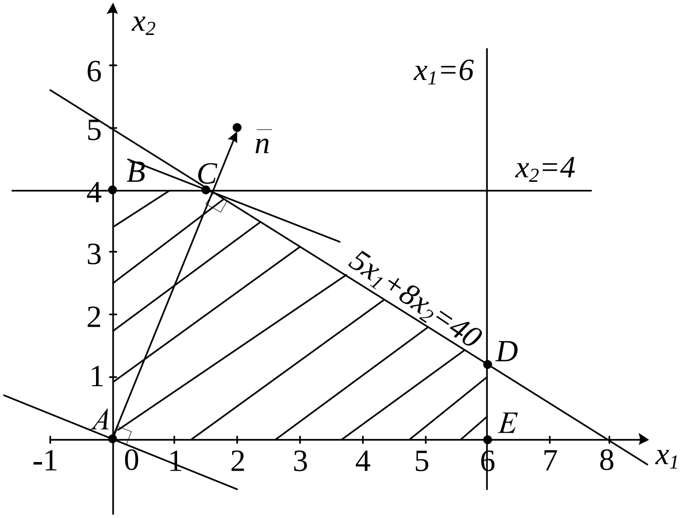


Рисунок 1.4 – Область допустимых решений системы неравенств

Выпуклый пятиугольник *ABCDE*, имеющий пять угловые точки *A*(0; 0), *B*(0; 4), *C*(1,6; 4), *D*(6; 1,33) является областью допустимых решений системы неравенств (рис. 1.4).

Построим вектор $\bar{n} = (2;5)$ и прямую $2x_1 + 5x_2 = 0$, она будет проходить через начало координат перпендикулярно вектору $\bar{n} = (2;5)$. Перемещая линию уровня по направлению вектора $\bar{n}$, получим, что на пятиугольнике решений максимальное значение линейной формы будет достигнуто в угловой точке *C*(1,6; 4):

$$F_{\max} = 2 \cdot 1{,}6 + 5 \cdot 4 = 23{,}2.$$

Так как по смыслу задачи переменные x_1 и x_2 – количество машин, следовательно, они должны быть целочисленные, то линию уровня передвигаем назад до нахождения ближайшей целой точки (1; 4):

$$F_{\max} = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 = 22.$$

Таким образом, для того, чтобы суммарная грузоподъемность машин была максимальной, хозяйству следует приобрести 1 двухтонную машину и 4 пятитонных машин. Любой другой вариант приобретения машин дает меньшую суммарную грузоподъёмность.

Пример 1.5. Агрофирма для кормления животных использует два вида корма I и II, которые содержат питательные вещества S_1, S_2, S_3. В рационе животного на один день должно быть не менее 9 ед. питательного вещества S_1, 8 ед. вещества S_2, 12 ед. вещества S_3. Стоимость 1 кг корма I составляет 7 ден. ед., корма II – 5 ден. ед. Содержание количества единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Питательные вещества	Кол-во единиц питательных веществ в 1 кг корма	
	корм I	корм II
S_1	3	1
S_2	1	2
S_3	1	6
Цена 1 кг корма, ден. ед.	7	5

Необходимо составить такой дневной рацион, который бы имел минимальную стоимость, а содержание питательных веществ каждого вида не выходило бы за нормы допустимого.

Решение.

Для составления математической модели обозначим:

x_1 - количество корма I;

x_2 - количество корма II,

входящих в дневной рацион животных.

Принимая во внимание значения, приведенные в таблице 1.3, и условие, что дневной рацион удовлетворяет требуемой питательности только в случае, если количество единиц питательных веществ не меньше предусмотренного, получаем систему ограничений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12. \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Общую стоимость рациона можно выразить в виде линейной функции $f(x) = 7x_1 + 5x_2$.

Стандартная математическая модель задачи: необходимо найти значения x_1 и x_2, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12. \end{cases}$$

условиям $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, при которых линейная функция $f(x) = 7x_1 + 5x_2$ принимает минимальное значение.

Решим ЗЛП геометрическим способом.

Для построения прямой $3x_1 + x_2 = 9$ определим точки пересечения ее с осями координат, то есть для данной прямой имеем таблицу значений:

x_1	0	3
x_2	9	0

Определим какая полуплоскость соответствует неравенству $3x_1 + x_2 \geq 9$. Возьмем точку (0;0) и подставив в неравенство, получим $0 \geq 9$ - неравенство не выполняется $\Rightarrow$ данному неравенству соответствует верхняя полуплоскость, не содержащая точку (0; 0).

Аналогично, для прямой $x_1 + 2x_2 = 8$ имеем таблицу значений:

x_1	0	8
x_2	4	0

Определим какая полуплоскость соответствует неравенству $x_1 + 2x_2 \geq 8$. Возьмем точку (0;0) и подставив в неравенство, получим $0 \geq 8$ - неравенство не выполняется $\Rightarrow$ данному неравенству соответствует верхняя полуплоскость, не содержащая точку (0; 0).

Аналогично строим прямую $x_1 + 5x_2 = 12$, для нее соответствует таблица значений:

x_1	0	12
x_2	2	0

Для определения полуплоскости берем точку (0;0), имеем $0 \geq 12$ - неравенство не выполняется $\Rightarrow$ данному неравенству соответствует верхняя полуплоскость, не содержащая точку (0; 0).

Решением неравенств $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ является I четверть плоскости X_1OX_2.

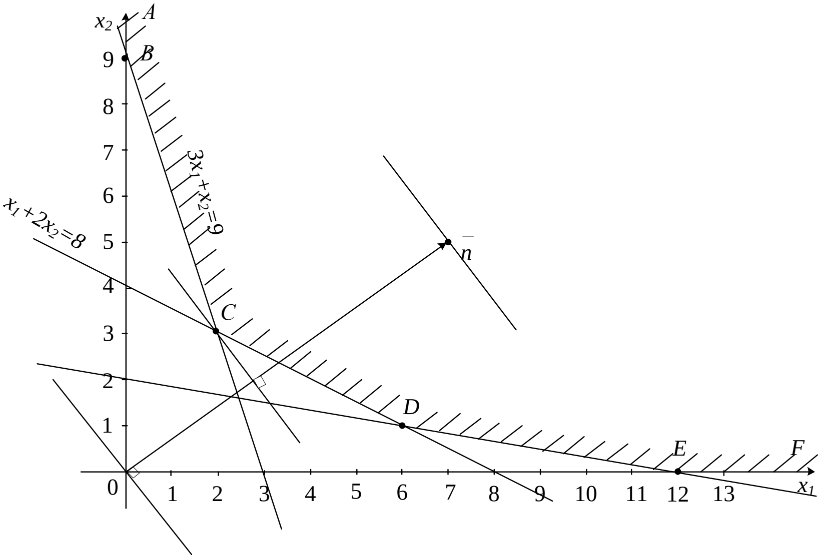


Рисунок 1.5 – Область допустимых решений системы неравенств

Область *ABCDEF* – это открытая область допустимых решений системы неравенств (рис. 1.5).

Построим вектор $\bar{n} = (7;5)$ и прямую $7x_1 + 5x_2 = 0$, которая будет проходить через начало координат и перпендикулярно вектору $\bar{n} = (7;5)$. Так как в задаче требуется найти минимум, значит, перемещаем линию уровня против направления вектора $\bar{n}$ и минимальное значение линейной формы будет достигнуто в угловой точке *C*.

Для нахождения координат точки *C*, необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ 3x_1 + x_2 = 9. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - 2x_2, \\ 3(8 - 2x_2) + x_2 = 9. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Следовательно, линейная форма достигает минимального значения в точке *C*(2; 3):

$$F_{\min} = 7 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 29.$$

Таким образом, дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, состоит из 2 ед. корма I и 3 ед. корма II.

1.3. Симплексный метод решения ЗЛП

Графическим методом решаются обычно ЗЛП, которые содержат две переменные (если в задаче количество переменных три и более трех, то представить ОДР графически вызывает затруднения). Для решения задач, имеющих более двух переменных, применяют симплексный метод – метод последовательного улучшения планов.

Суть симплексного метода заключается в том, что начиная с некоторой исходной угловой точки, происходит переход к другой угловой точке до тех пор, пока не будет найдена точка, которая соответствует оптимальному решению.

Алгоритм симплексного метода:

1) приводим задачу к каноническому виду;

2) из стандартной формы линейной модели определяем начальное базисное решение, путем приравнивая к нулю m-n переменных;

3) из числа текущих свободных (небазисных) переменных выбирается включаемая в новый базис переменная, увеличение (уменьшение) которой обеспечивает улучшение значение целевой функции (если такой переменной нет, то базисное решение оптимально);

4) из числа переменных текущего базиса выбирается исключаемая переменная, которая должна принять нулевое значение при введение в состав базиса новой переменной;

5) определяется новое базисное решение, производится переход к 2).

Пример 1.6. На площадках П1 и П2 работают два автопогрузчика АП-1 и АП-2. Не больше чем за 24 ч на площадках требуется погрузить 230 т и 168 т груза соответственно. Стоимость погрузки одной тонны груза и количество груза, которое может погрузить за один час каждый автопогрузчик на той или иной площадке известны (табл. 1.4).

Таблица 1.4

Автопогрузчик	Мощность на площадке, т/час		Стоимость работ на площадке	
	$П_1$	$П_2$	$П_1$	$П_2$
АП-1	10	12	8	7
АП-2	13	13	12	13

Необходимо найти такое количество груза на каждой площадке, которое должен погрузить каждый автопогрузчик, чтобы общая стоимость была минимальной.

Решение.

Для составления математической модели обозначим:

x_1 - количество груза, которое погрузит автопогрузчик АП-1 на площадке П1;

x_2 - количество груза, которое погрузит автопогрузчик АП-1 на площадке П2;

x_3 - количество груза, которое погрузит автопогрузчик АП-2 на площадке П1;

x_4 - количество груза, которое погрузит автопогрузчик АП-2 на площадке П2;

Учитывая условие задачи, получаем систему ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 230, \\ x_2 + x_4 = 168, \\ \dfrac{1}{10}x_1 + \dfrac{1}{12}x_2 \le 24, \\ \dfrac{1}{13}x_3 + \dfrac{1}{13}x_4 \le 24. \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Суммарные стоимости работ автопогрузчиков можно выразить в виде линейной функции $f(x) = 8x_1 + 7x_2 + 12x_3 + 13x_4$.

Стандартная математическая модель задачи:

$$f(x) = 8x_1 + 7x_2 + 12x_3 + 13x_4 \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 230, \\ x_2 + x_4 = 168, \\ \dfrac{1}{10}x_1 + \dfrac{1}{12}x_2 \le 24, \\ \dfrac{1}{13}x_3 + \dfrac{1}{13}x_4 \le 24. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0$$

Решим ЗЛП симплексным методом.

Приведем задачу к каноническому виду, вводя дополнительные неотрицательные переменные x_5, x_6, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 230, \\ x_2 + x_4 = 168, \\ \dfrac{1}{10}x_1 + \dfrac{1}{12}x_2 + x_5 = 24, \\ \dfrac{1}{13}x_3 + \dfrac{1}{13}x_4 + x_6 = 24. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Найдем базисное решение системы ограничений, которое бы минимизировало линейную форму $f(x) = 8x_1 + 7x_2 + 12x_3 + 13x_4$.

I шаг. x_2, x_3, x_5, x_6. – базисные переменные;

x_1, x_4 – свободные переменные.

Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_2 = 168 - x_4, \\ x_3 = 230 - x_1, \\ x_5 = 24 - \dfrac{1}{10}x_1 - \dfrac{1}{12}(168 - x_4), \\ x_6 = 24 - \dfrac{1}{13}(230 - x_1) - \dfrac{1}{13}x_4. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим:

$$\begin{cases} x_2 = 168 - x_4, \\ x_3 = 230 - x_1, \\ x_5 = 10 - \dfrac{1}{10}x_1 + \dfrac{1}{12}x_4, \\ x_6 = \dfrac{82}{13} + \dfrac{1}{13}x_1 - \dfrac{1}{13}x_4. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Базисное решение (0; 168; 230; 0; 10; 82/13) не содержит отрицательных чисел, поэтому оно является допустим. Проверим данное допустимое базисное решение на оптимальность, для этого подставляем базисные переменные в функцию:

$$f(x) = 8x_1 + 7(168 - x_4) + 12(230 - x_1) + 13x_4 = 3936 - 4x_1 + 6x_4 .$$

Значение функции $f(x)$ не является оптимальным (минимальным), так как переменная x_1 со знаком «-» и, значит, может уменьшить значение функции $f(x)$. Переведем переменную x_1 в базисные переменные.

Найдем минимальное значение отношения свободного члена к коэффициенту при x_1, причем знаки у них должны быть противоположными (в противном случае пишут ∞):

$$x_1 = min\{\infty;\ 230/1;\ 100/1;\ \infty\} = 100.$$

Минимальное отношение соответствует третьему ограничению, поэтому x_5 переходит в свободные переменные.

II шаг. x_1, x_2, x_3, x_6 – базисные переменные;

x_4, x_5 – свободные переменные.

Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_2 = 168 - x_4, \\ x_3 = 230 - (100 + \dfrac{5}{6}x_4 - 10x_5), \\ x_1 = 100 + \dfrac{5}{6}x_4 - 10x_5, \\ x_6 = \dfrac{82}{13} + \dfrac{1}{13}(100 + \dfrac{5}{6}x_4 - 10x_5) - \dfrac{1}{13}x_4. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим:

$$\begin{cases} x_2 = 168 - x_4, \\ x_3 = 130 - \dfrac{5}{6}x_4 + 10x_5, \\ x_1 = 100 + \dfrac{5}{6}x_4 - 10x_5, \\ x_6 = 14 - \dfrac{1}{78}x_4 - \dfrac{10}{13}x_5. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Базисное решение (100; 168; 130; 0; 0; 14) проверим на оптимальность.

$$f(x) = 3936 - 4(100 + \frac{5}{6}x_4 - 10x_5) + 6x_4 = 3536 + \frac{16}{6}x_4 + 40x_5.$$

Значение функции $f(x)$ является оптимальным (минимальным), так как содержит все переменные со знаком «+». Следовательно, оптимальным является следующий план работ:

100 тонн груза погрузит автопогрузчикАП-1 на площадке П1;

168 тонн груза погрузит автопогрузчик АП-1 на площадке П2;

130 тонн груза погрузит автопогрузчик АП-2 на площадке П1.

Общая стоимость работ составит 3536 ден. единиц.

Пример 1.7. Небольшая фирма планирует выпускать три вида изделий B_1, B_2, B_3; для их производства требуется три вида машин A_1, A_2, A_3. Для машин типа A_1 имеется машинного рабочего времени – 48 ч, для машин типа A_2 – 60 ч, для машин типа A_3 – 36 ч. Стоимость одного изделия каждого вида составляет 6, 4 и 3 тыс. руб. соответственно. Затраты рабочего времени каждой из машин на производство одного изделия представлены в табл. 1.5.

Таблица 1.5

Виды машин	Изделия			Всего машинного рабочего времени
	B_1	B_2	B_3	
A_1	2	4	3	48
A_2	4	2	3	60
A_3	3	0	1	36

Составить план производства изделий на фирме так, чтобы оно получало максимальную прибыль.

Решение.

Для составления математической модели обозначим:

x_1 - количество изделий B_1;

x_2 - количество изделий B_2;

x_3 - количество изделий B_3.

По условию задачи эти переменные должны удовлетворять системе ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 48, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 60, \\ 3x_1 + x_3 \le 36. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Требуется найти план, доставляющий максимальное значение функции прибыли $f(x) = 6x_1 + 4x_2 + 3x_3$.

Приведем задачу к каноническому виду, добавим дополнительные неотрицательные переменные x_4, x_5, x_6:

$$f(x) = 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 48, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 60, \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 36. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Найдем любое базисное решение.

I шаг. x_4, x_5, x_6. – базисные переменные;

x_1, x_2, x_3 – свободные переменные.

Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_4 = 48 - 2x_1 - 4x_2 - 3x_3, \\ x_5 = 60 - 4x_1 - 2x_2 - 3x_3, \\ x_6 = 36 - 3x_1 - x_3. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Базисное решение (0; 0; 0; 48; 60; 36) не содержит отрицательных чисел, поэтому оно является допустим. Проверим данное допустимое базисное решение на оптимальность, для этого подставляем базисные переменные в функцию:

$$f(x) = 6x_1 + 4x_2 + 3x_3.$$

Значение функции $f(x) = 0$ не является оптимальным (максимальным), так как содержит переменные x_1 , x_2 , x_3 со знаком «+». Переменная x_1 может быстрее увеличить значение функции $f(x)$ (т.к. коэффициент больше, чем у остальных), поэтому ее не выгодно считать свободной. Переведем переменную x_1 в базисные переменные.

Найдем минимальное значение отношения свободного члена к коэффициенту при x_1, причем знаки у них должны быть противоположными (в противном случае пишут ∞):

$$x_1 = min\{42/2;\ 60/4;\ 36/3\} = 12.$$

Минимальное отношение соответствует третьему ограничению, поэтому x_6 переходит в свободные переменные.

II шаг. x_1, x_4, x_5. – базисные переменные;

x_2, x_3, x_6 – свободные переменные.

Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_4 = 48 - 2(12 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6) - 4x_2 - 3x_3, \\ x_5 = 60 - 4(12 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6) - 2x_2 - 3x_3, \\ x_1 = 12 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,6}.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим:

$$\begin{cases} x_4 = 24 - 4x_2 - \frac{7}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_6, \\ x_5 = 12 - 2x_2 - \frac{5}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_6, \\ x_1 = 12 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,6}.$$

Базисное решение (12; 0; 0; 24; 12; 0) проверим на оптимальность, для этого подставляем базисные переменные в функцию:

$$f(x) = 6(12 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_6) + 4x_2 + 3x_3 = 72 + 4x_2 + x_3 - x_6.$$

Значение функции $f(x)$ =72 не является оптимальным (максимальным), так как содержит переменные x_3 , x_2 со знаком «+». Переменная x_2 может быстрее увеличить значение функции $f(x)$ (т.к. коэффициент больше, чем у остальных). Переведем переменную x_2 в базисные переменные.

Найдем минимальное значение отношения свободного члена к коэффициенту при x_2, причем знаки у них должны быть противоположными (в противном случае пишут ∞):

$$x_2 = min\{24/4;\ 12/2;\ \infty\} = 6.$$

Минимальное отношение соответствует первому ограничению, поэтому x_4 переходит в свободные переменные.

III шаг. x_1, x_2, x_5. – базисные переменные;
x_3, x_4, x_6 – свободные переменные.

Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_2 = 6 - \frac{7}{12}x_3 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{6}x_6, \\ x_5 = 12 - 2(6 - \frac{7}{12}x_3 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{6}x_6) - \frac{5}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_6, \\ x_1 = 12 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим:

$$\begin{cases} x_2 = 6 - \frac{7}{12}x_3 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{6}x_6, \\ x_5 = 0 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + x_6, \\ x_1 = 12 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Базисное решение (12; 6; 0; 0; 0; 0) проверим на оптимальность, для этого подставляем базисные переменные в функцию:

$$f(x) = 72 + 4(6 - \frac{7}{12}x_3 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{6}x_6) + x_3 - x_6 = 96 - \frac{4}{3}x_3 - x_4 - \frac{1}{3}x_6.$$

Значение функции $f(x)$ является оптимальным (максимальным), так как содержит все переменные со знаком «-». Значит, никакая переменная не может увеличить значение функции $f(x)$.

Следовательно, для получения максимальной прибыли фирме следует выпускать изделий B_1 в количестве 12, изделий B_2 в количестве 6, а изделий B_3 вообще не следует выпускать, тогда прибыль составит 96 тыс. рублей.

2. Транспортная задача линейного программирования.
2.1. Математическая модель и формулировка задачи

В агропромышленном комплексе в производственном процессе часто приходится сталкиваться с множеством проблем, таких как: необходимость быстрой перевозки сельскохозяйственной продукции, быстрой переработки информации о состоянии полей, динамичность агроклиматических факторов, острая ограниченность во времени, характерная для определенных периодов сельскохозяйственного производства. Использование математических моделей оптимизации землепользования позволяют решить задачи, связанные с экологическими проблемами, планированием рационального природопользования.

В задачах такого вида требуется найти такой оптимальный план, в результате которого бы в зависимости от поставленной задачи, получили наименьшие затраты или наибольшую прибыль и такие задачи называют транспортными.

Формулировка транспортной задачи: имеется m пунктов A_1, A_2, …, A_m, в которых имеются запасы груза в количестве a_1, a_2, …, a_m единиц и имеется n пунктов назначения B_1, B_2, …, B_n, подавших заявки на b_1, b_2, …, b_n единиц товара соответственно.

Стоимость c_{ij} перевозок единицы груза из пункта A_i в пункт B_j называют истинным тарифом (табл. 2.1).

Таблица 2.1

	B_1	B_2	…	B_n	Запасы a_i
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_{mn}
Заявки b_j	b_1	b_2	…	b_n	

Транспортная задача считается закрытой, если $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, в противном случае – открытой. В случае, если задача открытая, то ее приводят к закрытому виду следующим образом:

1) если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводится $(n + 1)$ пункт назначения с заявкой $b_{n+1} = \sum a_i - \sum b_j$ и истинными тарифами $c_{i\,,\,n+1} = 0$, где $i = 1, \ldots, m$;

2) если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводится $(m+1)$ пункт оправления с запасами $a_{m+1} = \sum b_j - \sum a_j$ и истинными тарифами $c_{j\,,\,m+1} = 0$, где $j = 1, \ldots, n$.

Математическая формулировка задачи:

пусть x_{ij} – количество единиц груза, отправляемого из i–го пункта A_i в j–й пункт B_j. Запишем системы ограничений:

1) все грузы должны быть вывезены, т.е.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m, \end{cases}$$

или $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$, $i = 1, \ldots, m$;

2) все потребности должны быть удовлетворены, т.е.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n, \end{cases}$$

или $\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Суммарная стоимость затрат перевозки груза x_{ij} из A_i в B_j, должна быть минимальной, т.е.

$F = c_{11}\, x_{11} + c_{12}\, x_{12} + \ldots + c_{1n}\, x_{1n} + c_{21}\, x_{21} + c_{22}\, x_{22} + \ldots + c_{2n}\, x_{2n} + \ldots + c_{m1}\, x_{m1} + c_{m2}\, x_{m2} + \ldots + c_{mn}\, x_{mn} \rightarrow min.$

Требуется найти минимальное значение целевой функции $F = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i, \, i = 1, \ldots, m; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \, j = 1, \ldots, n; \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

Особенность транспортной задачи: в системе ограничений число базисных переменных равно $(m + n - 1)$, а свободных переменных равно $m\,n - (m + n - 1)$.

В случае, когда число заполненных клеток при построении плана перевозок меньше, чем $(m + n - 1)$, то в недостающее число свободных клеток вводят нулевые поставки и далее эти клетки рассматривают как заполненные.

2.2. Методы построения опорного решения

Метод наименьшего (минимального) тарифа: груз распределяют сначала в клетки с минимальным тарифом c_{ij}. Далее, учитывая оставшиеся запасы у поставщиков и спрос потребителей, распределяют в незанятые клетки с наименьшим тарифом.

Пример 2.1. На трех базах A_1, A_2, A_3 находится однородный груз в количестве 200, 200, 100 тонн. Этот груз необходимо развести пяти потребителям B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, потребности которых в данном грузе составляют 70, 80, 150, 110, 90 тонн соответственно. Стоимость перевозок единицы продукции от i-го поставщика к j-му потребителю c_{ij} представлена матрицей:

$$\begin{pmatrix} 4 & 11 & 6 & 5 & 15 \\ 8 & 7 & 9 & 13 & 10 \\ 9 & 5 & 12 & 12 & 20 \end{pmatrix}$$

Требуется установить такие объемы перевозок x_{ij} от каждого поставщика к каждому потребителю, чтобы суммарные затраты на перевозки были минимальными и потребности всех потребителей были удовлетворены.

Решение.

Найдем исходное опорное решение методом наименьшего тарифа (табл. 2.2):

1) смотрим по всей таблице минимальный тариф 4. Значит, в A_1B_1 помещаем $min\{70, 200\} = 70$. Так как потребность пункта B_1 удовлетворена, то далее из рассмотрения исключаем этот столбец;

2) далее следующий наименьший тариф 5. В клетку A_1B_4 помещаем $min\{200\text{-}70, 110\} = 110$ и потребность пункта B_4 удовлетворена $\Rightarrow$ из рассмотрения исключаем этот столбец;

3) в клетку A_3B_2 также с минимальным тарифом 5 помещаем $min\{100,80\}= 80$ и потребность пункта B_2 удовлетворена, исключаем этот столбец;

4) заполняем клетку A_1B_3 с тарифом 6. В эту клетку вписываем $min\{200\text{-}70\text{-}110, 150\} = 20$, запасы A_1 распределили;

5) заполняем клетку A_2B_3 с тарифом 9. В эту клетку вписываем $min\{200, 150\text{-}20\} = 130$, потребность пункта B_3 удовлетворена;

6) в клетку A_2B_5 с тарифом 10 помещаем $min\{200\text{-}130, 90\} = 70$, запасы A_2 распределили и ее исключаем;

7) в клетку A_3B_5 с тарифом 20 вписываем $min\{100\text{-}80, 90\text{-}70\} =20$, все запасы распределили.

Таблица 2.2

ПО/ПН	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	4 70	11 -	6 20	5 110	15 -	200
A_2	8 -	7 -	9 130	13 -	10 70	200
A_3	9 -	5 80	12 -	7 -	20 20	100
Заявки b_j	70	80	150	110	90	

Исходный опорный план:

$$F_{исх} = 70 \cdot 4 + 20 \cdot 6 + 110 \cdot 5 + 130 \cdot 9 + 70 \cdot 10 + +80 \cdot 5 + 20 \cdot 20 = 3620.$$

Метод «северо-западного» угла: каждый раз начинают с левой верхней клетки – «северо-западного» угла таблицы поставок распределение груза в пункты назначения, причем истинные тарифы не учитываются (табл. 2.3):

1) в клетку A_1B_1 запишем $min\{70,200\} = 70$, спрос потребителя B_1 удовлетворен;

2) в таблице поставок находим новый «северо-западный» угол – A_1B_2. Записываем $min\{200\text{-}70,80\}= 80$, спрос потребителя B_2 удовлетворили;

3) в клетку A_1B_3 записываем $min\{200\text{-}70\text{-}80, 150\} = 50$, запас поставщика A_1 распределили;

4) новый «северо-западный» угол – A_2B_3, получаем для данной клетки значение $min\{200,150\text{-}50\}= 100$ - спрос потребителя B_3 удовлетворили;

5) теперь «северо-западный» угол – A_2B_4, записываем $min\{200\text{-}100,110\} = 100 \Rightarrow$ запасы второй строки распределили;

6) следующий «северо-западный» угол – A_3B_5, получаем $min\{100,110\text{-}100\}= 10$ - спрос потребителя B_4 удовлетворили;

7) в таблице остался последний «северо-западный» угол – A_3B_4, для данной клетки значение $min\{100\text{-}10,90\}= 90$. Все запасы распределили, спросы потребителей удовлетворили.

Таблица 2.3

ПО\ПН	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	70 [4]	80 [11]	50 [6]	- [5]	- [15]	200
A_2	- [8]	- [7]	100 [9]	100 [13]	- [10]	200
A_3	- [9]	- [5]	- [12]	10 [7]	90 [20]	100
Заявки b_j	70	80	150	110	90	

Исходный опорный план:

$$F_{исх} = 70 \cdot 4 + 80 \cdot 11 + 50 \cdot 6 + 100 \cdot 9 + 100 \cdot 13 + +10 \cdot 7 + 90 \cdot 20 = 5530.$$

Опорный план, полученный методом наименьшего тарифа имеет наименьшие затраты, чем план по методу «северо-западного» угла, значит, первый метод быстрее приведет к оптимальному.

2.3. Проверка опорного плана на оптимальность

Найденный исходный опорный план (табл.2.2) проверяем на оптимальность методом потенциалов.

ПО\ПН	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	70 [4]	- [11]	+ 20 [6]	- 110 [5]	[15]	200
A_2	- [8]	- [7]	- 130 [9]	- [13]	+ 70 [10]	200
A_3	- [9]	80 [5]	- [12]	+ [7]	- 20 [20]	100
Заявки b_j	70	80	150	110	90	

Чтобы рассчитать потенциалы строк u_i и потенциалы столбцов v_j, необходимо для заполненных клеток записать алгебраическую сумму потенциалов, соответствующих i-й строке u_i и j-му столбцу v_j, и она должна равняться истинному тарифу этой клетки, т.е. $u_i + v_j = c_{ij}$.

Полагая $u_1 = 0$, находим

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4, \\ u_1 + v_3 = 6, \\ u_1 + v_4 = 5, \\ u_2 + v_3 = 9, \\ u_2 + v_5 = 10, \\ u_3 + v_2 = 5, \\ u_3 + v_5 = 20. \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = 4 - u_1 = 4 - 0 = 4, \\ v_3 = 6 - u_1 = 6 - 0 = 6, \\ v_4 = 5 - u_1 = 5 - 0 = 5, \\ u_2 = 9 - v_3 = 9 - 6 = 3, \\ v_5 = 10 - u_2 = 10 - 3 = 7, \\ v_2 = 5 - u_3 = 5 - 13 = -8, \\ u_3 = 20 - v_5 = 20 - 7 = 13. \end{cases}$$

Для свободных клеток находим оценки $d_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$.

План считается оптимальным, если все оценки меньше или равны 0. Если эти требования не выполняется, то переходят к новому опорному плану. Для этого в таблице находят клетку с наибольшей положительной оценкой, включают ее в цикл перевозок и строят цикл пересчета.

Транспортные задачи с целевой функцией на максимум решаются аналогично, за исключением того, что план считается оптимальным, если все оценки для свободных клеток будут больше или равны 0.

В цикле пересчета свободной клетке соответствует одна вершина, а все остальные вершины – заполненным клеткам, все вершины соединяем замкнутой ломаной линией (отрезки между собой образуют 90^0) (рис. 2.1).

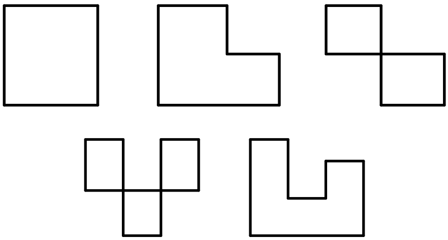


Рисунок 2.1. – Возможные примеры циклов

Каждому циклу соответствует четное число вершин, которые отмечают знаками «+» или «–». Начиная со свободной клетки - пишут знак «+», остальные вершины имеют чередующие знаки.

Пересчёт по циклу производят следующим образом:

1) из чисел, которые находятся в вершинах со знаком «-», находим минимальное и обозначим Δ;

2) к числам, которые находятся в вершинах со знаком «+» прибавляем Δ, а из чисел в отрицательных вершинах вычитаем Δ.

Полученный план перевозок проверяют на оптимальность. Для свободных клеток находим оценки:

$d_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + (-8) - 11 = -19;$

$d_{15} = u_1 + v_5 - c_{15} = 0 + 7 - 15 = -8;$

$d_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 3 + 4 - 8 = -1;$

$d_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 3 + (-8) - 7 = -12;$

$d_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = 3 + 5 - 13 = -5;$

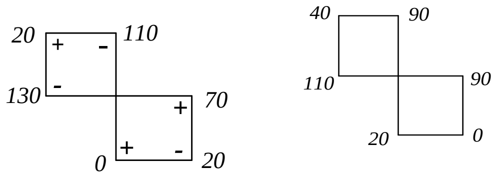
$d_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 13 + 4 - 9 = 8;$

$d_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = 13 + 6 - 12 = 7;$

$d_{34} = u_3 + v_4 = 13 + 5 - 7 = 11.$

Так как имеются положительные оценки, значит, план не оптимальный, необходим пересчёт по циклу для одной из клеток. Найдем цикл для клетки A_3B_4 - цикл показан жирной линией (в табл. 2.4).

Найдем $\Delta = min\{130, 110, 20\} = 20$.



Старый цикл пересчета Цикл после пересчета

Рисунок 2.2. – Циклы пересчета единиц груза

Пересчитав единицы груза, таблица поставок распределения груза в пункты назначения, имеет вид:

Таблица 2.5

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	4 70	11 -	6 40	5 90	15 -	200
A_2	8 -	7 -	9 110	13 -	10 90	200
A_3	9 -	5 80	12 -	7 20	20 -	100
Заявки b_j	70	80	150	110	90	

Для заполненных клеток находим потенциалы строк и столбцов.

Полагая $u_1 = 0$, находим

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4, \\ u_1 + v_3 = 6, \\ u_1 + v_4 = 5, \\ u_2 + v_3 = 9, \\ u_2 + v_5 = 10, \\ u_3 + v_2 = 5, \\ u_3 + v_4 = 7. \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = 4 - u_1 = 4 - 0 = 4, \\ v_3 = 6 - u_1 = 6 - 0 = 6, \\ v_4 = 5 - u_1 = 5 - 0 = 5, \\ u_2 = 9 - v_3 = 9 - 6 = 3, \\ v_5 = 10 - u_2 = 10 - 3 = 7, \\ v_2 = 5 - u_3 = 5 - 2 = 3, \\ u_3 = 7 - v_5 = 7 - 5 = 2. \end{cases}$$

Для свободных клеток находим оценки:

$d_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 3 - 11 = -8;$

$d_{15} = u_1 + v_5 - c_{15} = 0 + 7 - 15 = -8;$

$d_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 3 + 4 - 8 = -1;$

$d_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 3 + 3 - 7 = -1;$

$d_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = 3 + 5 - 13 = -5;$

$d_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 2 + 4 - 9 = -3;$

$d_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = 2 + 6 - 12 = -4;$

$d_{35} = u_3 + v_5 - c_{35} = 2 + 7 - 20 = -11.$

Оценки всех свободных клеток меньше нуля, значит, полученный план перевозок является оптимальным. По этому плану:

$F_{опт} = 70 \cdot 4 + 40 \cdot 6 + 90 \cdot 5 + 110 \cdot 9 + 90 \cdot 10 + +80 \cdot 5 + 20 \cdot 7 = 3400$ ед.

Таким образом, оптимальным является решение:

$x_{11} = 70$ тонн груза с базы A_1 потребителю B_1;

$x_{13} = 40$ тонн груза с базы A_1 потребителю B_3;

$x_{14} = 90$ тонн груза с базы A_1 потребителю B_4;

$x_{23} = 110$ тонн груза с базы A_2 потребителю B_3;

$x_{25} = 90$ тонн груза с базы A_2 потребителю B_5;

$x_{32} = 80$ тонн груза с базы A_3 потребителю B_2;

$x_{34} = 20$ тонн груза с базы A_3 потребителю B_4.

Пример 2.2. На четырех элеваторах A_1, A_2, A_3, A_4 находится зерно в количестве 100, 120, 150, 130 тонн, которое нужно доставить на четыре сельскохозяйственных предприятия для посева. Предприятию B_1 необходимо поставить 140 тонн, предприятию B_2 – 130 тонн, предприятию B_3 –

90 тонн, предприятию B_4 – 140 тонн. Стоимость доставки потребителям от поставщиков представлена матрицей:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 7 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \\ 9 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Составьте оптимальный план перевозки зерна с минимальными затратами.

Решение.

Найдем исходный опорный план методом наименьшего тарифа. Согласно этому методу, зерно будем распределять в первую очередь сельскохозяйственным предприятиям с минимальным тарифом c_{ij}.

Таблица 2.6

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы a_i
A_1	4 100	5 -	5 -	7 -	100
A_2	8 -	7 -	5 -	4 120	120
A_3	9 40	6 -	4 90	5 20	150
A_4	3 -	2 130	9 -	3 0	130
Заявки b_j	140	130	90	140	Заявки b_j

Заполним таблицу перевозок зерна сельскохозяйственным предприятиям (табл. 2.6):

1) минимальный тариф – 2. В клетку A_4B_2 помещаем $min\{130, 130\} = 130$. Потребность пункта B_2 удовлетворена, запас A_4 полностью распределили, далее этот столбец и строка из рассмотрения исключаются;

2) следующий наименьший тариф – 4. В клетку A_1B_1 помещаем $min\{100, 140\} = 100$, первую строку далее исключаем;

3) в клетку A_2B_4 с тарифом 4 вписываем $min\{120, 140\} = 120$, запас A_2 распределили полностью;

4) заполняем клетку A_3B_3 с тарифом 4. В эту клетку вписываем $min\{150, 90\} = 90$. Потребность пункта B_3 удовлетворена, далее этот столбец из рассмотрения исключаем;

5) следующий минимальный тариф 5. В клетку A_3B_4 помещаем $min\{150\text{-}90, 140\text{-}120\} = 20$. Потребность пункта B_4 удовлетворена;

6) минимальный тариф – 9. В клетку A_3B_1 помещаем $min\{150\text{-}90\text{-}20, 140\text{-}100\} = 40$. Все запасы распределили.

Число базисных переменных должно быть равно $(m + n – 1)$, то есть $4 + 4 – 1 = 7$. В нашем случае количество занятых клеток оказалось 6, что меньше чем $(m + n – 1)$, поэтому недостающее одно число заполним клеткой с нулевыми поставками (условно занятую клетку) с учётом наименьшего тарифа. В клетку A_4B_4 с наименьшим тарифом 3 поставим нулевую поставку.

Затраты по опорному плану составляют:

$$F_1 = 100\cdot4 + 120\cdot4 + 40\cdot9 + 90\cdot4 + 20\cdot5 + 130\cdot2 + 0\cdot3 = 1960.$$

Проверяем полученный план на оптимальность. Для заполненных клеток находим потенциалы строк и столбцов.

Полагая $u_1 = 0$, находим

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4, \\ u_2 + v_4 = 4, \\ u_3 + v_4 = 9, \\ u_3 + v_3 = 4, \\ u_3 + v_4 = 5, \\ u_4 + v_2 = 2, \\ u_4 + v_4 = 3. \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = 4 - u_1 = 4 - 0 = 4, \\ u_2 = 4 - v_4 = 4 - 0 = 4, \\ u_3 = 9 - v_1 = 9 - 4 = 5, \\ v_3 = 4 - u_3 = 4 - 5 = -1, \\ v_4 = 5 - u_3 = 5 - 5 = 0, \\ v_2 = 2 - u_4 = 2 - 3 = -1, \\ u_4 = 3 - v_4 = 3 - 0 = 3. \end{cases}$$

Для свободных клеток находим оценки:

$d_{12} = u_1 + v_2 – c_{12} = 0 + (–1) –5 = –6;$

$d_{13} = u_1 + v_3 – c_{13} = 0 + (–1) – 5 = –6;$

$d_{14} = u_1 + v_4 – c_{14} = 0 + 0 – 7 = –7;$

$d_{21} = u_2 + v_1 – c_{21} = 4 + 4 – 8 = 0;$

$d_{22} = u_2 + v_2 – c_{22} = 4 + (–1) –7 = –4;$

$d_{23} = u_2 + v_3 – c_{23} = 4 + (–1) – 5 = –2;$

$d_{32} = u_3 + v_2 – c_{32} = 5 + (–1) – 6 = –2;$

$d_{41} = u_4 + v_1 – c_{41} = 3 + 4 – 3 = 4;$

$d_{42} = u_4 + v_2 – c_{42} = 3 + (–1) – 9 = –7.$

Так как среди оценок свободных клеток имеется положительная оценка ($d_{41} = 4$), то план перевозок не является оптимальным, т.е. необходим пересчёт по циклу для клетки A_4B_1. Построим цикл для клетки A_4B_1 (рис. 2.3).

Найдем $\Delta = min\{40, 130\} = 40$.

Старый цикл пересчета Цикл после пересчета

Рисунок 2.3. – Циклы пересчета единиц груза

После реализации цикла пересчета получаем табл. 2.7.

Таблица 2.7

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы a_i
A_1	4 100	5 -	5 -	7 -	100
A_2	8 -	7 -	5 -	4 120	120
A_3	9 -	6 40	4 90	5 20	150
A_4	3 40	2 90	9 -	3 0	130
Заявки b_j	140	130	90	140	Заявки b_j

Вычислим затраты по новому плану:

$$F_2 = 100\cdot4 + 120\cdot4 + 40\cdot6 + 90\cdot4 + 20\cdot5 + 40\cdot3 + 90\cdot2 = 1880.$$

Проверяем полученный план на оптимальность. Для заполненных клеток находим потенциалы строк и столбцов.

Полагая $u_1 = 0$, находим

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4, \\ u_2 + v_4 = 4, \\ u_3 + v_2 = 6, \\ u_3 + v_3 = 4, \\ u_3 + v_4 = 5, \\ u_4 + v_1 = 3, \\ u_4 + v_2 = 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = 4 - u_1 = 4 - 0 = 4, \\ u_2 = 4 - v_4 = 4 - 2 = 2, \\ u_3 = 6 - v_2 = 6 - 3 = 3, \\ v_3 = 4 - u_3 = 4 - 3 = 1, \\ v_4 = 5 - u_3 = 5 - 3 = 2, \\ u_4 = 3 - v_1 = 3 - 4 = -1, \\ v_2 = 2 - u_4 = 2 - (-1) = 3. \end{cases}$$

Для свободных клеток находим оценки:

$d_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 3 - 5 = -2;$

$d_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 1 - 5 = -4;$

$d_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 2 - 7 = -5;$

$d_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 2 + 4 - 8 = -2;$

$d_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 2 + 3 - 7 = -2;$

$d_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 2 + 1 - 5 = -2;$

$d_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 3 + 4 - 9 = -2;$

$d_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = (-1) + 1 - 9 = -9;$

$d_{44} = u_4 + v_4 - c_{44} = (-1) + 2 - 3 = -2.$

Так как для свободных клеток все оценки отрицательные, следовательно, полученный план перевозок является оптимальным.

Таким образом, оптимальным является решение:

x_{11} = 100 тонн зерна с элеватора A_1 предприятию B_1;
x_{24} = 40 тонн зерна с элеватора A_2 предприятию B_4;
x_{32} = 40 тонн зерна с элеватора A_3 предприятию B_2;
x_{33} = 90 тонн зерна с элеватора A_3 предприятию B_3;
x_{34} = 20 тонн зерна с элеватора A_3 предприятию B_1;
x_{41} = 40 тонн зерна с элеватора A_4 предприятию B_1;
x_{42} = 90 тонн зерна с элеватора A_4 предприятию B_2.

Затраты перевозок составляют по этому плану $F_{\text{опт}}$ = 1880 ед.

Пример 2.3. Имеются пять участков земли для посева: 1) ржи, 2) пшеницы, 3) ячменя, 4) кукурузы. Площади участков соответственно равны 270, 250, 200, 350,430 га. Урожайность культур (ц/га) на соответствующих участках земли представлена матрицей:

$$\begin{pmatrix} 25 & 20 & 22 & 23 & 20 \\ 21 & 22 & 20 & 25 & 23 \\ 14 & 16 & 18 & 21 & 15 \\ 40 & 50 & 46 & 42 & 48 \end{pmatrix}$$

Требуется определить, сколько гектаров земли засеять каждой из культур на каждом участке земли, чтобы суммарная урожайность собранного зерна была максимальной, если известно, что из-за ограниченности в семенном фонде можно засеять рожью, пшеницей, ячменем и кукурузой соответственно 200, 500, 350 и 450 га.

Решение.

Найдем исходное опорное решение (аналогично методу наименьшего тарифа выбираем клетки с наибольшей стоимостью c_{ij}).

Таблица 2.8

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	25 200	20 -	22 -	23 -	20 -	200
A_2	21 -	22 -	20 -	25 350	23 150	500
A_3	14 70	16 -	18 200	21 -	15 80	350
A_4	40 -	50 250	46 -	42 -	48 200	450
Заявки b_j	270	250	200	350	430	Заявки b_j

Заполним таблицу количества каждой культуры на участках земли (табл. 2.8)*:*

1) максимальный тариф – 50. В клетку A_4B_2 помещаем $min\{450, 250\} = 250$. Потребность пункта B_2 удовлетворена, далее этот столбец из рассмотрения исключаем;

2) следующий максимальный тариф – 48. В клетку A_4B_5 помещаем $min\{450\text{-}250, 430\} = 200$;

3) в клетку A_1B_1 с тарифом 25 вписываем $min\{200, 270\} = 200$;

4) заполняем клетку A_2B_4 с тарифом 25. В эту клетку вписываем $min\{500, 350\} = 350$. Потребность пункта B_4 удовлетворена, далее этот столбец из рассмотрения исключаем;

5) следующий максимальный тариф 23. В клетку A_2B_5 помещаем $min\{500\text{-}350, 430\text{-}200\} = 150$.

6) в клетку A_3B_5 с тарифом 15 вписываем $min\{350\text{-}200, 430\text{-}200\text{-}150\} = 80$. Потребность пункта B_5 удовлетворена;

7) максимальный тариф – 14. В клетку A_3B_1 помещаем $min\{350\text{-}200\text{-}80, 270\text{-}200\} = 70$. Все культуры распределили.

Число базисных переменных должно быть равно ($m + n – 1$), то есть 4 + 5 – 1 = 8. По таблице 2.8 количество занятых клеток 8, условие выполняется. Получим опорный план посева, для которого суммарная урожайность зерна:

F_1 =200·25 + 350·25 + 150·23+ 70·14 + 200·18 +80·15 + 250·50 + + 200·48 = 45080.

Проверяем полученный план на оптимальность. Для заполненных клеток найдем потенциалы строк и столбцов.

Полагая $u_1 = 0$, находим

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 25, \\ u_2 + v_4 = 25, \\ u_2 + v_5 = 23, \\ u_3 + v_1 = 14, \\ u_3 + v_3 = 18, \\ u_3 + v_5 = 15, \\ u_4 + v_2 = 50, \\ u_4 + v_5 = 48. \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = 25 - u_1 = 25 - 0 = 25, \\ v_4 = 25 - u_2 = 25 - (-3) = 28, \\ u_2 = 23 - v_5 = 23 - 26 = -3, \\ u_3 = 14 - v_1 = 14 - 25 = -11, \\ v_3 = 18 - u_3 = 18 - (-11) = 29, \\ v_5 = 15 - u_3 = 15 - (-11) = 26, \\ v_2 = 50 - u_4 = 50 - 22 = 28, \\ u_4 = 48 - v_5 = 48 - 26 = 22. \end{cases}$$

Для свободных клеток вычислим оценки:

$d_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 28 - 20 = 8;$

$d_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 29 - 22 = 7;$

$d_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 28 - 23 = 5;$

$d_{15} = u_1 + v_5 - c_{15} = 0 + 26 - 20 = 6;$

$d_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = (-3) + 25 - 21 = 1;$

$d_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = (-3) + 28 - 22 = 3;$

$d_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = (-3) + 29 - 20 = 6;$

$d_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = (-11) + 28 - 16 = 1;$

$d_{34} = u_3 + v_4 - c_{34} = (-11) + 28 - 21 = -4;$

$d_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = 22 + 25 - 40 = 7;$

$d_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = 22 + 29 - 46 = 5;$

$d_{44} = u_4 + v_4 - c_{44} = 22 + 28 - 42 = 8.$

Так как среди оценок свободных клеток имеется отрицательная оценка ($d_{34} = -4$), то план посева не является оптимальным, т.е. необходим пересчёт по циклу для клетки A_3B_4. Найдем цикл для клетки A_3B_4 (рис. 2.4).

Найдем $\Delta = min\{350, 80\} = 80$.

Старый цикл пересчета Цикл после пересчета

Рисунок 2.4. – Циклы пересчета единиц груза

После реализации цикла пересчета получаем табл. 2.9.

Таблица 2.9

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	25 200	20 -	22 -	23 -	20 -	200
A_2	21 -	22 -	20 -	25 270	23 230	500
A_3	14 70	16 -	18 200	21 80	15 -	350
A_4	40 -	50 250	46 -	42 -	48 200	450
Заявки b_j	270	250	200	350	430	Заявки b_j

По новому плану посева суммарная урожайность зерна составляет:

$F_2 = 200 \cdot 25 + 270 \cdot 25 + 230 \cdot 23 + 70 \cdot 14 + 200 \cdot 18 + 80 \cdot 21 + 250 \cdot 50 +$
$+200 \cdot 48 = 45400$.

Проверяем полученный план на оптимальность. Для заполненных клеток находим потенциалы строк и столбцов.

Полагая $u_1 = 0$, находим

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 25, \\ u_2 + v_4 = 25, \\ u_2 + v_5 = 23, \\ u_3 + v_1 = 14, \\ u_3 + v_3 = 18, \\ u_3 + v_4 = 21, \\ u_4 + v_2 = 50, \\ u_4 + v_5 = 48. \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = 25 - u_1 = 25 - 0 = 25, \\ u_2 = 25 - v_4 = 25 - 32 = -7, \\ v_5 = 23 - u_2 = 23 - (-7) = 30, \\ u_3 = 14 - v_1 = 14 - 25 = -11, \\ v_3 = 18 - u_3 = 18 - (-11) = 29, \\ v_4 = 21 - u_3 = 21 - (-11) = 32, \\ v_2 = 50 - u_4 = 50 - 18 = 32, \\ u_4 = 48 - v_5 = 48 - 30 = 18. \end{cases}$$

Для свободных клеток находим оценки:

$d_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 32 - 20 = 12;$

$d_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 29 - 22 = 7;$

$d_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 32 - 23 = 9;$

$d_{15} = u_1 + v_5 - c_{15} = 0 + 30 - 20 = 10;$

$d_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = (-7) + 25 - 21 = -3;$

$d_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = (-7) + 32 - 22 = 3;$

$d_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = (-7) + 29 - 20 = 2;$

$d_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = (-11) + 32 - 16 = 5;$

$d_{35} = u_3 + v_5 - c_{35} = (-11) + 30 - 15 = 4;$

$d_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = 18 + 25 - 40 = 3;$

$d_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = 18 + 29 - 46 = 1;$

$d_{44} = u_4 + v_4 - c_{44} = 18 + 32 - 42 = 8.$

Так как среди оценок свободных клеток имеется отрицательная оценка ($d_{21} = -3$), то план посева не является оптимальным, т.е. необходим пересчёт по циклу для клетки A_2B_1. Найдем цикл для клетки A_2B_1 (рис. 2.5).

Найдем $\Delta = min\{70, 270\} = 70$.

Старый цикл пересчета Цикл после пересчета

Рисунок 2.5. – Циклы пересчета единиц груза

После реализации цикла пересчета получаем табл. 2.10.

Таблица 2.10

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	25 200	20 -	22 -	23 -	20 -	200
A_2	21 70	22 -	20 -	25 200	23 230	500
A_3	14 -	16 -	18 200	21 150	15 -	350
A_4	40 -	50 250	46 -	42 -	48 200	450
Заявки b_j	270	250	200	350	430	Заявки b_j

По новому плану посева суммарная урожайность зерна составляет:

$F_3 = 200 \cdot 25 + 70 \cdot 21 + 200 \cdot 25 + 230 \cdot 23 + 200 \cdot 18 + 150 \cdot 21 + 250 \cdot 50 + {}$
$+ \; 200 \cdot 48 = 45610.$

Проверяем полученный план на оптимальность. Для заполненных клеток находим потенциалы строк и столбцов.

Полагая $u_1 = 0$, находим

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 25, \\ u_2 + v_1 = 21, \\ u_2 + v_4 = 25, \\ u_2 + v_5 = 23, \\ u_3 + v_3 = 18, \\ u_3 + v_4 = 21, \\ u_4 + v_2 = 50, \\ u_4 + v_5 = 48. \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = 25 - u_1 = 25 - 0 = 25, \\ u_2 = 21 - v_1 = 21 - 25 = -4, \\ v_4 = 25 - u_2 = 25 - (-4) = 29, \\ v_5 = 23 - u_2 = 23 - (-4) = 27, \\ v_3 = 18 - u_3 = 18 - (-8) = 26, \\ u_3 = 21 - v_4 = 21 - 29 = -8, \\ v_2 = 50 - u_4 = 50 - 21 = 29, \\ u_4 = 48 - v_5 = 48 - 27 = 21. \end{cases}$$

Для свободных клеток находим оценки:

$d_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 29 - 20 = 9;$

$d_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 26 - 22 = 4;$

$d_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 29 - 23 = 6;$

$d_{15} = u_1 + v_5 - c_{15} = 0 + 27 - 20 = 7;$

$d_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = (-4) + 29 - 22 = 3;$

$d_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = (-4) + 26 - 20 = 2;$

$d_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = (-8) + 25 - 14 = 3;$

$d_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = (-8) + 29 - 16 = 5;$

$d_{35} = u_3 + v_5 - c_{35} = (-8) + 27 - 15 = 4;$

$d_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = 21 + 25 - 40 = 6;$

$d_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = 21 + 29 - 46 = 1;$

$d_{44} = u_4 + v_4 - c_{44} = 21 + 32 - 42 = 8.$

Так как оценки всех свободных клеток положительные, следовательно, полученный план посева является оптимальным.

Таким образом, оптимальным является посев культур:

x_{11} = 200 га – рожь на участке 1;
x_{21} = 70 га – пшеница на участке 1;
x_{24} = 200 га – пшеница на участке 4;
x_{25} = 230 га – пшеница на участке 5;
x_{33} = 200 га – ячмень на участке 3;
x_{34} = 150 га – ячмень на участке 4;
x_{42} = 250 га – кукуруза на участке 2;
x_{45} = 200 га – кукуруза на участке 5,

По этому плану посева суммарная урожайность зерна составляет $F_{\text{опт}}$ = 45610 ед.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции геометрическим методом. Во всех задачах $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

1) $L = x_1 + 5x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_2 \leq 4, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 \leq 6. \end{cases}$$

2) $L = 4x_1 - 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 1. \end{cases}$$

3) $L = 4x_1 + x_2 \to max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ 2x_1 - x_2 \leq 8, \\ -x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_2 \leq 5. \end{cases}$$

4) $L = -5x_1 + x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \leq 2. \end{cases}$$

5) $L = 2x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 2. \end{cases}$$

6) $L = -4x_1 - x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 5, \\ -5x_1 + 2x_2 \leq 10. \end{cases}$$

7) $L = 3x_1 + x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 5. \end{cases}$$

8) $L = -x_1 + 3x_2 \to min$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_2 \geq 1, \\ x_1 - 3x_2 \leq 6. \end{cases}$$

9) $L = x_1 + 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \leq 8. \end{cases}$$

10) $L = x_1 + 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 16, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 2, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

11) $L = x_1 + 4x_2 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \leq 4. \end{cases}$$

12) $L = -3x_1 + 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ -x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 6. \end{cases}$$

13) $L = 2x_1 + 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ -2x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \leq 2, \\ x_2 \leq 5. \end{cases}$$

14) $L = 3x_1 + 4x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3, \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 42, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

15) $L = x_1 + x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 4. \end{cases}$$

16) $L = 3x_1 - 4x_2 \to min$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 9, \\ 3x_1 - x_2 \ge 3, \\ x_1 \le 4, \\ -x_2 \le 2. \end{cases}$$

17) $L = x_1 + x_2 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1 \le 3, \\ x_2 \ge 1. \end{cases}$$

18) $L = -6x_1 - 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \le 3. \end{cases}$$

19) $L = 2x_1 + x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ -8x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \le 3. \end{cases}$$

20) $L = -3x_1 + 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + x_2 \le 3, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_2 \ge 1, \\ x_1 - 3x_2 \le 6. \end{cases}$$

21) $L = x_1 - 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -1, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ 2x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 \le 5. \end{cases}$$

22) $L = 4x_1 - x_2 \to min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 0, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 5, \\ 2x_1 \le 3, \\ 4x_2 \le 5. \end{cases}$$

23) $L = 4x_1 + 4x_2 \to max$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \le 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \le 3, \\ x_1 + 3x_2 \ge 4. \end{cases}$$

24) $L = 3x_1 + 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 7, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 8, \\ -3x_1 + x_2 \le 8, \\ 2x_2 \ge 5. \end{cases}$$

Задание 2. Заводу для процесса изготовления двух видов изделий *A* и *B* требуется: во-первых, наличие стали, во-вторых, последовательная обработка на токарных и фрезерных станках. Потребности каждого ресурса на единицу выпускаемого изделия, общие запасы ресурсов и прибыль от реализации изделий приведены в таблице:

Производственные характеристики	Затраты на одно изделие		Ресурсы
	A	*B*	
Сталь, кг	20	$30 + 2n$	$120 + 10k$
Токарные станки, станкочасов	$100 - 2m$	200	800
Фрезерные станки, станкочасов	30	$110 - 2n$	$330 - 10k$
Прибыль на изделие, тыс.руб	$2 + m$	$n - 2$	

Примечание: вместо букв *m*, *n*, *k* следует подставить три последних цифры номера зачетной книжки соответственно.

Определить план выпуска продукции, который обеспечивает максимальную прибыль.

Задание 3. Три хлебокомбината ежедневно производят A_1, A_2, A_3 тонн муки. Мука потребляется четырьмя хлебозаводами, потребности которых ежедневно равны соответственно B_1, B_2, B_3, B_4. Тарифы перевозок 1 тонны муки с хлебокомбината к каждому хлебозаводу заданы в виде матрицы. Составить такой план доставки муки, при котором общая стоимость затрат на перевозку была бы минимальной.

1

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		100	60	190	150
A_1	140	2	5	4	2
A_2	200	4	3	8	9
A_3	160	7	6	1	3

2

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		120	180	210	120
A_1	240	6	4	2	6
A_2	200	4	9	7	4
A_3	260	10	3	5	10

3

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		150	140	170	150
A_1	210	6	3	1	6
A_2	170	2	4	9	2
A_3	220	5	7	8	5

4

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		90	200	120	90
A_1	130	4	9	1	7
A_2	210	6	3	4	5
A_3	160	10	4	8	2

5

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		240	200	90	170
A_1	300	9	10	5	7
A_2	150	2	4	3	1
A_3	250	3	8	6	5

6

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		120	80	210	190
A_1	190	2	7	6	10
A_2	200	9	4	3	1
A_3	210	3	2	5	8

7

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		110	100	150	140
A_1	180	3	6	8	3
A_2	100	5	2	9	4
A_3	220	4	5	1	7

8

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		200	140	210	150
A_1	220	6	3	9	4
A_2	250	5	4	1	5
A_3	230	2	7	2	10

9

Постав-щик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		140	200	170	90
A_1	280	4	9	8	2
A_2	190	10	4	1	7
A_3	230	2	7	2	10

10

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		200	100	80	120
A_1	180	1	6	9	2
A_2	150	4	5	3	7
A_3	170	8	10	4	5

11

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		230	140	120	210
A_1	200	4	1	5	6
A_2	220	3	8	2	9
A_3	280	9	4	7	7

12

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		170	130	180	120
A_1	200	1	10	9	5
A_2	190	9	5	3	7
A_3	210	8	2	4	6

13

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		140	100	100	160
A_1	160	5	4	9	2
A_2	190	3	4	8	1
A_3	150	7	6	5	7

14

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		170	80	150	100
A_1	120	4	1	2	6
A_2	180	9	4	7	10
A_3	200	3	8	5	3

15

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		150	180	170	200
A_1	210	8	3	6	10
A_2	290	1	4	5	3
A_3	200	9	7	2	6

16

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		70	50	80	100
A_1	100	5	3	4	2
A_2	70	4	2	6	1
A_3	130	1	4	5	3

17

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		90	130	110	150
A_1	140	8	4	10	2
A_2	150	2	5	7	3
A_3	190	4	6	1	9

18

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		170	200	40	90
A_1	150	9	4	3	1
A_2	250	2	6	4	10
A_3	100	3	10	5	7

19

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		190	200	180	130
A_1	200	4	2	8	7
A_2	350	3	5	9	6
A_3	150	5	10	1	3

20

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		150	160	180	110
A_1	240	8	6	7	2
A_2	190	4	5	3	9
A_3	170	1	10	4	3

21

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		130	90	50	230
A_1	180	9	4	7	10
A_2	140	2	8	2	3
A_3	180	4	1	5	6

22

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		200	130	120	150
A_1	160	5	6	8	9
A_2	250	7	10	1	4
A_3	190	2	3	4	3

23

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		190	200	140	70
A_1	100	7	10	1	4
A_2	350	2	3	4	3
A_3	150	1	6	8	9

24

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		100	160	130	110
A_1	200	5	10	1	5
A_2	190	4	2	8	7
A_3	110	3	5	9	6

25

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		200	160	190	150
A_1	170	9	4	6	3
A_2	290	2	7	10	4
A_3	240	3	1	5	8

26

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		130	140	90	240
A_1	220	10	1	5	3
A_2	200	3	8	2	9
A_3	180	6	4	7	4

27

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		160	130	190	120
A_1	180	1	10	9	5
A_2	190	8	5	3	6
A_3	230	9	2	4	7

28

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		130	100	110	160
A_1	170	5	4	10	2
A_2	190	3	5	8	1
A_3	140	7	6	5	6

29

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		180	80	140	100
A_1	120	4	1	2	6
A_2	200	8	4	7	9
A_3	180	3	7	5	3

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ибятов Р.И. Методы оптимизации в задачах математического моделирования: методические указания для лабораторных и самостоятельных работ. – Казань: Изд-во Казанского ГАУ, 2016. – 32 с.

2. Сдвижков О.А. Практикум по методам оптимизации: Практикум. – М.: Вузовский учебник, НИЦ ИНФРА-М, 2014. – 231 с.

3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2 – 6-е изд. - М.: Оникс 21 век: Мир и Образование, 2012. – 368 с.

4. Киселева Н.Г. Системный анализ и моделирование экосистем: конспект лекций / Н.Г. Киселева. - Йошкар-Ола: Марийский гос. технический ун-т, 2008. - 127 с.