

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

«Казанский государственный аграрный университет»

Институт механизации и технического сервиса

Кафедра общетехнических дисциплин

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Казань, 2022

УДК 539.3/.6

ББК 30.121

Составители: Г.В. Пикмуллин, В.М. Медведев, С.М. Яхин, А.А. Мустафин, Р.Х. Марданов, Т.Н. Вагизов, Р.Р. Ахметзянов, С.А. Синицкий, Р.Н. Хафизов

Рецензенты:

Доктор технических наук, заведующий кафедрой «Тракторы, автомобили и безопасность технологических процессов» К.А. Хафизов

Доктор технических наук, профессор кафедры «Оборудование пищевых производств» КНИТУ А.Н. Николаев.

Печатается по решению методического совета Казанского ГАУ 07.02.2022 г., протокол № 4.

Учебное пособие «Сопротивление материалов» обсуждено, одобрено и рекомендовано к печати на заседании кафедры общепрофессиональных дисциплин Казанский ГАУ 24.01.2022 года, протокол № 7 и на заседании методической комиссии Института механизации и технического сервиса Казанского ГАУ 27.01.2022 г., протокол № 6.

Пикмуллин, Г.В. Учебное пособие «Сопротивление материалов» /Г.В. Пикмуллин, В.М. Медведев, С.М. Яхин, А.А. Мустафин, Р.Х. Марданов, Вагизов Т.Н., Ахметзянов Р.Р., С.А.Синицкий, Р.Н. Хафизов - Казань: Изд-во Казанского ГАУ, 2022. - 84 с. ISBN 978-5-6044928-2-6

Учебное пособие предназначено для студентов Казанского ГАУ очной и заочной формы обучения, изучающих курс «Сопротивление материалов». Содержание учебного пособия соответствует Федеральному Государственному образовательному стандарту высшего образования по направлениям подготовки: 35.03.06 - «Агроинженерия», 23.03.03 - «Эксплуатация транспортно - технологических машин и комплексов», 20.03.01 «Техносферная безопасность», 44.03.04 - «Профессиональное обучение» и 23.05.01 – «Наземные транспортно-технологические средства».

УДК 539.3/.6

ББК 30.121

© Г.В. Пикмуллин, В.М. Медведев, С.М. Яхин, А.А. Мустафин, Р.Х. Марданов, Т.Н. Вагизов, Р.Р. Ахметзянов, С.А. Синицкий, Р.Н. Хафизов

© Казанский государственный аграрный университет, 2022 г.

Введение

Данное учебное пособие предназначено для улучшения самостоятельной работы студентов Института механизации и технического сервиса при выполнении практических работ, расчетно-проектировочных заданий, для более глубокого изучения некоторых разделов учебного материала по курсу «Сопротивление материалов».

В данном пособии приведена методика решения задач, а также даны некоторые данные по справочным материалам.

Задача данного учебного пособия – помочь студентам правильно применять методы сопротивления материалов в практических расчетах на прочность, жесткость различных деталей сельскохозяйственных машин и использоваться студентами для самостоятельной работы по изучению курса, решения практических задач и для выполнения контрольных работ, а также при подготовке к экзаменам по дисциплине «Сопротивление материалов».

Знания и навыки, полученные при изучении данного курса «Сопротивление материалов», широко применяются студентами при изучении других дисциплин на следующих курсах.

Настоящее учебное пособие разработано на основе многолетнего опыта преподавания данной дисциплины на кафедре «Общеинженерные дисциплины» Казанского ГАУ.

1 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Простейшей геометрической характеристикой является площадь. Поперечное сечение можно представить состоящим из бесчисленного множества элементарных площадок dA (рисунок 1.1).

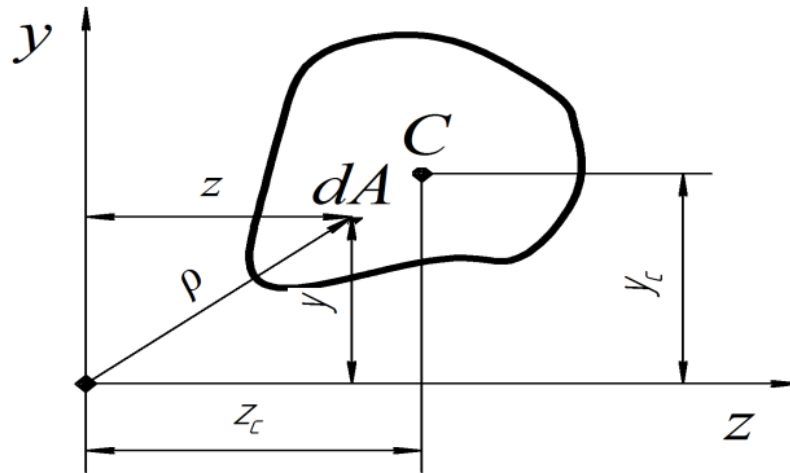


Рисунок 1.1 – К определению геометрических характеристик сечения

$$A = \int_A dA \quad (1.1)$$

В расчетах на прочность и жесткость при центральном растяжении, деформации, потенциальная энергия деформации зависит от площади поперечного сечения. При расчетах на изгиб, кручение, сложное сопротивление, а также при расчетах на устойчивость сжатых элементов используется более сложные геометрические характеристики сечений: статические моменты и моменты инерции.

Статический момент площади сечения

Статическим моментом площади сечения называется величина, равна – интегральной сумме произведения элементарных площадок на расстояние их

до рассматриваемой оси. Он обозначается буквой S_c индексом оси, относительно которой берется:

S_y - статический момент относительно оси y , m^3 .

S_z - статический момент относительно оси z , m^3 .

$$S_y = \int_A dA \times z, \quad S_z = \int_A dA \times y. \quad (1.2)$$

При сложной форме сечения:

$$S_y = \sum_{i=1}^n A_i \times Z_i, \quad S_z = \sum_{i=1}^n A_i \times y_i, \quad (1.3)$$

где A_i - площадь i -ой составной части сечения,

Z_i, Y_i - координаты центров тяжести i -ой составной части сечения,

n – число составных частей сечения.

Координаты центра тяжести сложного сечения по отношению к осям Y и Z определяются по формулам:

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \times Z_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \times y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad (1.4)$$

где y_c, z_c - координаты центра тяжести сложного сечения.

Размерность статических моментов - cm^3, m^3 .

Момент инерции площади сечения

Моментом инерции площади сечения называется величина, равная интегральной сумме произведения элементарных площадок на квадраты расстояний их до рассматриваемой оси.

Он обозначается буквой I с индексом оси, относительно которой берется.

I_y – момент инерции относительно оси Y ,

I_z – момент инерции относительно оси Z .

Размерность моментов инерции - cm^4, m^4 .

Различают следующие моменты инерции:

1) осевой, взятый относительно оси, которая лежит в плоскости сечения:

$$I_y = \int_A dA \times Z^2, \quad I_z = \int_A dA \times y^2; \quad (1.5)$$

2) полярный, взятый относительно оси, перпендикулярной к плоскости сечения:

$$I_p = \int_A dA \times \rho^2; \quad (1.6)$$

3) центробежный, взятый относительно двух взаимно перпендикулярных осей, лежащих в плоскости сечения:

$$I_{yz} = \int_A dA \times yz \quad (1.7)$$

Осевые и полярный моменты инерции всегда больше нуля, а центробежный момент инерции может быть больше нуля, может быть меньше нуля и может быть равен нулю.

Центробежный момент инерции площади сечения относительно осей, из которых одна или обе оси совпадают с осями симметрии ее равен нулю.

Сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции этого сечения относительно точки пересечения указанных осей:

$$I_y + I_z = I_p. \quad (1.8)$$

Геометрические характеристики профилей стандартного проката (двутавр, швеллер, уголок) даются в таблицах, а геометрические характеристики сечений простой формы вычисляются по приведенным формулам.

ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ МОМЕНТАМИ ИНЕРЦИИ В СЛУЧАЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

Для вычисления моментов инерции сечения сложной фигуры (сечения) применяются формулы перехода от центральных к параллельным им осям.

Эти формулы имеют следующий вид:

$$I_z = I_{z_c} + a^2 A, \quad I_y = I_{y_c} + b^2 A, \quad I_{yz} = I_{y_c z_c} + abA, \quad (1.9)$$

где a, b - расстояния между осями соответственно Z и Z_c , Y и Y_c (рисунок 1.2). Координаты a и b должны быть подставлены со своими знаками.

При повороте осей координат на угол α между моментами инерции установлены зависимости (рисунок 1.2):

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha + I_{zy} \sin 2\alpha, \text{ а)} \\ I_{y_1} &= I_z \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{zy} \sin 2\alpha, \text{ б)} \\ I_{z_1 y_1} &= \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (1.10)$$

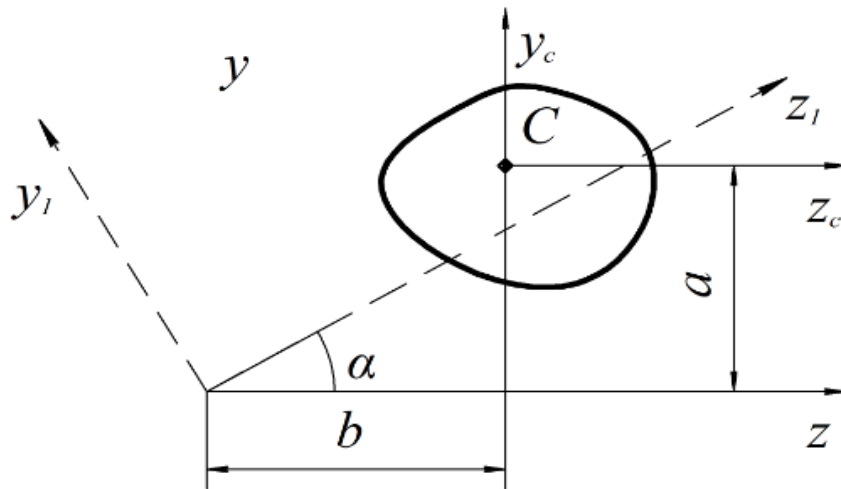


Рисунок 1.2 – К определению моментов инерции относительно параллельных осей

Здесь $I_{z_1}, I_{y_1}, I_{z_1 y_1}$ - моменты инерции относительно осей Z_1, Y_1 повернутых на угол α против часовой стрелки по отношению к осям Z и Y . Сумма осевых моментов инерции при повороте осей не меняется:

$$I_{z_1} + I_{y_1} = I_z + I_y. \quad (1.11)$$

Основные моменты инерции сложного сечения определяются:

$$\begin{aligned} I_z &= \int_A y^2 dA = \int_{A_1} y^2 dA + \int_{A_2} y^2 dA + \dots, \\ I_y &= \int_A z^2 dA = \int_{A_1} z^2 dA + \int_{A_2} z^2 dA + \dots, \\ I_{zy} &= \int_A zy dA = \int_{A_1} zy dA + \int_{A_2} zy dA + \dots, \\ A &= A_1 + A_2 + \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

Таким образом, моменты инерции сложной фигуры определяются как сумма моментов инерции составляющих частей этой фигуры.

ГЛАВНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Через центр тяжести сечения можно провести две взаимно - перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю. Эти оси называются главными центральными осями инерции.

Осевые моменты инерции относительно главных осей называются главными моментами инерции. Главные моменты инерции имеют экстремальные значения: относительно одной главной оси момент инерции максимальный, относительно другой главной оси – минимальный. Если сечение имеет хотя бы одну ось симметрии, то эта ось и ось, к ней перпендикулярная, проходящие через центр тяжести сечения, являются главными центральными осями инерции.

Положение главных центральных осей определяется углом α (рисунок 1.3).

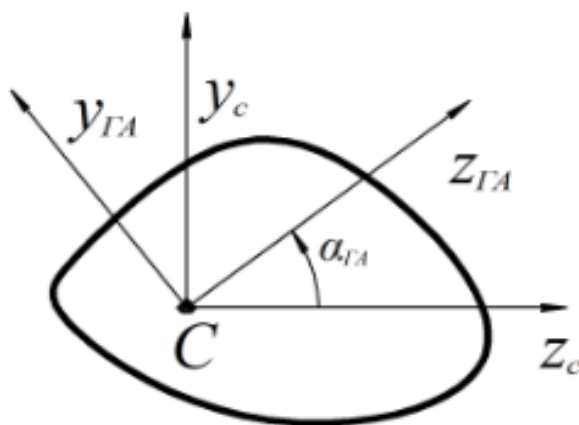


Рисунок 1.3 – Определение положения главных центральных осей

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{zn} = -\frac{2I_{zcy_c}}{I_{z_c} - I_{y_c}}. \quad (1.13)$$

Формула (1.13) дает два значения угла: α_{GA} и $(\alpha_{GA}+90^\circ)$. Положительный угол α_{GA} откладывается от оси Z_c против хода часовой стрелки. Часто главные оси обозначают так:

$$Z_{GA} = U, \quad Y_{GA} = V.$$

Для практического нахождения значений главных моментов инерции сечения вместо формул 10а и 10б пользуются формулой:

$$I_{\max/\min} = \frac{1}{2}(I_{z_c} + I_{y_c}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_{z_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{z_c y_c}^2}. \quad (1.14)$$

Знак плюс принимается при вычислении I_{\max} и знак минус – при вычислении I_{\min} .

МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЙ ПРОСТОЙ ФОРМЫ

Определим моменты инерции относительно осей, совпадающих со сторонами, и относительно центральных осей (рисунок 1.4).

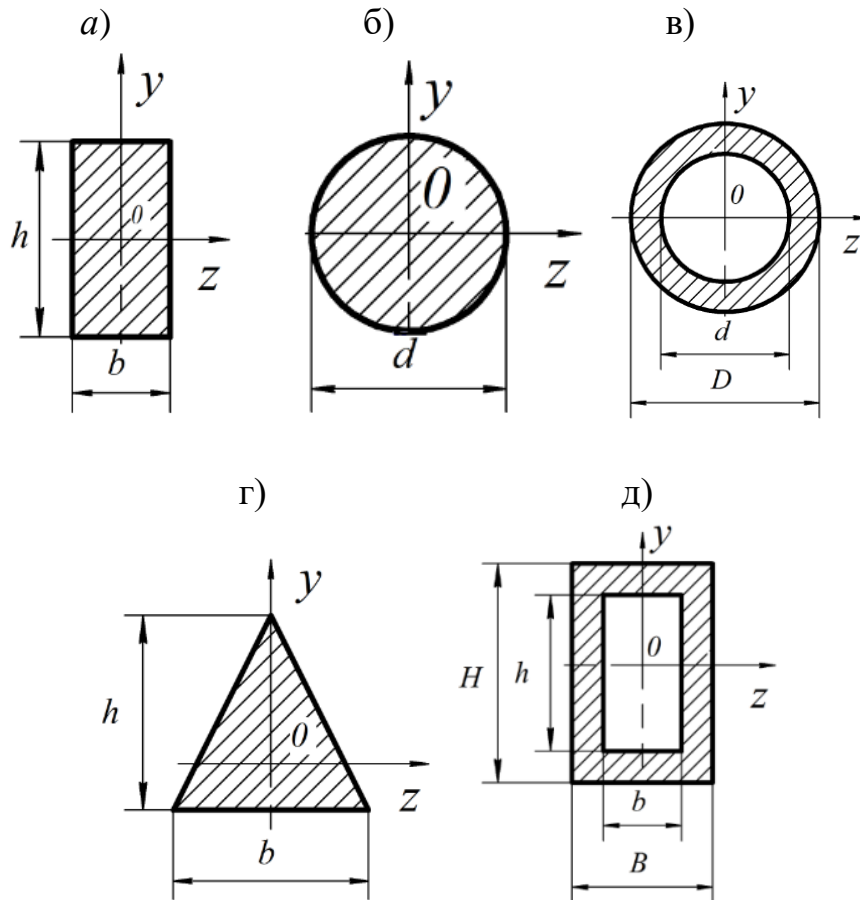


Рисунок 1.4 – Сечения простых фигур для определения момента инерции

1. Для прямоугольника (рисунок 1.4а):

$$I_z = \frac{bh^3}{12}, \quad I_y = \frac{hb^3}{12}, \quad (1.15)$$

I_z - осевой момент инерции сечения относительно оси Z, m^4 ;

I_y - осевой момент инерции сечения относительно оси Y, m^4 ;

I_{zy} - Центробежный момент инерции относительно оси Z, Y, m^4 .

$$I_{zy} = 0.$$

2. Для круга (рисунок 1.4б):

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4, \quad (1.16)$$

I_p - полярный момент инерции, m^4 ;

d – диаметр круга, м.

$$I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4, \quad (1.17)$$

I_z, I_y – осевые моменты инерции, m^4 .

$$I_{zy} = 0.$$

3. Для кольца (рисунок 1.4в):

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - K^4) \approx 0,1D^4(1 - K^4), \text{ где } k = \frac{d}{D}, \quad (1.18)$$

$$I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64} (1 - K^4) \approx 0,05D^4(1 - K^4), \quad (1.19)$$

$$I_{zy} = 0.$$

4. Для равнобедренного треугольника (рисунок 1.4г):

$$I_z = \frac{bh^3}{36}, \quad I_y = \frac{b^3h}{48}, \quad I_{zy} = 0. \quad (1.20)$$

5. Для коробчатого сечения (рисунок 1.4д):

$$I_z = \frac{BH^3 - bh^3}{12}, \quad I_y = \frac{HB^3 - hb^3}{12}, \quad I_{zy} = 0. \quad (1.21)$$

ПОНЯТИЕ О РАДИУСЕ И ЭЛЛИПСЕ ИНЕРЦИИ

Момент инерции сечения относительно какой-либо оси можно представить в виде произведения площади фигуры на квадрат некоторой величины, называют радиусом инерции.

$$I_z = \int_A y^2 dA = A i_z^2, \quad (1.22)$$

где i_z – радиус-инерции относительно оси Z.

Из выражения (1.5) следует, что:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}. \quad (1.23)$$

Аналогично радиус инерции площади сечения относительно оси Y:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}. \quad (1.24)$$

Главным центральным осям инерции соответствуют главные радиусы инерции:

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}}, \quad i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}}. \quad (1.25)$$

Например, для прямоугольника, изображенного на рисунок 1.4а, главные радиусы инерции:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \frac{h}{2\sqrt{3}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{b^3h}{12bh}} = \frac{b}{2\sqrt{3}}. \quad (1.26)$$

Построим на главных центральных осях инерции сложного сечения эллипс с полуосями, равными главным радиусам инерции, причем вдоль оси U, отложим отрезок i_u , а вдоль оси V - отрезок i_v .

Такой эллипс, называемый эллипсом инерции (рисунок 1.5), обладает следующим замечательным свойством: радиус инерции относительно любой центральной оси Z определяется как перпендикуляр OA, проведенный из центра эллипса на касательную, параллельную данной оси. Измерив тем отрезок $OA = i_z$, находим момент инерции:

$$I_z = A \times i_z^2. \quad (1.27)$$

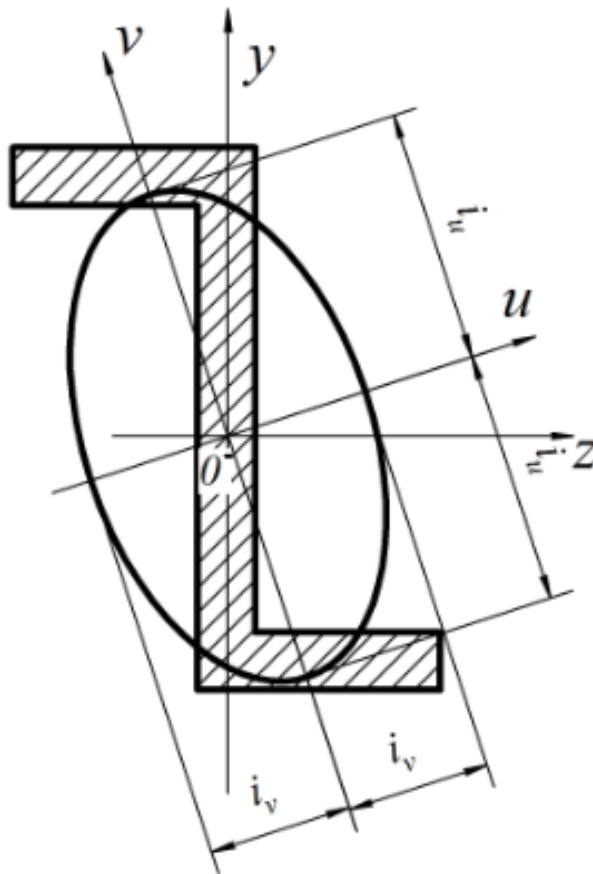


Рисунок 1.5 - Эллипс инерции

ПРИМЕР. ОПРЕДЕЛИТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛОЖНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Для заданного сложного сечения, состоящего из прямоугольника швеллера и равнобокого уголка, требуется определить положение главных центральных осей, вычислить величины главных моментов инерции, определить осевые моменты инерции сложного сечения относительно осей, повернутых на угол 30° по часовой стрелке по отношению к главным осям (рисунок 1.6), построить на главных осях эллипс инерции.

Исходные данные: прямоугольник 240x12 мм, равнобокий уголок 63x63x5, швеллер № 18а.

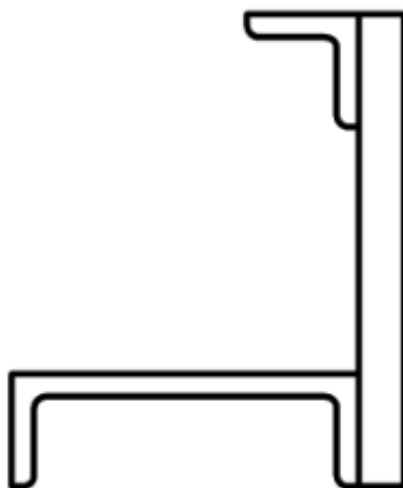
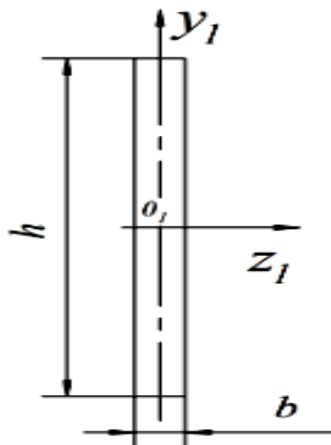


Рисунок 1.6 – Схема сложного поперечного сечения к заданию
Прямоугольник 240х12 мм, равнобокий уголок 63х63х5, швеллер № 18^а.

Разбиваем сложное сечение на составные части - прямоугольник, равнобокий уголок и определяем геометрические характеристики для каждой фигуры (сечения).

Прямоугольник:



$$h=24 \times 10^{-2} \text{ м}, b=1,2 \times 10^{-2} \text{ м},$$

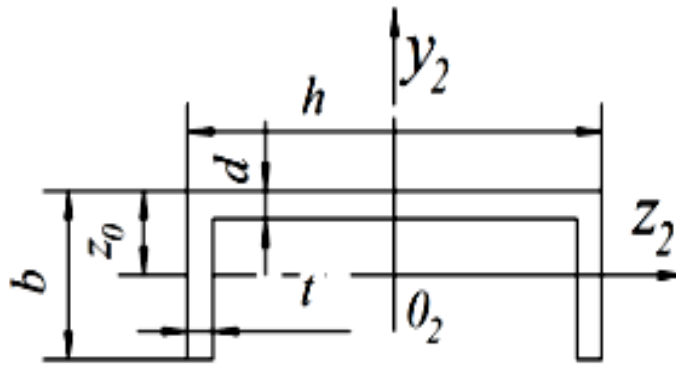
$$A_1 = bh = 28,8 \times 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$I_{z_1} = \frac{bh^3}{12} = 1382 \times 10^{-8} \text{ м}^4,$$

$$I_{y_1} = \frac{hb^3}{12} = 3,46 \times 10^{-8} \text{ м}^4,$$

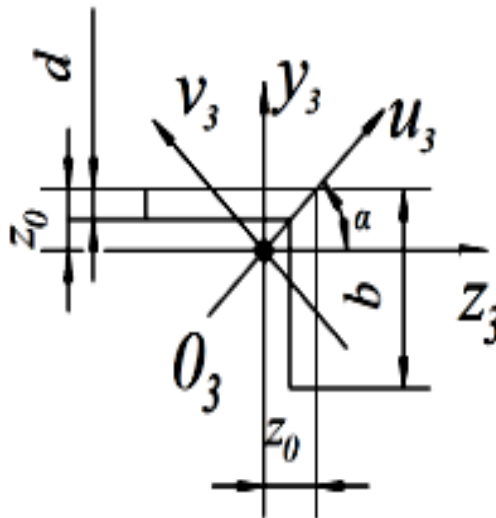
$$I_{z_1 y_1} = 0.$$

Швеллер № 18^а



$$\begin{aligned} h &= 0,18 \text{ м}, & A_2 &= 22,2 \times 10^{-4} \text{ м}^2, \\ b &= 0,074 \text{ м}, & I_{z_2} &= 105 \times 10^{-8} \text{ м}^4, \\ t &= 0,0093 \text{ м}, & I_{y_2} &= 1190,2 \times 10^{-8} \text{ м}^4, \\ d &= 0,0051 \text{ м}, & I_{z_2 y_2} &= 0. \\ z_0 &= 0,0213 \text{ м}, \end{aligned}$$

Равнобокий уголок 63х 63 х 5



$$\begin{aligned} b &= 0,063 \text{ м}, \quad d = 0,005 \text{ м}, \quad z_0 = 0,0174 \text{ м}, \\ A_3 &= 6,13 \times 10^{-4} \text{ м}^2, \quad \alpha = 45^\circ, \\ I_{z_3} &= I_{y_3} = 23,1 \times 10^{-8} \text{ м}^4, \\ I_{\max} &= I_{u_3} = 36,6 \times 10^{-8} \text{ м}^4, \\ I_{\min} &= I_{v_3} = 9,15 \times 10^{-8} \text{ м}^4, \end{aligned}$$

$$I_{z_3 y_3} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} \sin 2(-45^\circ) = \frac{36,6 \times 10^{-8} - 9,15 \times 10^{-8}}{2} \times (-1) = -13,54 \times 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Определяем положение центра тяжести сложного сечения. Для этого выбираем вспомогательные оси Z, Y (рисунок 1.7). Определяем расстояние Z_i, Y_i от выбранных осей Z, Y до центров тяжести отдельных фигур (сечений):

$$y_1 = \frac{h}{2} = 12 \times 10^{-2} \text{ м.}, \quad z_1 = 18,06 \times 10^{-2} \text{ м.},$$

$$y_2 = 5,27 \times 10^{-2} \text{ м.}, \quad z_2 = 9 \times 10^{-2} \text{ м.},$$

$$y_3 = 22,26 \times 10^{-2} \text{ м.}, \quad z_3 = 16,26 \times 10^{-2} \text{ м.}$$

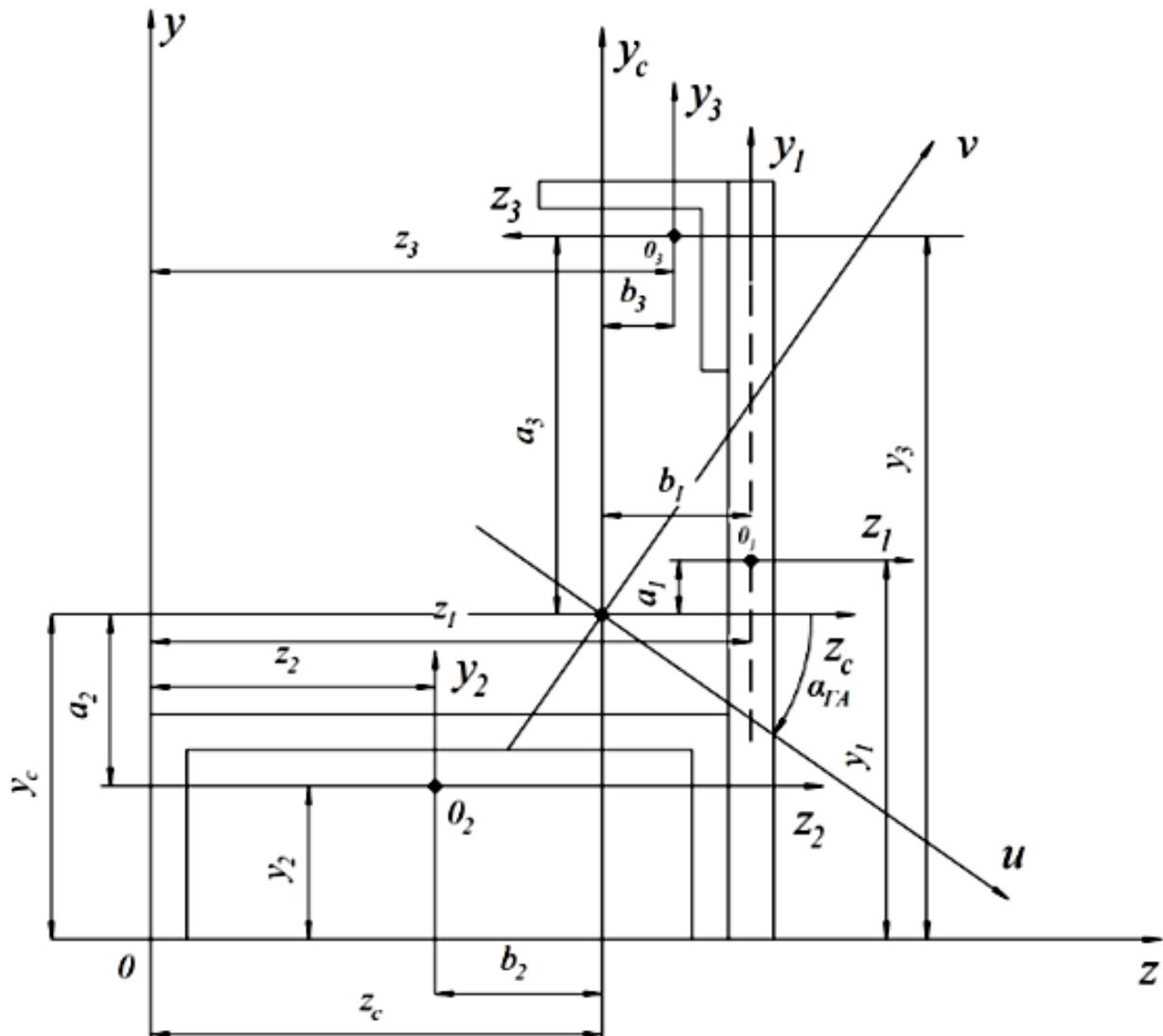


Рисунок 1.7 – Схема для определения положения центра тяжести сложного сечения

Определяем положение центра тяжести сложного сечения:

$$Z_c = \frac{A_1 \times Z_1 + A_2 \times Z_2 + A_3 \times Z_3}{A_1 + A_2 + A_3}; \quad Y_c = \frac{A_1 \times Y_1 + A_2 \times Y_2 + A_3 \times Y_3}{A_1 + A_2 + A_3},$$

$$Z_c = \frac{(28,8 \times 18,06 + 22,2 \times 9 + 6,13 \times 16,26) \times 10^{-6}}{57,13 \times 10^{-4}} = 14,62 \times 10^{-2} \text{ м.},$$

$$y_c = \frac{(28,8 \times 12 + 22,2 \times 5,27 + 6,13 \times 22,26) \times 10^{-6}}{57,13 \times 10^{-4}} = 10,48 \times 10^{-2} \text{ м.}$$

Точка «с» - центр тяжести сложного сечения.

Вычисляем расстояния:

а) между осями Z_c и Z_1, Z_2, Z_3

$$a_1 = y_1 - y_c = 1,52 \times 10^{-2} \text{ м,}$$

$$a_2 = y_2 - y_c = -5,21 \times 10^{-2} \text{ м,}$$

$$a_3 = y_3 - y_c = 11,78 \times 10^{-2} \text{ м.}$$

б) между осями Y_c и Y_1, Y_2, Y_3

$$b_1 = z_1 - z_c = 3,44 \times 10^{-2} \text{ м,}$$

$$b_2 = z_2 - z_c = -5,62 \times 10^{-2} \text{ м,}$$

$$b_3 = z_3 - z_c = 1,64 \times 10^{-2} \text{ м.}$$

Вычисляем осевые моменты инерции сложного сечения относительно центральных осей Z_c и Y_c .

$$I_{Z_c} = I_{Z_c}^{(1)} + I_{Z_c}^{(2)} + I_{Z_c}^{(3)}; I_{Y_c} = I_{Y_c}^{(1)} + I_{Y_c}^{(2)} + I_{Y_c}^{(3)},$$

где $I_{Z_c}^{(1)}, I_{Z_c}^{(2)}, I_{Z_c}^{(3)}$ и $I_{Y_c}^{(1)}, I_{Y_c}^{(2)}, I_{Y_c}^{(3)}$ - осевые моменты инерции простых фигур 1,2,3 относительно центральных осей I_{Z_c} и I_{Y_c} .

Тогда:

$$I_{Z_c} = I_{Z_1} + a_1^2 A_1 + I_{Z_2} + a_2^2 A_2 + I_{Z_3} + a_3^2 A_3,$$

$$I_{Y_c} = I_{Y_1} + b_1^2 A_1 + I_{Y_2} + b_2^2 A_2 + I_{Y_3} + b_3^2 A_3.$$

Полученные данные расчета записываем в таблицу 1.1.

Таблица 1.1 - Полученные данные расчета

Номера элементов	A_i $\times 10^{-4}$ м^2	Координаты центра тяжести элементов		Моменты инерции относительно центральных осей элементов		
		$Z_i \times 10^{-2}$ м	$Y_i \times 10^{-2}$ м	$I_{Z_i} \times 10^{-8}$ м^4	$I_{Y_i} \times 10^{-8}$ м^4	$I_{Z_i Y_i} \times 10^{-8}$ м^4
1	28,8	18,06	12,0	1382	3,46	0
2	22,2	9,0	5,27	105	1190	0
3	6,13	16,26	22,26	23,1	23,1	-13,54
Σ	57,13	-	-	1510,1	1216,56	-13,54

Центробежный момент инерции сложного сечения:

$$I_{Z_c Y_c} = I_{Z_c Y_c}^{(1)} + I_{Z_c Y_c}^{(2)} + I_{Z_c Y_c}^{(3)},$$

где $I_{Z_c Y_c}^{(1)}, I_{Z_c Y_c}^{(2)}, I_{Z_c Y_c}^{(3)}$ - центробежные моменты инерции простых фигур 1,2,3 относительно осей Z_c и Y_c .

Тогда:

$$I_{Z_c Y_c} = I_{Z_1 Y_1} + a_1 b_1 A_1 + I_{Z_2 Y_2} + a_2 b_2 A_2 + I_{Z_3 Y_3} + a_3 b_3 A_3.$$

Полученные данные расчета записываем в таблицу 1.2.

Таблица 1.2 - Полученные данные расчета

Номера элемен- тов	$A_i b_i \times 10^{-8}$ м^4	$A_i a_i \times 10^{-8}$ м^4	$A_i b_i a_i \times 10^{-8}$ м^4	Моменты инерции элементов относительно центральных осей сложного сечения		
				$I_{Z_c} \times 10^{-8}$ м^4	$I_{Y_c} \times 10^{-8}$ м^4	$I_{Z_c Y_c} \times 10^{-8}$ м^4
1	340,70	66,53	150,59	1448,53	344,16	150,59
2	701,70	602,51	650,02	707,51	1891,07	650,02
3	16,49	850,66	118,43	873,76	39,59	104,89
Σ	1058,26	1519,70	919,04	3029,8	2274,82	905,5

Вычисляем осевые и центробежный моменты инерции сложного сечения:

$$I_{Z_c} = (1510,1 + 1519,7) \times 10^{-8} = 3029,8 \times 10^{-8} \text{м}^4,$$

$$I_{Y_c} = (1216,56 + 1058,26) \times 10^{-8} = 2274,82 \times 10^{-8} \text{м}^4,$$

$$I_{Z_c Y_c} = (-13,54 + 919,04) \times 10^{-8} = 905,5 \times 10^{-8} \text{м}^4.$$

Результаты записываем в таблицу 1.1.

Определяем положение главных центральных осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{\text{гл}} = -\frac{2I_{Z_c Y_c}}{I_{Z_c} - I_{Y_c}} = \frac{2 \times 905,5 \times 10^{-8}}{(3029,8 - 2274,82) \times 10^{-8}} = -2,399,$$

$$2\alpha_{\text{гл}} = -67,38^\circ; 2\alpha_{\text{гл}} + 180^\circ = -67,38^\circ + 180^\circ,$$

$$\alpha_{1\text{гл}} = -33^\circ 41'; \alpha_{2\text{гл}} = -33^\circ 41' + 90^\circ.$$

Главные оси U и V (рисунок 1.8).

Вычисляем главные моменты инерции:

$$I_{\min}^{max} = I_{u,v} = \frac{I_{z_c} + I_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{z_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{z_c y_c}^2};$$

$$I_{u,v} = \frac{(3029,8 + 2274,82) \times 10^{-8}}{2} \pm$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{(3029,8 \times 10^{-8} - 2274,82 \times 10^{-8})^2 + 4(905,5 \times 8)^2};$$

$$I_u = I_{\max} = 3633,6 \times 10^{-8} \text{ м}^4; I_v = I_{\min} = 1670,92 \times 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Проверка вычисления

Проверяем выполнение равенства:

$$I_u + I_v = I_{z_c} + I_{y_c},$$

$$3633,6 \times 10^{-8} + 1670,82 \times 10^{-8} = 3029,7 \times 10^{-8} + 2247,82 \times 10^{-8},$$

$$5304,52 \times 10^{-8} = 5304,52 \times 10^{-8}.$$

Центробежный момент инерции относительно главных осей:

$$I_{uv} = \frac{I_{z_c} - I_{y_c}}{2} \sin 2\alpha_{\text{гл}} + I_{z_c y_c} \times \cos 2\alpha_{\text{гл}},$$

$$I_{uv} = \frac{3029,7 \times 10^{-8} - 2274,82 \times 10^{-8}}{2} \times (-0,923) + 905,5 \times 10^{-8} \times 0,384 =$$
$$(-348,3 + 347,7) \times 10^{-8} \cong 0.$$

Построение эллипса инерции на главных осях

Главные радиусы инерции:

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}} = \sqrt{\frac{3633,6 \times 10^{-8}}{57,13 \times 10^{-4}}} = 7,98 \times 10^{-2} \text{ м},$$

$$i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}} = \sqrt{\frac{1670,92 \times 10^{-8}}{57,13 \times 10^{-4}}} = 5,41 \times 10^{-2} \text{ м}.$$

Вычислим основные моменты инерции относительно осей Z' и Y' , повернутых на 30° по часовой стрелке по отношению к главным осям U , V - Для этого находим радиусы инерции $i_{z'}$ и $i_{y'}$ (рисунок 1.8):

$$i_{z'} = 7,42 \times 10^{-2} \text{ м}, i_{y'} = 5,810^{-2} \text{ м}.$$

$$I_{z'} = A \times i_{z'}^2 = 57,13 \times (7,42 \times 10^{-2})^2 = 3143 \times 10^{-8} \text{ м}^4,$$

$$I_{y'} = A \times i_{y'}^2 = 57,13 \times (5,8 \times 10^{-2})^2 = 2161,59 \times 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Вычисление моментов инерции относительно осей, повернутых на любой угол, выполняется аналогично.

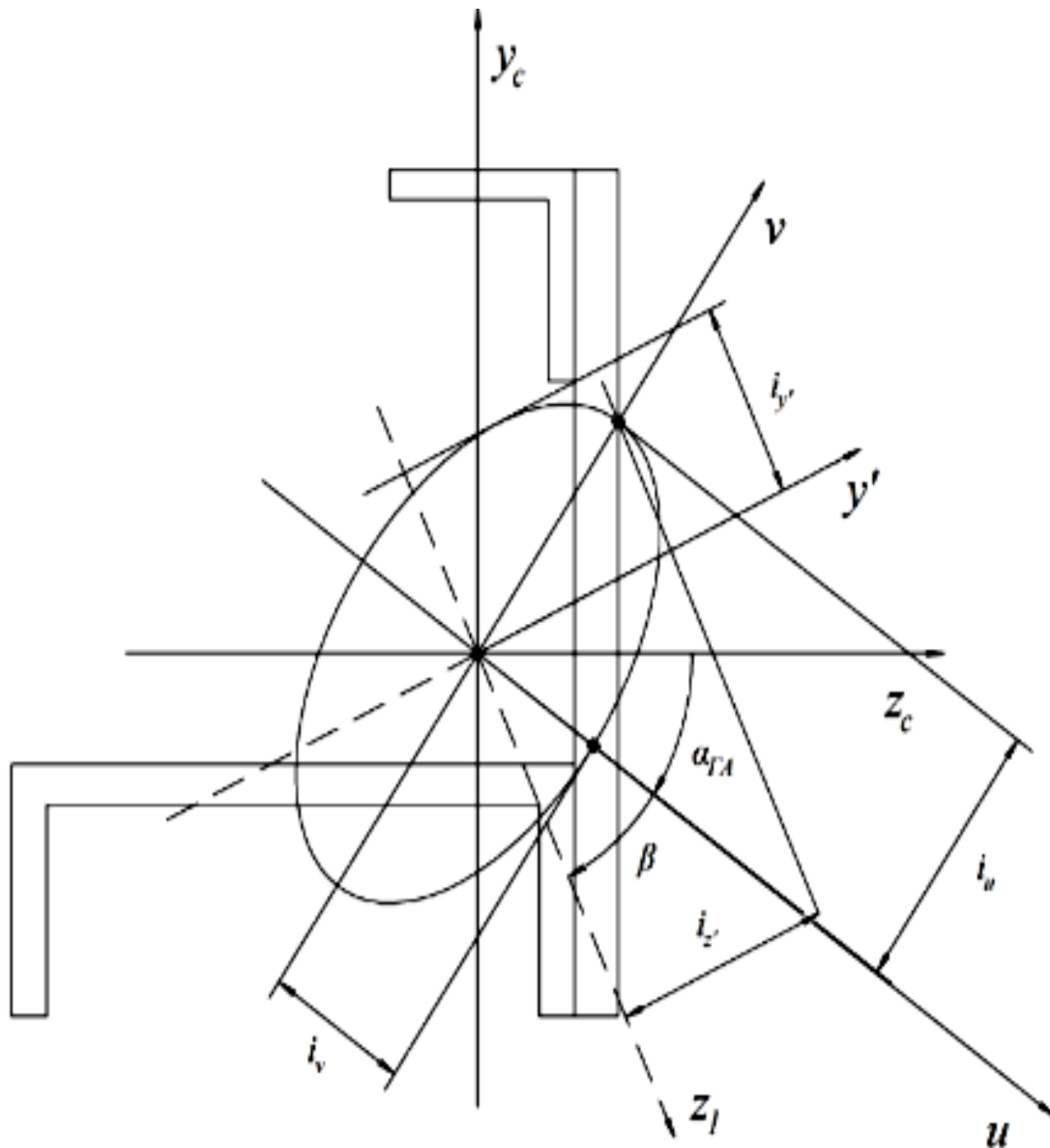


Рисунок 1.8 - Построение эллипса инерции на главных осях

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется статическим моментом сечения относительно выбранной оси?
2. Что называется осевым, полярным и центробежным моментами инерции сечения?
3. Как определяются координаты центра тяжести простых и сложных сечений?
4. Какова размерность моментов инерции сечений?
5. Чему равны осевые моменты инерции прямоугольника относительно оси, совпадающей с одной из его сторон?
6. Меняется ли сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей при их повороте?
7. Какие оси называются главными осями инерции?
8. В каких случаях можно без вычисления установить положение главных осей инерции?
9. Построить эллипс инерции на главных осях для двутавра № 20.

2 ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

Общие сведения

Изгиб возникает при действии на стержень уравновешенной системы внешних сил, перпендикулярных к его оси или пары сил, действия которых проходят через ось стержня.

Такой стержень называют балкой.

Если силовая плоскость совпадает с одной из главных осей, инерции сечения, такой изгиб называется плоским. При изгибе плоские поперечные сечения балки наклоняются друг к другу, оставаясь при этом плоскими и перпендикулярными к ее искривленной оси. Волокна балки с выпуклой

стороны удлиняются, а с вогнутой - укорачиваются. Предполагается, что отдельные волокна не давят друг на друга, следовательно, каждое из них испытывает простое растяжение или сжатие. Волокна, которые при искривлении не изменяют своей длины, образуют нейтральный слой. Пересечение нейтрального слоя поперечным сечением балки образует нейтральную ось сечения.

Построение эпюр внутренних сил

В поперечном сечении балки возникают внутренние силовые факторы: изгибающий момент и перерезывающая сила (рисунок 2.1).

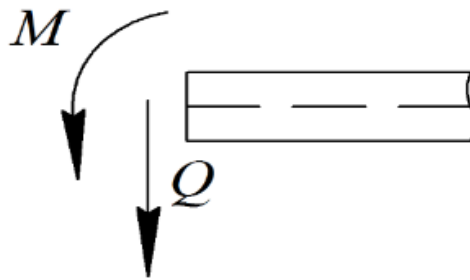


Рисунок 2.1 – Внутренние силовые факторы в поперечном сечении

Изгибающий момент M определяется как момент равнодействующей внутренних сил сечения относительно его нейтральной оси. Изгибающий момент в рассматриваемой сечении численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону разреза относительно нейтральной оси сечения.

Перерезывающая сила Q определяется как проекция равнодействующей внутренних сил сечения на ось, перпендикулярную оси балки. Перерезывающая сила в рассматриваемом сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех сил, действующих по одну сторону сечения на ось, перпендикулярную оси балки.

Изгибающий момент считается положительным, если он изгибает балку выпуклостью вниз (рисунок 2.2).

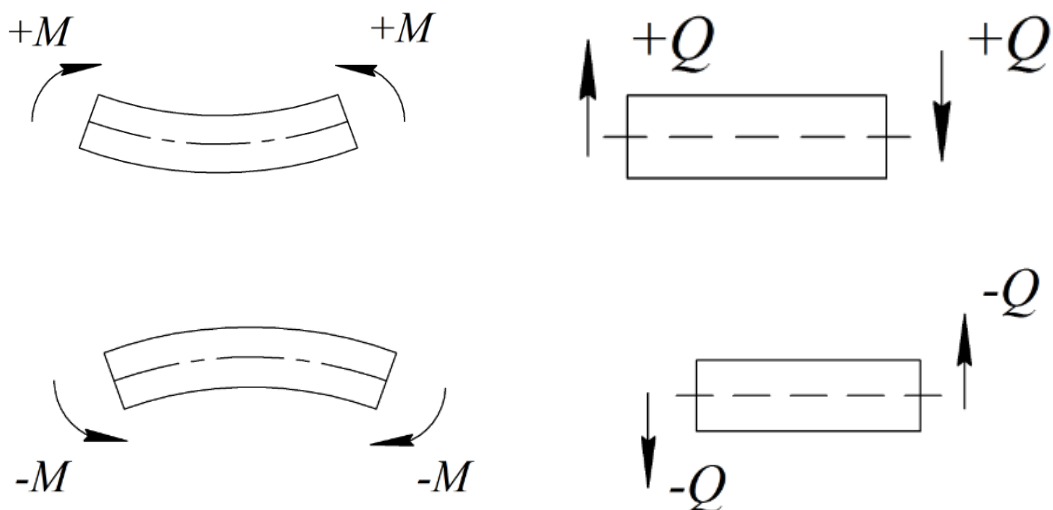


Рисунок 2.2 – Правило знаков поперечных сил и изгибающих моментов

Перерезывающая сила считается положительной, если она стремится повернуть вырезанный из балки бесконечно малый элемент по ходу часовой стрелки (рисунок 2.2).

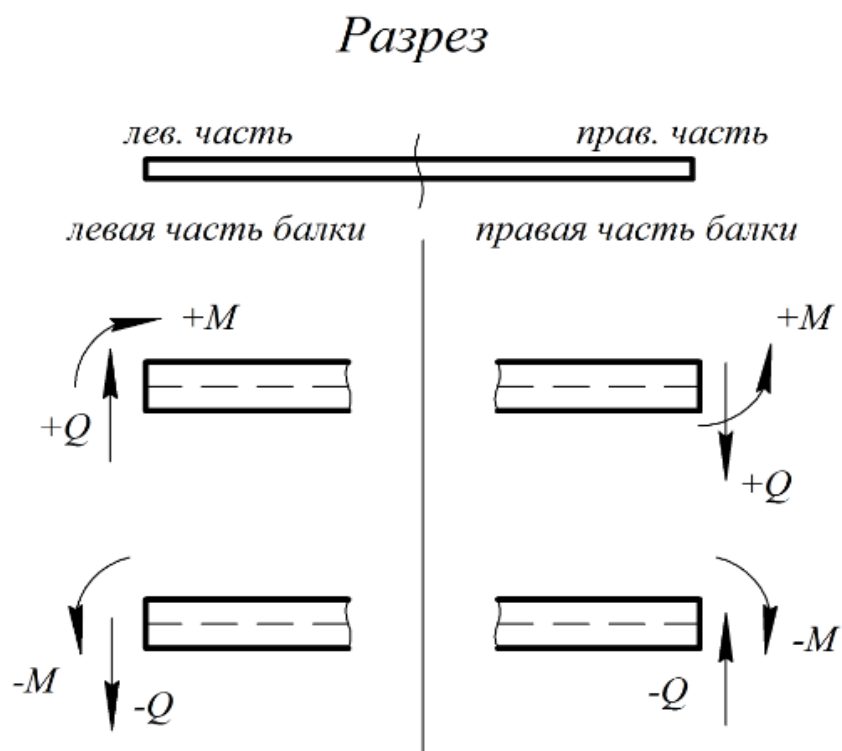


Рисунок 2.3 – Правило знаков поперечных сил и изгибающих моментов
в разрезе балки

Для определения знаков поперечной силы Q и изгибающего момента M применяем следующее правило: мысленно разрезаем балку на каждом участке и рассматриваем либо левую, либо правую часть, мысленно отбросив другую часть балки (рисунок 2.3). Изгибающий момент M , перерезывающая сила Q и интенсивность распределенной нагрузки q связаны между собой следующими зависимостями:

$$\frac{dM}{dx} = Q, \quad \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = q, \quad (2.1)$$

где x — абсцисса сечения (ось x направлена слева направо).

Графики, выражающие закон изменения перерезывающих сил и изгибающих моментов по длине балки, представляются в виде эпюр. Положительные значения Q и M откладываются вверх от оси балки, отрицательные — вниз. Используя дифференциальные зависимости, можно сформулировать ряд правил, облегчающих построение эпюр внутренних сил.

Особенности построения эпюр внутренних сил в рамах

В поперечном сечении плоской рамы возникают внутренние силовые факторы: изгибающий момент M , перерезывающая сила Q и нормальная сила N (рисунок 2.4).

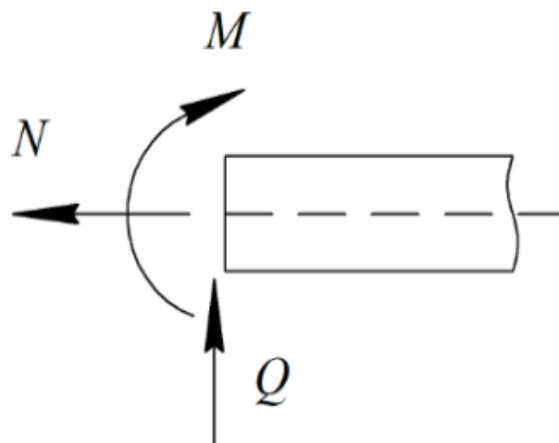


Рисунок 2.4 – Внутренние силовые факторы в поперечном сечении
плоской рамы

Определение M и Q аналогично определению, данному для балок. Нормальная сила N определяется как проекция равнодействующей внутренних сил сечения и нормаль к сечению. Нормальная сила в рассматриваемом сечении численно равна алгебраической сумме всех сил, действующих одну сторону сечения на нормаль к сечению. Нормальная сила N считается положительной, если она растягивающая, и отрицательной, если она сжимающая. Положительные значения N откладывают с наружной (верхней) стороны стержня, отрицательные - с внутренней (нижней).

Раму можно рассматривать как совокупность балок и соответственно применять правила построения эпюр для балки. При этом нужно проводить сечение на каждом участке, находясь внутри рамы. Эпюра M всегда строится со стороны сжатых волокон. Знаки на эпюре M не ставятся. При построении эпюры M нужно обратить внимание на следующее: при отсутствии сосредоточенной пары сил эпюра моментов у двухстержневого узла может быть расположена либо со стороны наружного волокна, либо со стороны внутреннего волокна, но не может так, чтобы у одного стержня была со стороны наружного волокна, а у другого - внутреннего (рисунок 2.5).

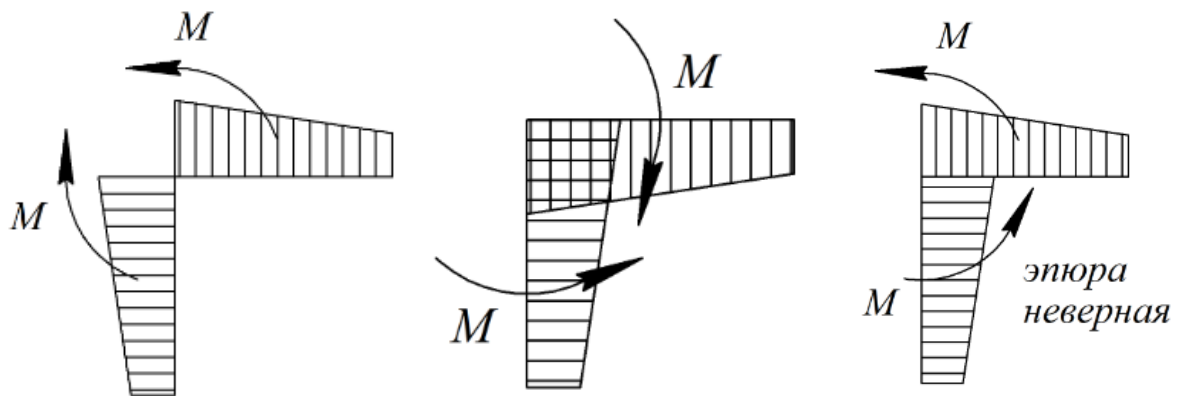


Рисунок 2.5 – Правило построения эпюры M

При вырезании узлов сумма моментов, действующих на его стержни, должна быть равна нулю. Для проверки правильности построения эпюр M , Q ,

Н могут быть составлены условия статического равновесия всей рамы в целом, ее узлов и отдельных, произвольно выделенных частей рамы (рисунок 2.5).

Контроль правильности построения эпюр Q и M

1. На участках балки, если не действует распределенная нагрузка, на которых не приложены сосредоточенные силы, поперечная сила имеет постоянное значение (прямая, параллельная оси балки), а изгибающий момент меняется по линейному закону (прямая наклонная линия).

2. Если на участках балки действует равномерно распределенная нагрузка q , то эпюра поперечных сил будет прямая наклонная, а изгибающий момент будет меняться по закону квадратной параболы, которая будет направлена выпуклостью против направления распределённой нагрузки.

3. Если поперечная сила $Q = 0$, то изгибающий момент будет постоянен по всей длине участка.

4. В том сечении, где приложена сосредоточенная сила, на эпюру поперечных сил будет скачок на величину силы и по направлению этой силы.

5. На эпюре изгибающих моментов появляется скачок в том сечении, где приложен сосредоточенный момент. Величина скачка равна моменту.

6. Если поперечная сила положительна, то изгибающий момент возрастает, при отрицательной силе - убывает.

7. Изгибающий момент имеет экстремум в том сечении, где поперечная сила меняет знак и проходит через нуль.

8. На опорах изгибающий момент равен нулю, если не приложен на опоре сосредоточенный момент.

Порядок построения эпюр Q и M

1. Определяем реакции на опорах. Для консольной балки реакции на опорах определять нецелесообразно.

2. Балку или раму разбиваем на участки. Границами участков служат: точки приложения сосредоточенных сил, сосредоточенных моментов, начало и конец распределенной нагрузки, место излома осевой линии (у рамы) (рисунок 2.6).

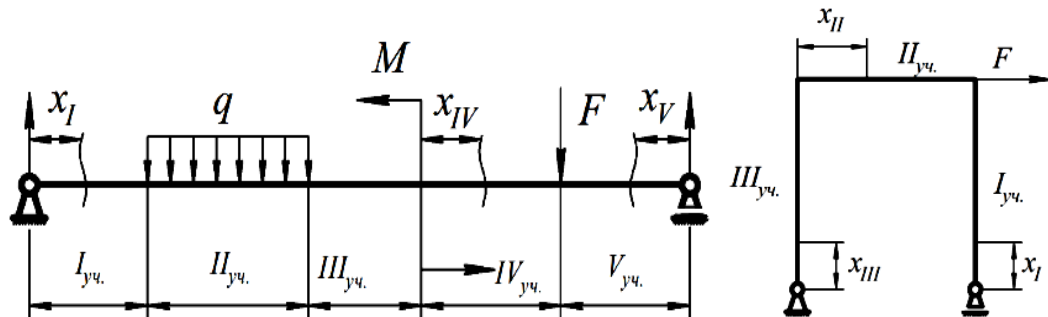


Рисунок 2.6 – Разбивка на участки балки и рамы

3. На каждом участке "берутся сечения". Расстояния до этих сечений берут от начала отсчета. За начало отсчета лучше всего брать начало каждого участка (рисунок 2.6).

4. Составляем аналитические выражения поперечных сил и изгибающих моментов по участкам.

5. По полученным выражениям вычисляем ординаты эпюр сечений.

6. Если на участке эпюра Q , изменяет знак, то функция изгибающего момента проверяется на экстремум.

7. По полученным результатам строим эпюры.

Напряжения при изгибе. Проверка прочности.

Нормальные напряжения.

При определении нормальных напряжений принимаем:

1. Поперечные сечения остаются плоскими до деформации и после деформации.

2. Внешние нагрузки лежат в плоскости симметрии.

3. Материал подчиняется закону Гука, модули упругости при растяжении и сжатии равны.

4. Деформации волокон не зависят от их положения по ширине балки.

Нормальные напряжения в поперечном сечении определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{M_z \times y}{I_z}, \quad (2.2)$$

где σ - нормальное напряжение, Па;

M_z - изгибающий момент в сечении, где определяется напряжение, Нм;

I_z - осевой момент инерции сечения относительно нейтральной оси, м⁴;

y - расстояние от нейтральной оси сечения до точки, где определяется напряжение, м.

Наибольшее нормальное напряжение в сечении равно:

$$\sigma_{max} = \frac{M_z \times y_{max}}{I_z}. \quad (2.3)$$

Величина отношения осевого момента инерции сечения к наибольшему расстоянию от нейтральной оси равна осевому моменту сопротивления сечения W_z , т.е.

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}}; \quad W_y = \frac{I_y}{z_{max}}. \quad (2.4)$$

Тогда:

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z}. \quad (2.5)$$

Момент сопротивления является геометрической характеристикой стержня при изгибе.

Для простых сечений момент сопротивления определяется по формулам:

а) для прямоугольника

$$W_z = \frac{bh^2}{6}, \quad W_y = \frac{hb^2}{6}; \quad (2.6)$$

б) для круглого сечения

$$W_z = W_y = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16}; \quad (2.7)$$

в) для кольцевого сечения

$$W_z = W_y = \frac{\pi D^3}{32} (1 - K^4); \quad W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - K^4); \quad (2.8)$$

где $K = \frac{d}{D}$,

D – наружный диаметр кольца, м;

d – внутренний диаметр кольца, м;

Для прокатных профилей момент сопротивления приводится в таблице.

Максимальные нормальные напряжения будут в том сечении, где действует максимальный изгибающий момент по абсолютной величине, т.е.

$$\sigma_{max} = \frac{M_{zmax}}{W_z}. \quad (2.9)$$

Условие прочности на изгиб:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{zmax}}{W_z} \leq \sigma_{adm}. \quad (2.10)$$

Из условия прочности можно произвести три вида расчетов:

1. проверочный расчет;
2. подбор сечения балки;
3. определение работоспособности балки.

Касательное напряжение

При поперечном изгибе в поперечном сечении балки действуют не только нормальные, но и касательные напряжения τ . Они определяются по формуле:

$$\tau = \frac{Q \times S_z^{omc}}{b \times I_z}, \quad (2.11)$$

где Q - поперечная сила в сечении, Н;

S_z^{omc} - статический момент относительно нейтральной оси той части сечения, которая выше координаты Y , м³;

b - ширина поперечного сечения, м;

I_z - осевой момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси, м⁴.

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \times S_z^{omc}}{b_0 \times I_z} \leq \tau_{adm}, \quad (2.12)$$

где b_0 – ширина сечения на нейтральной оси, м.

Определение перемещений при изгибе

Перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному к оси балки называется прогибом балки в этом сечении. Прогиб обозначается через X , Y , V .

Угол, на который каждое сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению, называется углом поворота сечения и обозначается через θ , α . Для определения перемещений при изгибе существует ряд способов. Рассмотрим способы Мора и Верещагина.

Способ Мора

По способу Мора перемещение определяется по формуле:

$$\Delta = \int_{(l)} \frac{M_F M_1}{EI} dx, \quad (2.13)$$

где Δ - искомое перемещение (линейное или угловое) по заданному направлению под действием приложенной нагрузки;

M_F – значения внутренних моментов в поперечных сечениях от заданной нагрузки;

M_1 - значения внутренних моментов в поперечных сечениях от единичной нагрузки.

Порядок определения перемещений по способу Мора

1. Определяем реакции на опорах.
2. Строим вспомогательную систему, нагружая ее только единичной нагрузкой в точке, где требуется определить перемещение. Определяя линейные перемещения, в заданном направлении прикладываем единичную силу, определяя угловое перемещение, - единичный момент.
3. Для каждого участка записываем выражение изгибающего момента от заданной нагрузки M_F и от единичной нагрузки M_1 .

4. Вычисляем интегралы Мора по участкам, затем все значения перемещений по участкам суммируются.

5. Если вычисленное перемещение имеет положительный знак, то это означает, что его направление совпадает с направлением единичной нагрузки. Отрицательный знак указывает на то, что действительное направление искомого перемещения противоположно направлению единичной нагрузки.

Способ Верещагина

Вычисление интегралов Мора существенно упрощается, если хотя бы одна из эпюр окажется прямолинейной. Такое условие всегда выполняется для системы, состоящих из прямых стержней, так как при этой эпюры от единичной нагрузки (сосредоточенной силы или пары сил) всегда ограничены прямыми линиями.

Формула перемещений имеет вид:

$$\Delta = \sum \frac{AM_1}{EI}. \quad (2.14)$$

где A – площадь эпюры от заданной нагрузки;

M_1 – ордината единичной эпюры, взятая под центром тяжести соответствующе площади A .

Порядок определения перемещений по способу Верещагина

1. Строим эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки M_F .
2. Берём вспомогательную систему, нагружаем ее только единичной нагрузкой в точке, где ищем перемещение. Если определяем линейное перемещение, то прикладываем единичную сосредоточенную силу $F = 1$; в случае углового перемещения - сосредоточенный момент $M_0 = 1$.
3. Строим эпюру изгибающих моментов от единичного нагружения M_1 .

4. Берем произведение площади эпюры от внешней нагрузки на ординату прямолинейной эпюры от единичной нагрузки, расположенной под центром тяжести эпюры от заданной нагрузки (рисунок 2.7):

Если эпюра от заданной нагрузки имеет сложный вид, то ее нужно разбить на простые фигуры (рисунок 2.8), для которых легко определить площадь и положение центра тяжести. При этом каждую из этих площадей умножают на ординату единичной эпюры, находящуюся под центром тяжести этой площади и затем произведения суммируют:

$$\Delta_i = \frac{1}{EI} (A_1 M_1 + A_2 M_2 + A_3 M_3). \quad (2.15)$$

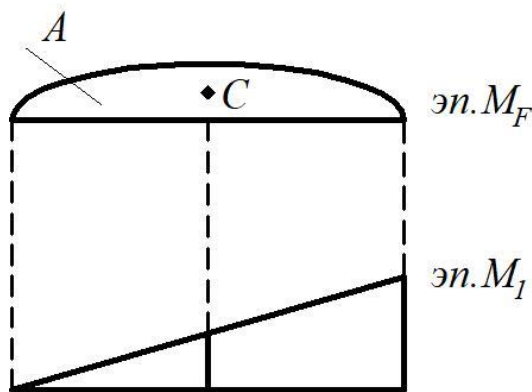


Рисунок 2.7 - Эпюра от единичной нагрузки изгибающих моментов

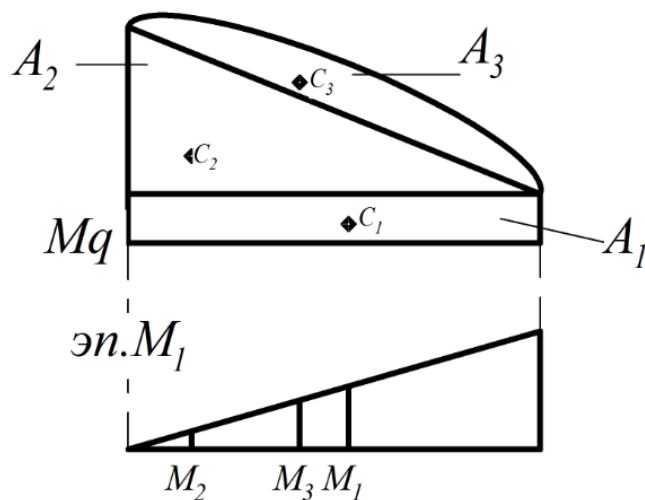
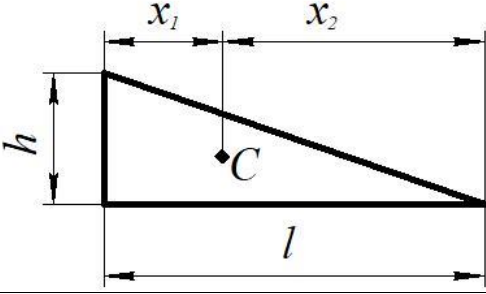
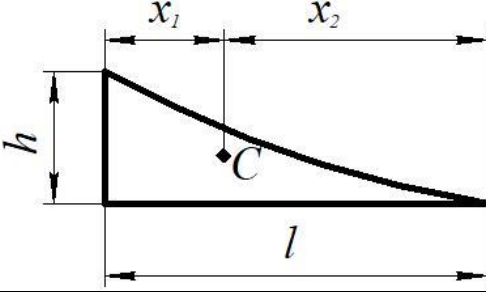
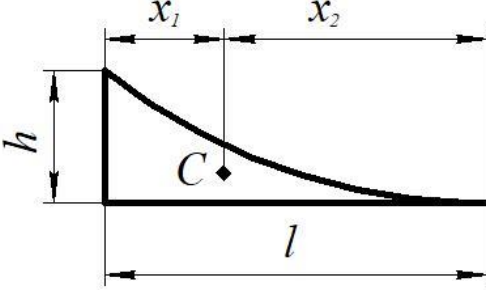
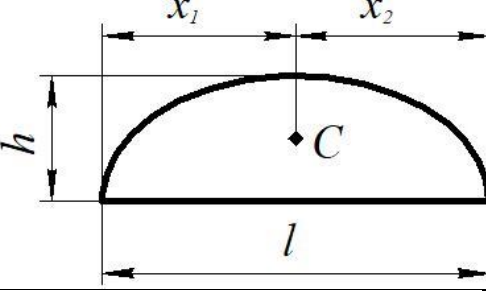
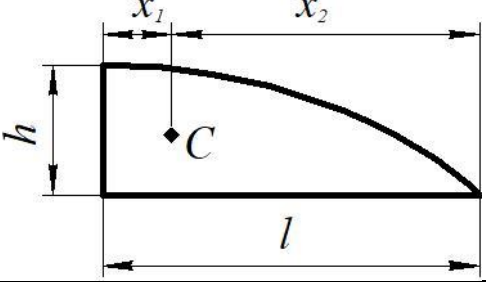


Рисунок 2.8 - Площадь и положение центра тяжести единичной эпюры

Таблица 2.1 - Значения площадей и координаты их центров тяжести фигур

№ п/п	Фигура	Площадь А	Координаты центра тяжести	
			X ₁	X ₂
1		$\frac{hl}{2}$	$\frac{l}{3}$	$\frac{2l}{3}$
2		$\frac{hl}{3}$	$\frac{l}{4}$	$\frac{3l}{4}$
3		$\frac{hl}{4}$	$\frac{l}{5}$	$\frac{4l}{5}$
4		$\frac{2}{3}hl$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$
5		$\frac{2hl}{3}$	$\frac{2l}{8}$	$\frac{5l}{8}$

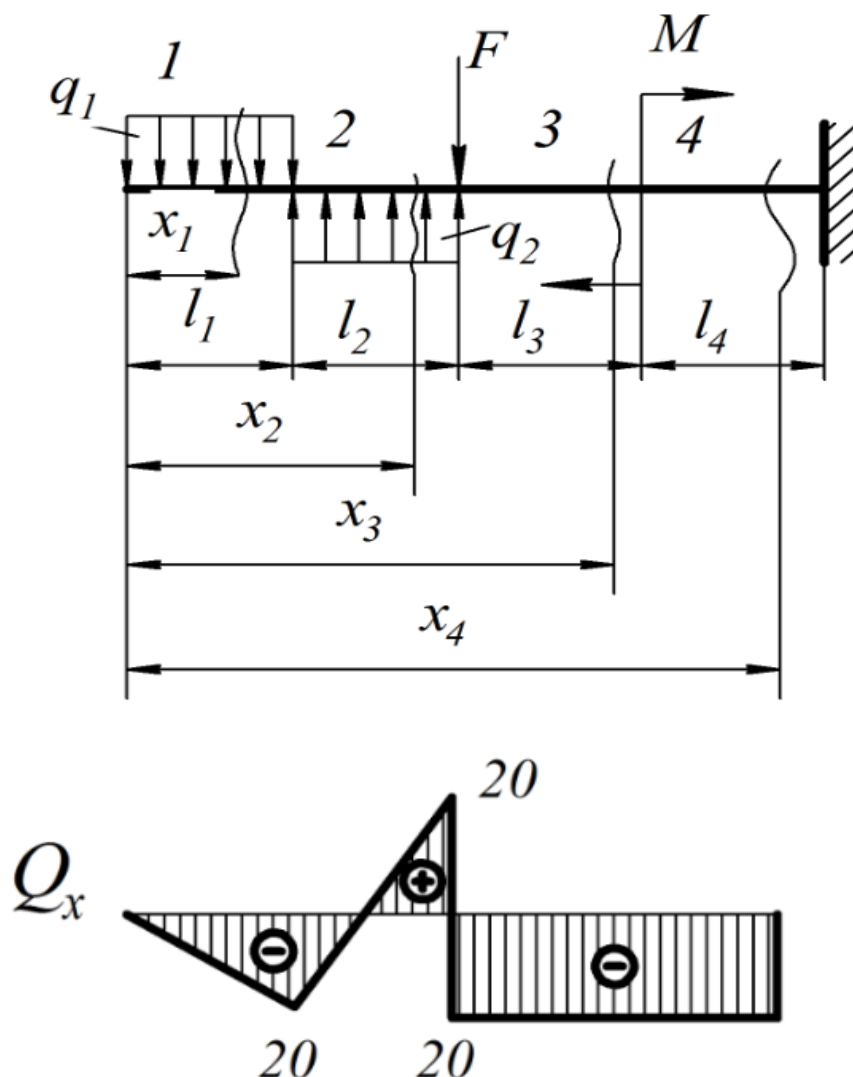
5. Если эпюры M_F и M_1 противоположны по знаку, то перемещение имеет знак минус, если же обе эпюры имеют одинаковый знак, то перемещение имеет положительный знак.

При использовании способа Верещагина приходится вычислять площади различных фигур и определять положения их центров тяжести. В связи с этим в таблице 2.1 приведены значения площадей и координаты их центров тяжести наиболее часто встречающихся фигур.

Решение задач на поперечный изгиб

В предлагаемых задачах (1-4) требуется построить эпюры внутренних сил.

Задача 1



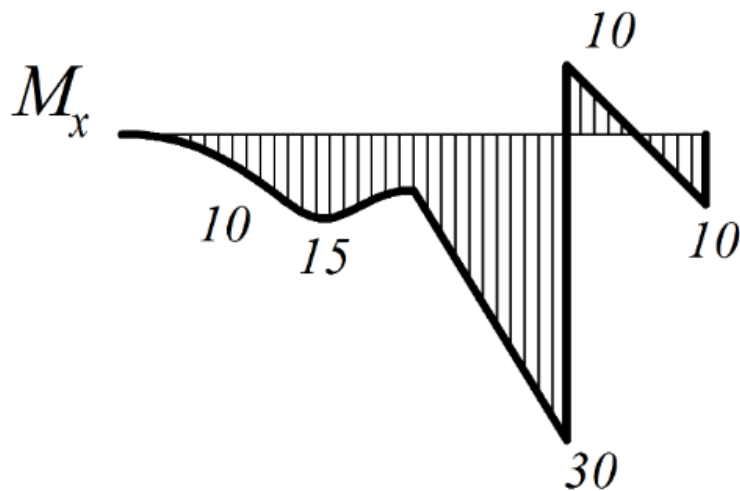


Рисунок 2.9 – Схема и эпюры $Q_{(x)}$ и $M_{(x)}$ к задаче 1

Дано:

$$q_1 = 20 \frac{\text{кН}}{\text{м}}, q_2 = 40 \frac{\text{кН}}{\text{м}}, F = 40 \text{ кН}, M = 40 \text{ кНм}, l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1 \text{ м}.$$

Решение:

1 участок, $0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м}$

$$Q_{(x_1)} = -q_1 x_1 = -20x_1,$$

$$M_{(x_1)} = -\frac{q_1 x_1^2}{2} = -10x_1^2.$$

2 участок, $1 \text{ м} \leq x_2 \leq 2 \text{ м}$

$$Q_{(x_2)} = -q_1 l_1 + q_2 (x_2 - l_1) = -20 + 40(x_2 - 1),$$

$$M_{(x_2)} = -q_1 l_1 \left(x_2 - \frac{l_1}{2} \right) + q_2 \frac{(x_2 - l_1)^2}{2} = -20(x_2 - 0,5) + 20(x_2 - 1)^2.$$

Сила $Q_{(x)}$ меняет знак, поэтому $M_{(x)}$ будет иметь экстремальное значение:

$$Q_{(x_2)} = -20 + 40(x_2 - 1) = 0, \text{ отсюда } x_2 = 1,5 \text{ м},$$

При $x_2 = 1,5 \text{ м}$ $|M_{\text{max}}| = 15 \text{ кНм}$.

3 участок, $2 \text{ м} \leq x_3 \leq 3 \text{ м}$,

$$Q_{(x_3)} = -q_1 l_1 + q_2 l_2 - F = -20 \text{ кН},$$

$$\begin{aligned} M_{(x_3)} &= -q_1 l_1 \left(x_3 - \frac{l_1}{2} \right) + q_2 l_2 \left(x_3 - l_1 - \frac{l_2}{2} \right) - F(x_3 - l_1 - l_2) = \\ &= -20(x_3 - 0,5) + 40(x_3 - 1,5) - 40(x_3 - 2) = -30 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

4 участок, $3 \text{ м} \leq x_4 \leq 4 \text{ м}$,

$$Q_{(x_4)} = -q_1 l_1 + q_2 l_2 - F = -20 \text{ кН},$$

$$\begin{aligned} M_{(x_4)} &= -q_1 l_1 \left(x_4 - \frac{l_1}{2} \right) + q_2 l_2 \left(x_4 - l_1 - \frac{l_2}{2} \right) - F(x_4 - l_1 - l_2) + M = \\ &= -20(x_4 - 0,5) + 40(x_4 - 1,5) - 40(x_4 - 2) + 40. \end{aligned}$$

Значения $Q_{(x)}$ и $M_{(x)}$ по сечениям даны в таблице 2.2.

Эпюры $Q_{(x)}$ и $M_{(x)}$ представлены на рисунке 2.9.

Таблица 2.2 – Результаты $Q_{(x)}$ и $M_{(x)}$ по участкам

Номер участка	I			II			III		IV	
$X, \text{ м}$	0	0,5	1	1	1,5	2	2	3	3	4
$Q_x, \text{ кН}$	0	-10	-20	-20	0	20	-20	-20	-20	-20
$M_x, \text{ кНм}$	0	-2,5	-10	-10	-15	-10	-10	30	10	-10

Задача 2

Дано:

$$l_1 = 3 \text{ м}, l_2 = 1 \text{ м}, M_1 = 105 \text{ кНм}, M_2 = M_3 = 35 \text{ кНм}.$$

Решение:

Определение опорных реакций:

$$\sum M_A = 0,$$

$$M_1 - M_2 - M_3 - R_B l_1 = 0,$$

$$R_B = \frac{M_1 - M_2 - M_3}{l_1} = \frac{105 - 35 - 35}{3} = 11,67 \text{ кН},$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$M_1 - M_2 - M_3 - R_A l_1 = 0, R_A = 11,67 \text{ кН}.$$

Проверка: $\sum y = 0, 11,67 - 11,67 = 0$.

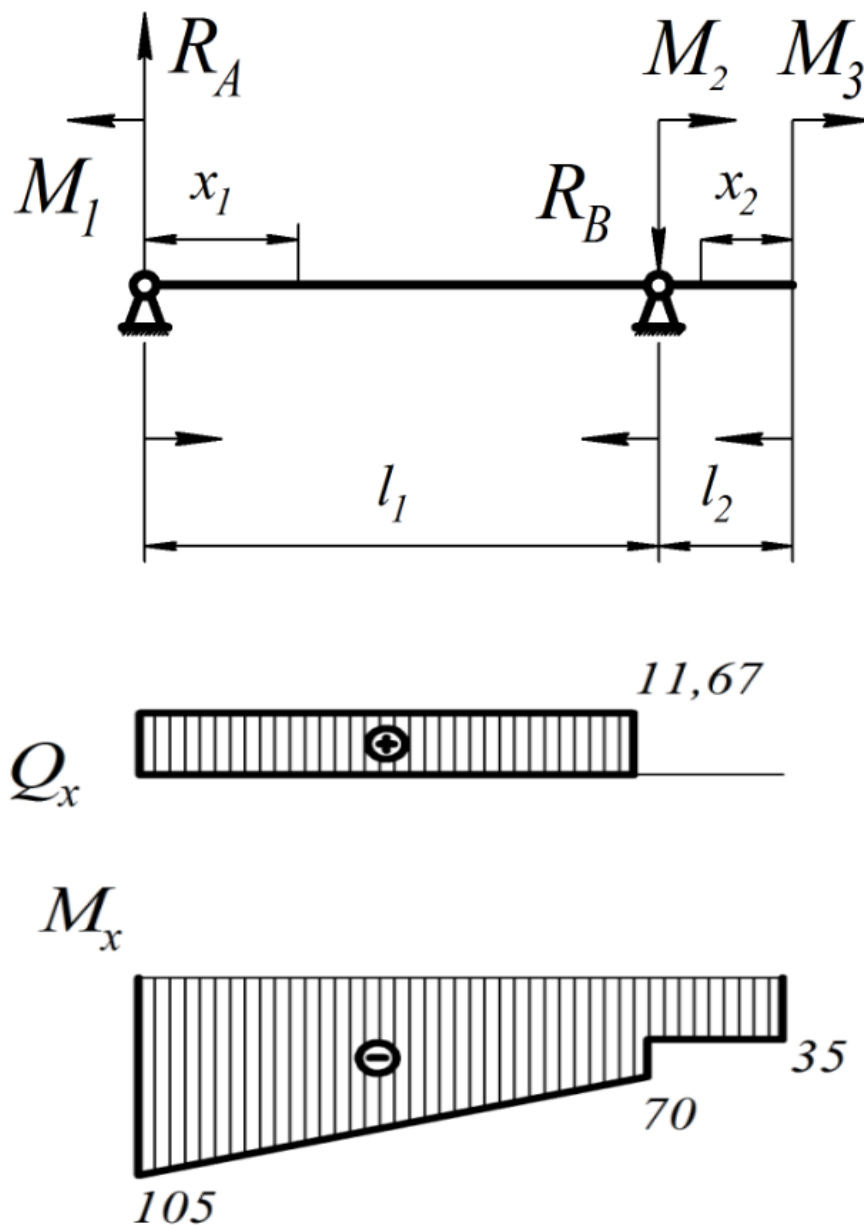


Рисунок 2.10 - Схема и эпюры M_x , Q_x к задаче 2

Запись аналитических выражений Q_x и M_x по участкам:

I участок $0 \leq x_1 \leq 3$ м,

$$Q_{(x_1)} = R_A = 11,67 \text{ кН};$$

$$M_{(x_1)} = -M_1 + R_A x_1 = -105 + 11,67 x_1;$$

II участок, $0 \leq x_2 \leq 1$ м,

$$Q_{(x_2)} = 0;$$

$$M_{(x_2)} = -M_3 = -35 \text{ кНм}.$$

Значения $Q_{(x)}$ и $M_{(x)}$ по сечениям даны в таблице 2.3.

Эпюры $Q_{(x)}$ и $M_{(x)}$ представлены на рисунке 2.10.

Таблица 2.3 - Значения M_x, Q_x , по участкам

Номер участка	I		II	
X , м	0	3	0	1
Q_x , кН	11,67	11,67	0	0
M_x , кНм	-105	-70	-35	-35

Задача 3

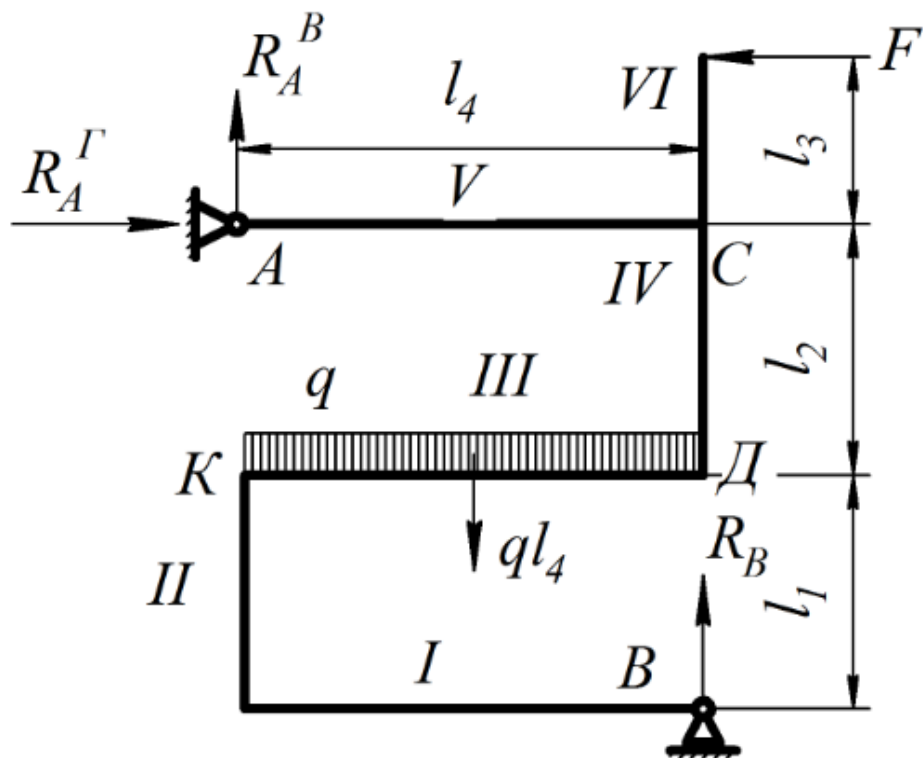


Рисунок 2.11 – Схема к задаче 3

Дано:

$$l_1 = l_2 = l_3 = 1 \text{ м}, l_4 = 2 \text{ м}, q = 20 \frac{\text{кН}}{\text{м}}, F = 40 \text{ кН}.$$

Решение:

Определение опорных реакций:

1) $\sum M_A = 0;$

$$R_b \times l_4 + Fl_3 - \frac{ql_4^2}{2} = 0,$$

$$R_b \times 2 + 40 \times 1 - \frac{20 \times 2^2}{2} = 0,$$

$$R_b = 0.$$

2) $\sum x = 0;$

$$-F + R_A^r = 0,$$

$$R_A^r = F = 40 \text{ кН}.$$

3) $\sum M_b = 0;$

$$F(l_1 + l_2 + l_3) - R_A^b \times l_4 + \frac{ql_4^2}{2} - R_A^r(l_1 + l_2) = 0,$$

$$40 \times 3 - R_A^b \times 2 + \frac{20 \times 2^2}{2} - 40 \times 2 = 0,$$

$$R_A^b = 40 \text{ кН}.$$

Проверка: $\sum y = 0, R_A^b - ql_4 + R_B = 40 - 20 \times 2 + 0 = 0.$

Таблица 2.4 - Запись аналитических выражений по участкам

I уч. $0 \leq x_1 \leq 2 \text{ м}$	II уч. $0 \leq x_2 \leq 1 \text{ м}$	III уч. $0 \leq x_3 \leq 2 \text{ м}$
$M_x = 0,$ $Q_x = 0,$ $N_x = 0.$	$M_x = 0,$ $Q_x = 0,$ $N_x = 0.$	$M_x = -\frac{qx_3^2}{2} = -10x_3^2,$ $Q_x = -qx_3 = -20x_3,$ $N_x = 0.$
IV уч. $0 \leq x_4 \leq 1 \text{ м}$	V уч. $0 \leq x_5 \leq 2 \text{ м}$	VI уч. $0 \leq x_6 \leq 1 \text{ м}$
$M_x = -\frac{ql_4^2}{2} =$ $-40 \text{ кНм},$ $Q_x = 0,$ $N_x = ql_4 = 40 \text{ кН}.$	$M_x = R_A^b \times x_5 = 40x_5,$ $Q_x = R_A^b = 40 \text{ кН},$ $N_x = -R_A^r = -40 \text{ кН}.$	$M_x = -Fx_6 = -40x_6,$ $Q_x = -F = -40 \text{ кН},$ $N_x = 0.$

Значения M_x, Q_x, N_x по сечениям даны в таблице 2.5.

Эпюры M_x , Q_x , N_x представлены на рисунке 2.12.

Проверка равновесия узла «С» дана на рисунке 2.13.

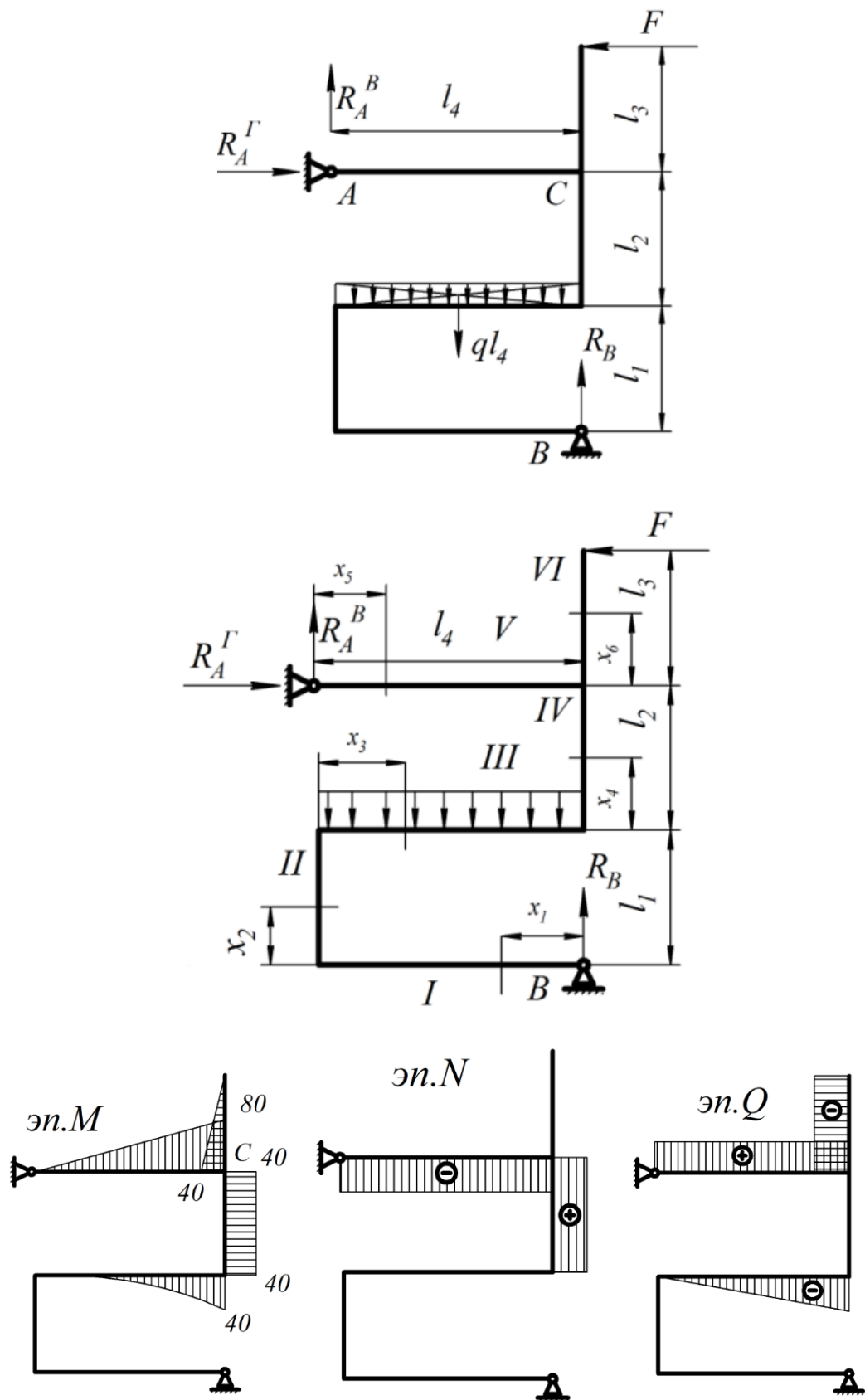


Рисунок 2.12- Эпюры M_x , Q_x , N_x

Узел „С”

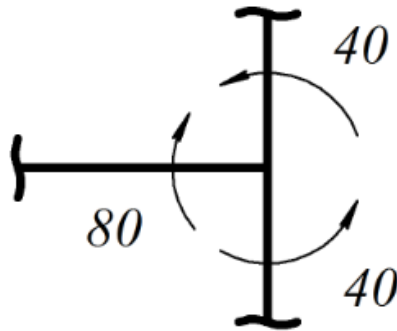


Рисунок 2.13 - Равновесие узла «С»

Таблица 2.5 - Значения M_x , Q_x , N_x по участкам

Номер участка	I		II		III			IV		V		VI	
x , м	0	2	0	1	0	1	2	0	1	0	2	0	1
Q_x , кН	0	0	0	0	0	-20	-40	0	0	40	40	-40	-40
M_x , кНм	0	0	0	0	0	-10	-40	40	40	0	80	0	-40
N_x , кН	0	0	0	0	0	0	0	40	40	-40	-40	0	0

Задача 4

Для балки, показанной на рисунке 2.14 требуется:

- подобрать прямоугольное сечение,
- определить прогиб в сечении «В» и угол поворота сечения «А».

Дано:

$$l = 4 \text{ м}, M = 10 \text{ кНм}, F = 30 \text{ кН}, q = 20 \frac{\text{кН}}{\text{м}},$$

$$\sigma_{adm} = 140 \text{ МПа}, \frac{h}{b} = 2, E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}.$$

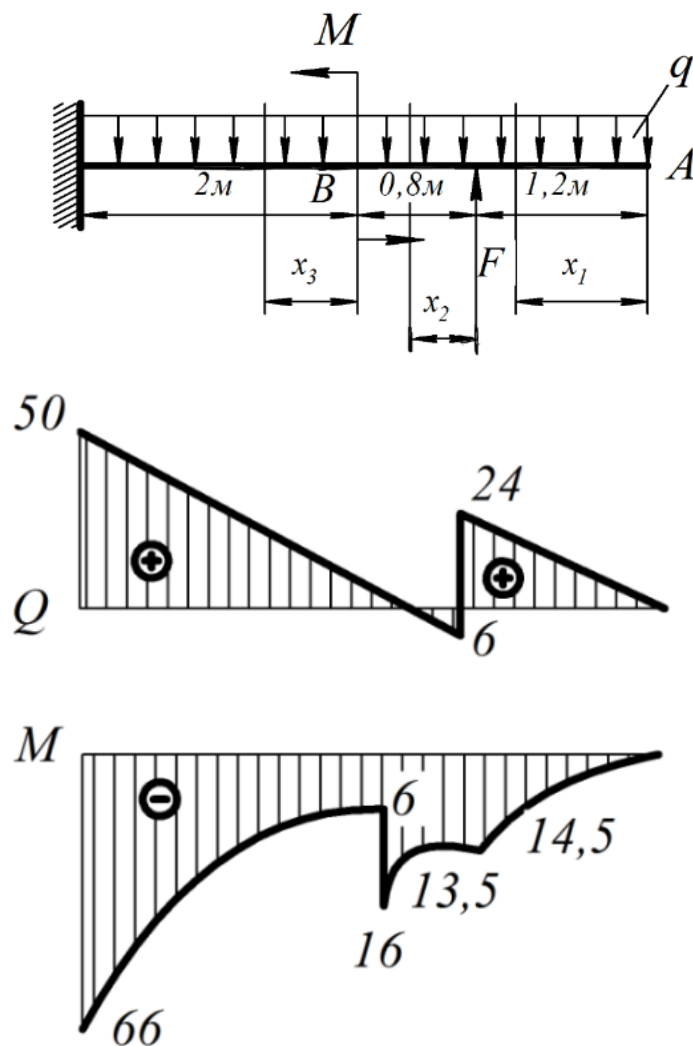


Рисунок 2.14 - Схема и эпюры $Q_{(x)}$ и $M_{(x)}$ к задаче 4

Решение:

Так как балка консольная, определять реакции опор нерационально. Балка имеет участки: AC, CB, BD

Участок AC, $0 \leq x \leq 1,2$ м

$$Q_x = qx,$$

$$M_x = -qx \frac{x}{2} = -\frac{qx^2}{2}.$$

При $x=0$,

$$Q_x = 0,$$

$$M_x = 0.$$

При $x=1,2$ м,

$$Q_x = 24 \text{ кН},$$

$$M_x = -14,4 \text{ кНм}.$$

Участок СВ, $0 \leq x \leq 0,8$ м,

$$Q_x = q(x + 1,2) - F, M_x = -q \frac{(x+1,2)^2}{2} + F * x.$$

При $x=0$,

$$Q_x = -6 \text{ кН}, M_x = -14,4 \text{ кНм}.$$

При $x=0,8$ м,

$$Q_x = 10 \text{ кН}, M_x = -16 \text{ кНм}.$$

Там, где эюра Q меняет знак, эюра M будет иметь экстремальное значение. Найдём x , при котором $Q=0$, а момент имеет экстремальное значение $Q = q(x + 1,2) - F = 0$, отсюда $x = \frac{30-20*1,2}{20} = 0,3$ м. Подставляем $x=0,3$ м в уравнение момента. Получим $M_x = -13,5$ кНм.

Участок ВД, $0 \leq x \leq 2$ м,

$$Q_x = q(2 + x) - F, M_x = -q \frac{(2+x)^2}{2} + F(x + 0,8) + M;$$

При $x=0$,

$$Q_x = 10 \text{ кН}, M_x = -6 \text{ кНм}.$$

При $x=2$ м,

$$Q_x = 50 \text{ кН}, M_x = -66 \text{ кНм}.$$

Эюры Q и M показаны на рисунке 22

$$M_{max} = 66 \text{ кНм}.$$

Опасное сечение – Д.

$$W_z = \frac{M_{max}}{\sigma_{adm}}, W_z = \frac{bh^2}{6}, h = 2b, W_z = \frac{2}{3}b^3,$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3*66*10^3 \text{ Нм}}{2*140*10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}}} = 0,089 \text{ м}.$$

Принимаем $b = 9$ см, $h = 18$ см.

Проверим балку на прочность по полученным размерам:

$$\sigma_{max} = \frac{6M_{max}}{bh^2}, \quad \sigma_{max} = \frac{6 \times 66 \times 10^{-3}}{0,09 \times 0,18^2} = 136 \text{ МПа};$$

Недогрузка.

$$\Delta = \frac{140 - 136}{140} \times 100\% = 2,87\% < 5\%.$$

Прочность балки обеспечена.

Определение деформаций

Способ Мора (рисунок 2.15). Определяем прогиб в сечении "В". Для этого приложим в сечении «В» вспомогательной балки единичную сосредоточенную силу $F = 1$. Составим аналитические выражения моментов по участкам вспомогательной и заданной балки.

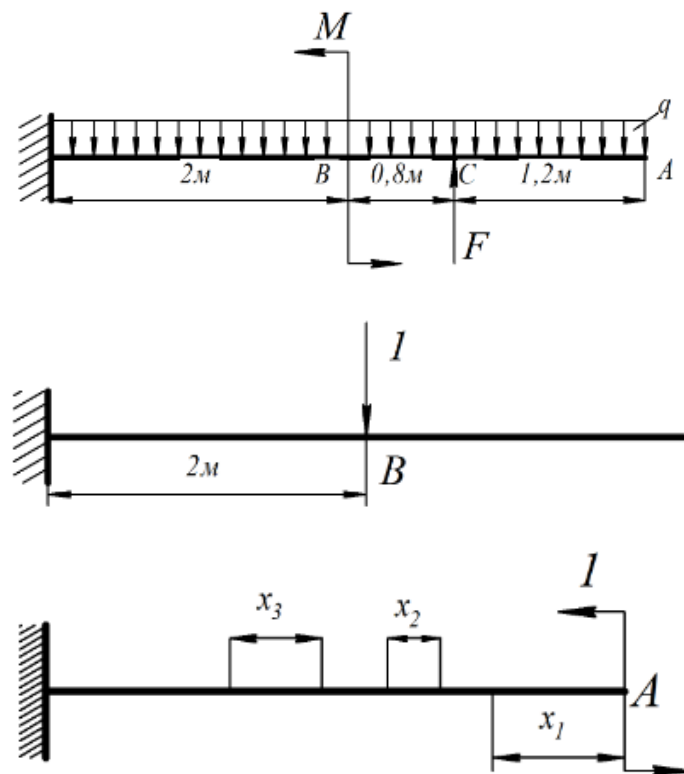


Рисунок 2.15 - Схема к задаче 4

Вспомогательная балка:

I участок, $0 \leq x_1 \leq 1,2 \text{ м}$,

$$M_1 = 0;$$

II участок, $0 \leq x_2 \leq 0,8$ м,

$$M_2 = 0;$$

III участок, $0 \leq x_3 \leq 2$ м,

$$M_1 = -x_3.$$

Заданная балка:

На первом и втором участках произведения моментов от заданной нагрузки на моменты от единичной нагрузки будут равны нулю. Поэтому определяем момент от заданной нагрузки только на третьем участке:

$$M_{(x_3)} = -q \frac{(x_3 + 2)^2}{2} + F(x_3 + 0,8) + M,$$

$$M_{(x_3)} = -\frac{qx_3^2}{2} - 2qx_3 - 2q + Fx_3 + F \times 0,8 + M,$$

$$y_B = \frac{1}{EJ} \left[\int_0^2 \left(-\frac{qx_3^2}{2} - 2qx_3 - 2q + Fx_3 + F \times 0,8 + M \right) (-x_3) dx \right],$$

$$y_B = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{q^4}{24} + 2q \frac{x_3^3}{3} + 2q \frac{x_3^2}{2} - F \frac{x_3^3}{3} - F \times 0,8 \frac{x_3^2}{2} - M \frac{x_3^2}{2} \right]_0^2,$$

$$y_B = \left(20 \frac{2^4}{8} + 40 \frac{2^3}{3} + 40 \frac{2^2}{2} - 30 \frac{2^3}{3} - 24 \frac{2^2}{2} - 10 \frac{2^2}{2} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{10^3 \text{ м}^3}{2 \times 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \times 4374 \times 10^{-8} \text{ м}^2} \right) = 0,00898 \text{ м}.$$

$$y_B = 0,00898 \text{ м}.$$

Вычисляем угол поворота в сечении "А". В сечении "А" вспомогательной балки прикладываем сосредоточенный единичный момент $M = 1$ и записываем аналитические выражения моментов по участкам заданной и вспомогательной балок:

I участок, $0 \leq x_1 \leq 1,2$ м,

$$M_1 = 1, M_{(x_1)} = -\frac{qx_1^2}{2};$$

II участок, $0 \leq x_2 \leq 0,8$ м,

$$M_1 = 1, M_{(x_2)} = -q \frac{(x_2+1,2)^2}{2} + F * x = -\frac{qx_2^2}{2} - 1,2qx_2 - 0,72q + Fx_2;$$

III участок, $0 \leq x_3 \leq 2$ м,

$$M_1 = 1, M_{(x_3)} = -\frac{qx_3^2}{2} - 2qx_3 - 2q + Fx_3 + F \times 0,8 + M.$$

$$\begin{aligned} \theta_A = & \frac{1}{EJ} \left[\int_0^{1,2} -\frac{qx_1^2}{2} \times 1 \times dx_1 + \int_0^{0,8} \left(-\frac{qx_2^2}{2} - 1,2qx_2 - 0,72q + Fx_2 \right) \times 1 \times dx_2 + \right. \\ & \left. + \int_0^2 \left(-\frac{qx_3^2}{2} - 2qx_3 - 2q + Fx_3 + F \times 0,8 + M \right) \times 1 \times dx_3 = \right. \\ = & \frac{1}{EJ} \left(-\frac{q}{2} * \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^{1,2} - \frac{q}{2} * \frac{x_2^3}{3} \Big|_0^{0,8} - 1,2q * \frac{x_2^2}{2} \Big|_0^{0,8} - 0,72qx_2 \Big|_0^{0,8} + F \frac{x_2^2}{2} \Big|_0^{0,8} - \frac{q}{2} * \frac{x_3^3}{3} \Big|_0^2 - 2q \frac{x_3^2}{2} \Big|_0^2 - \right. \\ & \left. - 2qx_3 \Big|_0^2 + F \frac{x_3^2}{2} \Big|_0^2 + F * 0,8x_3 \Big|_0^2 + Mx_3 \Big|_0^2 \right) \end{aligned}$$

Подставляя значения q, F, M, x, E, I получим $\theta_A = - 0,00865$ рад.

Способ Верещагина

Определим прогиб в сечении «В» (рисунок 2.16).

Строим эпюру изгибающих моментов M от заданной нагрузки и эпюру изгибающих силы, проложенной в сечении “В” вспомогательной балки.

Эпюры моментов от единичной силы в первом и во втором участках равны нулю. Поэтому в заданной балке рассматриваем эпюру M от внешних нагрузок только в третьем участке.

Разбиваем эту часть эпюры на отдельные фигуры, центры тяжести которых будут C_1, C_2, C_3 . Обозначим через A_1, A_2, A_3 площади составных фигур, а через M_1, M_2, M_3 – ординаты единичной эпюры под тяжести C_1, C_2, C_3 .

$$A_1 = 6 \times 2 = 12 \text{ кНм}^2, \quad M_1 = 1 \text{ м.}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} 20 \times 2 = 20 \text{ кНм}^2, \quad M_2 = \frac{4}{3} M.$$

$$A_3 = \frac{1}{3} 40 \times 2 = \frac{80}{3} \text{ кНм}^2, \quad M_3 = \frac{3}{2} M.$$

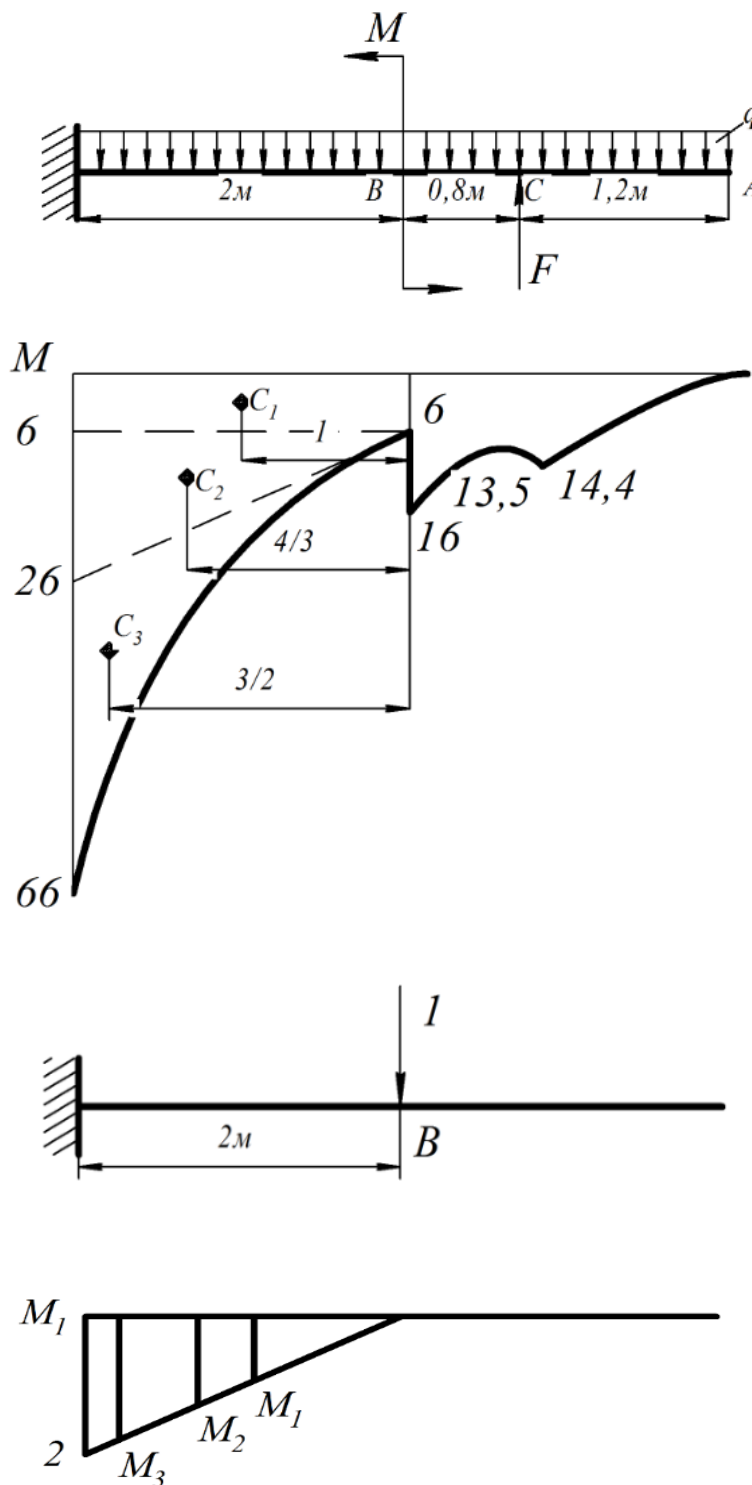


Рисунок 2.16 – Схема определения прогиба в сечении «В»

$$y_B = \frac{1}{EI} \left(12 \times 1 + 20 \times \frac{4}{3} + \frac{80}{3} \times \frac{3}{2} \right) = \frac{78,67}{EI};$$

$$E = 2 \times 10^{11} \frac{H}{M^2}, \quad I = 4374 \times 10^{-8} M^4,$$

$$y_B = \frac{78,67 \times 10^3 H M^3}{2 \times 10^{11} \frac{H}{M^2} \times 4374 \times 10^{-8} M^4} = 0,00898 M.,$$

$$y_B = 0,00898 M.$$

Вычисляем угол поворота сечения «А» (рисунок 2.17).

В сечении “А” вспомогательной балки прикладываем единичный момент $M=1$ и строим от него эпюру изгибающих моментов. Эпюру изгибающих моментов в основной балке строим отдельно от каждого вида заданной нагрузки.

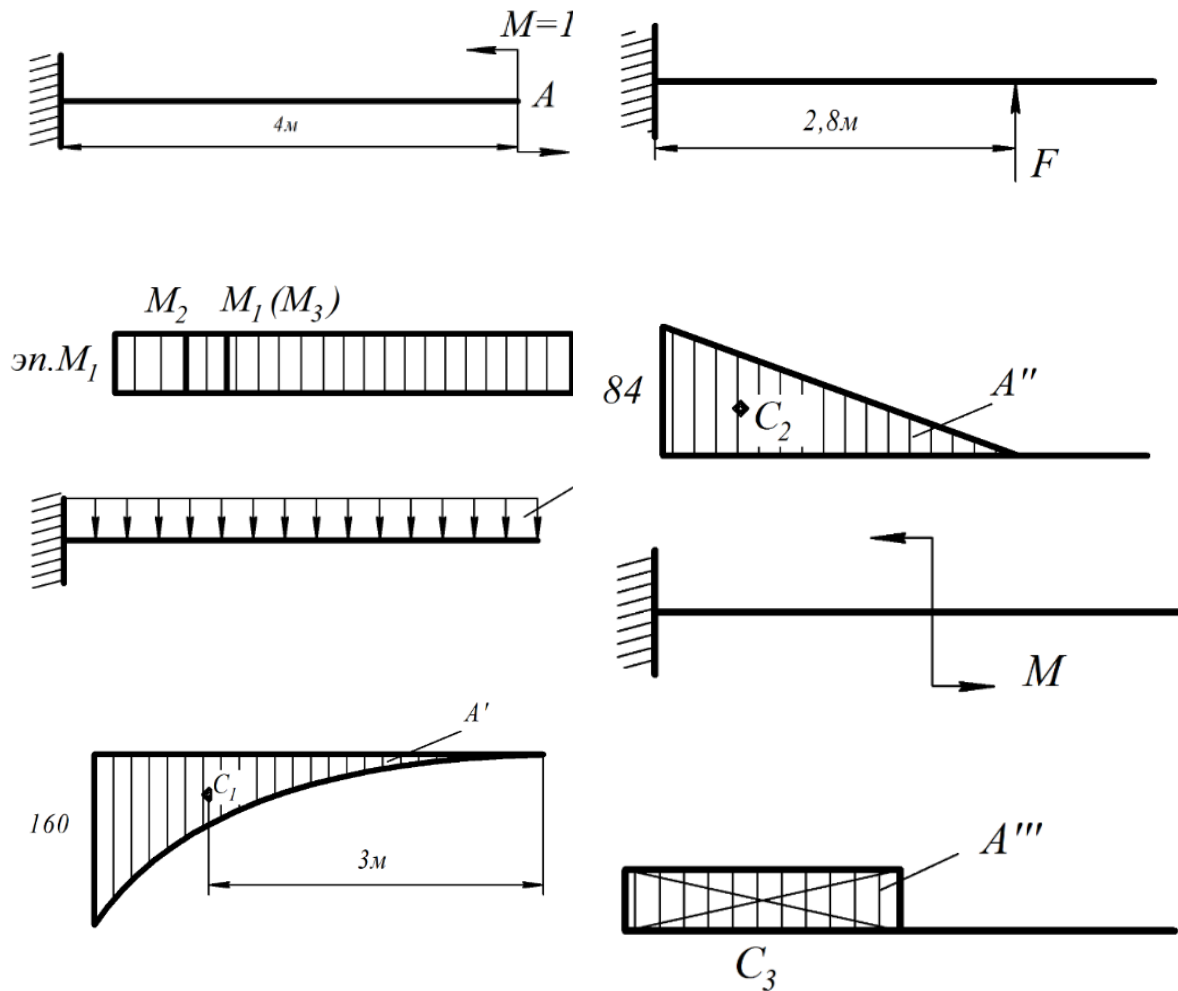


Рисунок 2.17 - Схема определения угла поворота сечения «А»

Определяем площади этих эпюр A' , A'' , A''' и соответственно значения ординат единичной эпюры под центрами тяжести C_1 , C_2 , C_3 площадей A' , A'' , A''' :

$$A' = \frac{1}{3} \times 160 \times 4 = \frac{640}{3} \text{ кНм}^2,$$

$$A'' = \frac{1}{2} \times 2,8 \times 84 = 117,6 \text{ кНм}^2,$$

$$A''' = 20 \text{ кНм}^2,$$

$$M_1 = M_2 = M_3 = 1.$$

Тогда

$$\theta_A = \frac{1}{EI} (-640 \times 1 + 117,6 \times 1 + 20 \times 1) = - \frac{75,333 \times 10^3 \text{ Нм}^2}{2 \times 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \times 4374 \times 10^{-8} \text{ м}^4}.$$

$$\theta_A = -0,00865 \text{ рад.}$$

Знак минус θ_A показывает, что поворот сечения A не совпадает с направлением единичного момента.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое прямой изгиб?
2. Какие внутренние силы возникают в поперечных сечениях стержня в общем случае действия на него плоской системы сил?
3. Какие правила знаков приняты для каждого из внутренних усилий?
4. Как вычисляются изгибающий момент и перерезывающая сила в поперечном сечении стержня?
5. Какие типы опор применяются для закрепления балок к основанию?
6. Чему равна поперечная сила в сечении, в котором изгибающий момент достигает экстремального значения?
7. Как меняются нормальные напряжения по высоте балки?
8. Что такое жесткость сечения при изгибе?
9. Что называется моментом сопротивления при изгибе?
10. Какой вид имеет эпюра касательных напряжений в поперечном сечении двутавровой балки?
11. Какие формы поперечных сечений являются рациональными для балок из пластичных материалов?

12. Как производится расчет на прочность при прямом изгибе балки из пластичного материала?
13. В каком порядке производится определение линейных и угловых перемещений по формуле Мора?
14. Как производится по правилу Верещагина перемножение эпюр, ограниченных ломаными линиями?
15. Укажите случаи, когда нельзя применить способ Верещагина.

3 СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Статически неопределимыми системами называются системы, в элементах которых только из уравнений равновесия твердого тела нельзя определить силовые факторы. В таких системах связей больше, чем необходимость для равновесия. Некоторые связи оказываются как бы «лишними», а усилия в них – «лишними» неизвестными. По числу лишних связей устанавливают степень статической неопределимости системы.

Для определения усилий в статически неопределимых системах дополнительно к уравнениям статики составляют уравнения совместности деформаций. Число таких уравнений равно степени статической неопределимости.

Основные этапы расчета статически неопределимой системы

1. Устанавливаем степень статической неопределимости системы, т.е. число лишних связей или лишних неизвестных усилий.
2. Выбираем основную систему. Система, получающаяся из заданной статически неопределимой системы путем снятия нагрузок и удаления лишних связей, называется основной системой. Основная система будет

статически определимой. Обозначим статически определимую систему через O .

3. Загружаем основную систему заданной нагрузкой и лишними неизвестными усилиями, заменяющими действие удаленных связей. Такая система называется эквивалентной системой и обозначается через \mathcal{E} .

4. Определяем неизвестные усилия X_1, X_2, X_3, \dots из условий одинаковости деформации заданной и эквивалентной систем. Это условие сводится к тому, что приравнивают к нулю перемещения точек приложения неизвестных усилий по направлению их действия.

Определяем перемещения соответствующих точек эквивалентной системы способом Мора или способом Верещагина.

5. Найдя лишние неизвестные усилия, строим эпюры внутренних сил M, Q, N .

6. Проводим подбор сечения стержней и проверяем на прочность обычными способами.

Метод сил

Указанная схема расчета носит название метода сил, т.к. в качестве основных неизвестных здесь выбираем усилия лишних связей. Дополнительные уравнения совместности деформаций, выражающие равенство нулю перемещений по направлениям по лишним неизвестным, составляет в канонической форме, т.е. по определенной закономерности и называют **системой канонических уравнений**

$$\begin{aligned} \delta_{11} \times x_1 + \delta_{12} \times x_2 + \delta_{13} \times x_3 + \dots + \delta_{1n} \times x_n + \Delta_{1F} &= 0, \\ \delta_{21} \times x_1 + \delta_{22} \times x_2 + \delta_{23} \times x_3 + \dots + \delta_{2n} \times x_n + \Delta_{2F} &= 0, \\ \dots & \\ \delta_{K1} \times x_1 + \delta_{K2} \times x_2 + \delta_{K3} \times x_3 + \dots + \delta_{Kn} \times x_n + \Delta_{KF} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где δ_{11} — перемещение по направлению X_1 от силы $X_1 = 1$;

δ_{12} — перемещение по направлению X_1 от силы $X_2 = 1$;

Δ_{1F} — перемещение по направлению X_1 от силы F ;

δ_{iK} — перемещение по направлению x_i от силы $x_k = 1$.

Пример. Построить эпюры M , Q , N для рамы, указанной на рисунке 3.1, и произвести расчет на прочность ее стержней.

Сечение стержней прямоугольное $h : b = 2$.

Материал — сталь Ст2, $\sigma_{adm} = 140$ МПа, $l = 1$ м, $F = 20$ кН, $\tau_{adm} = 90$ МПа.

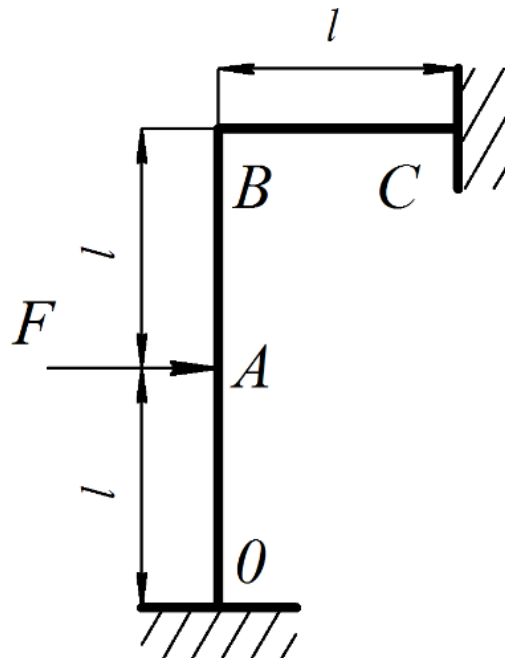


Рисунок 3.1 — Схема рамы для построения эпюры M , Q , N

Рама является трижды статически неопределимой: имеет 6 неизвестных реакций (усилий) опор; уравнений статики можно вписать только три. Степень статической неопределимости n равна трем:

$$n = 6 - 3 = 3.$$

Возможные основные системы для заданной рамы показаны на рисунке 3.2:

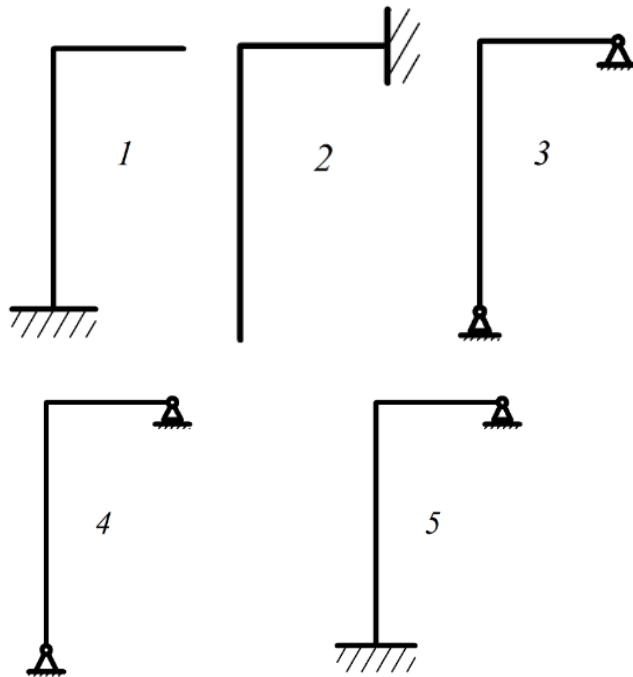


Рисунок 3.2 - Возможные основные системы для заданной рамы

Выберем основную систему 1 и возьмем соответствующую эквивалентную систему (рисунок 3.3):

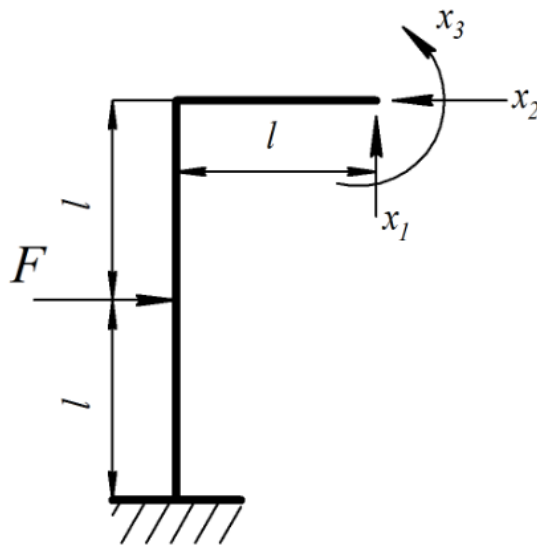


Рисунок 3.3 - Соответствующая эквивалентная система

Запишем систему канонических уравнений метода сил:

$$\begin{aligned}\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3 + \Delta_{1F} &= 0, \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 + \Delta_{2F} &= 0, \\ \delta_{31}x_1 + \delta_{32}x_2 + \delta_{33}x_3 + \Delta_{3F} &= 0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Для наглядности покажем перемещения на раме от $x_1 = 1$, от $x_2 = 1$, от $x_3 = 1$, от силы F (рисунок 3.4):

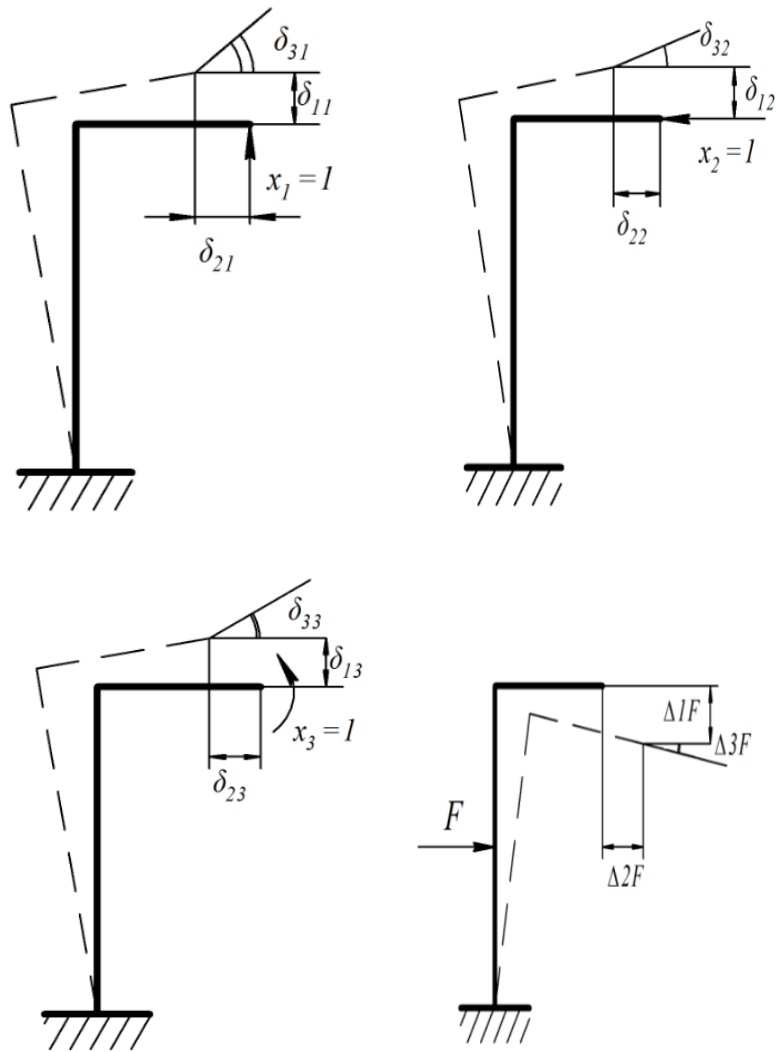


Рисунок 3.4 - Перемещения на раме

В канонических уравнениях неизвестными являются усилия X_1, X_2, X_3 . Коэффициенты δ_{ik} и Δ_{iF} можно определить по способу Мора или способу Верещагина. Для определения перемещений δ_{ik} и Δ_{iF} основную систему нагружаем отдельно каждой единичной силой $X_1=1, X_2=1, X_3=1$ и отдельно заданной нагрузкой. Так как стержни прямолинейные, то удобно применить для определения перемещений способ Верещагина. От приложенных нагрузок строим эпюры изгибающих моментов M_1, M_2, M_3, M_F (рисунок 3.5).

Для определения коэффициентов $\Delta_{1F}, \Delta_{2F}, \Delta_{3F}$ площадь эпюры M_F перемножаем на ординаты эпюр M_1, M_2, M_3 , соответствующие центру тяжести эпюры M_F :

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EI} \times \frac{1}{2} l \times Fl \times l = -\frac{Fl^3}{2EI};$$

$$\Delta_{2F} = -\frac{1}{EI} \times \frac{1}{2}l \times Fl \times \frac{5}{3}l = -\frac{5Fl^3}{6EI}; \quad (3.3)$$

$$\Delta_{3F} = -\frac{1}{EI} \times \frac{1}{2}l \times Fl \times 1 = -\frac{Fl^2}{2EI}.$$

Коэффициенты δ_{11} , δ_{22} , δ_{33} получаем аналогичным умножением эпюр M_1 на M_1 , M_2 на M_2 и M_3 на M_3 :

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2}l \times l \times \frac{2}{3}l + 2 \times l \times l \right) = \frac{7l^3}{3EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \times \frac{1}{2} \times 2l \times 2l \times \frac{4}{3}l = \frac{8l^3}{EI}; \quad (3.4)$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EI} (l \times 1 \times 1 + 2l \times 1 \times 1) = \frac{3l}{EI}.$$

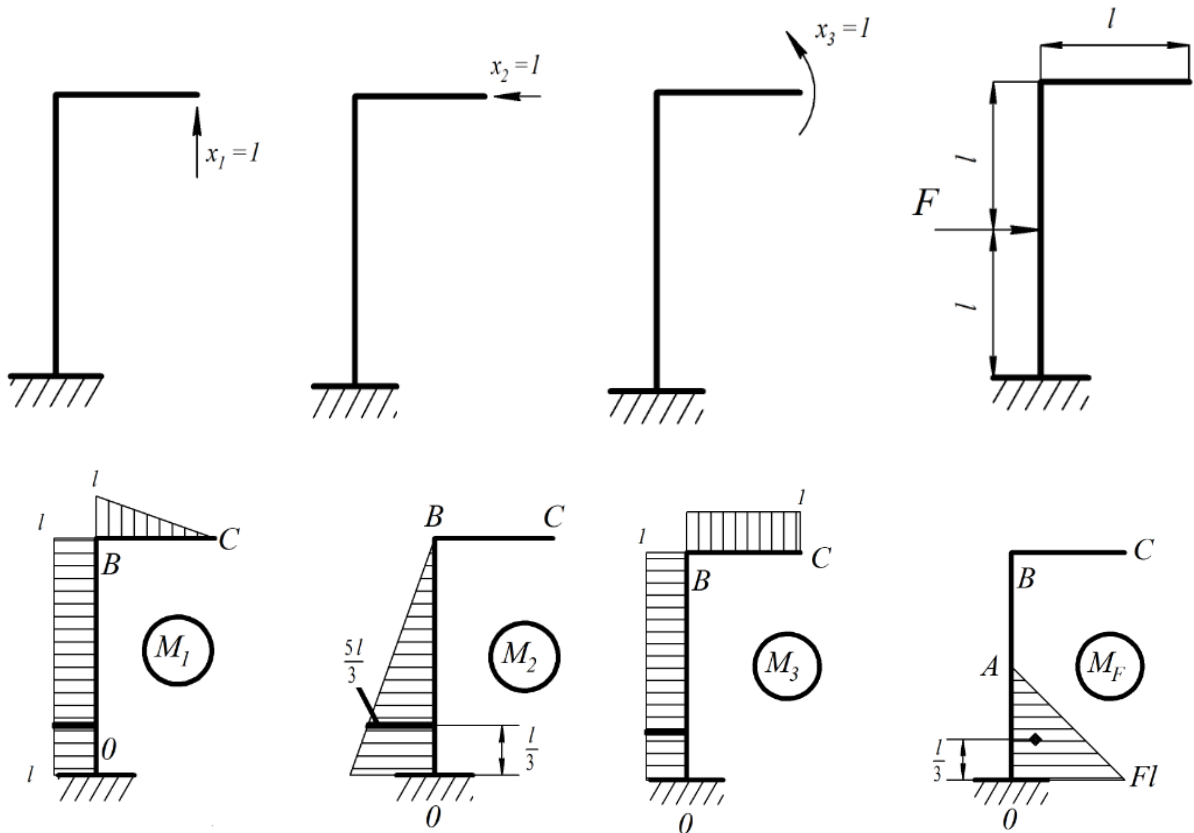


Рисунок 3.5 - Эпюры изгибающих моментов

Коэффициенты δ_{12} , δ_{13} получаем перемножением эпюр M_1 на M_2 и M_1 на M_3 , где от одной из них берется площадь, а от другой ордината против центра тяжести первой:

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \times 2l \times l \times l = \frac{2l^3}{EI}; \quad (3.5)$$

$$\delta_{13} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2}l \times l \times 1 + 2l \times l \times 1 \right) = \frac{5l^2}{2EI}. \quad (3.6)$$

Коэффициенты δ_{23} получим перемножая эпюры M_2 на M_3 :

$$\delta_{23} = \frac{1}{EI} \times \frac{1}{2} \times 2l \times 2l \times 1 = \frac{2l^2}{EI}.$$

Коэффициенты δ_{11} , δ_{22} , δ_{33} называются главными коэффициентами и имеют всегда знак плюс. Остальные коэффициенты могут иметь любые знаки и могут быть равными нулю.

Сохраняется равенство $\delta_{ik} = \delta_{ki}$, отсюда следует, что:

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \frac{2l^3}{EI}; \delta_{31} = \delta_{13} = \frac{5l^2}{2EI}; \delta_{32} = \delta_{23} = \frac{2l^2}{EI}. \quad (3.7)$$

Все полученные значения δ и Δ подставляем в канонические уравнения (величину EI писать не будем – она сокращается):

$$\frac{7l^3}{3}x_1 + 2l^3x_2 + \frac{5l^2}{2}x_3 - \frac{Fl^3}{2} = 0; \quad (3.8)$$

$$2l^3x_1 + \frac{8l^3}{3}x_2 + 2l^2x_3 - \frac{5F}{6}l^3 = 0; \quad (3.10)$$

$$\frac{5}{2}l^2x_1 + 2l^2x_2 + 3lx_3 - \frac{Fl^2}{2} = 0. \quad (3.11)$$

Решая это уравнения, находим:

$$x_1 = -\frac{F}{4}; x_2 = \frac{7}{16}F; x_3 = -\frac{F \times l}{12}. \quad (3.12)$$

Знак минус у x_1 означает, что в действительности x_1 направлен вниз. На рис. 3.6 показана эквивалентная система с известными величинами x_1 , x_2 , x_3 .

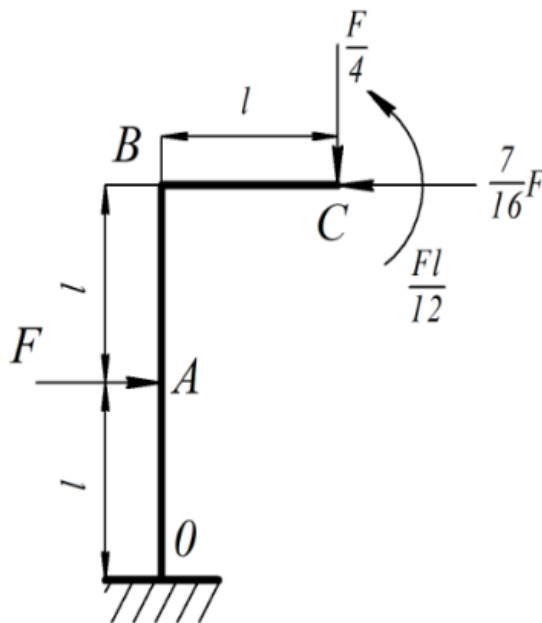


Рисунок 3.6 - Эквивалентная система с известными величинами

Строим эпюры M , Q , N для эквивалентной рамы, которая является статически определимой системой (рисунок 3.7).

Размеры сечения стержней подбираем только из условия прочности на изгиб:

$$W \geq \frac{M_{max}}{\sigma_{adm}}. \quad (3.13)$$

Проверку прочности производим по наибольшему нормальному напряжению в поперечном сечении от действия изгибающего момента и осевой силы:

$$\sigma_{max} = \left(\frac{M_{max}}{W} + \frac{N}{A} \right) \leq \sigma_{adm}. \quad (3.14)$$

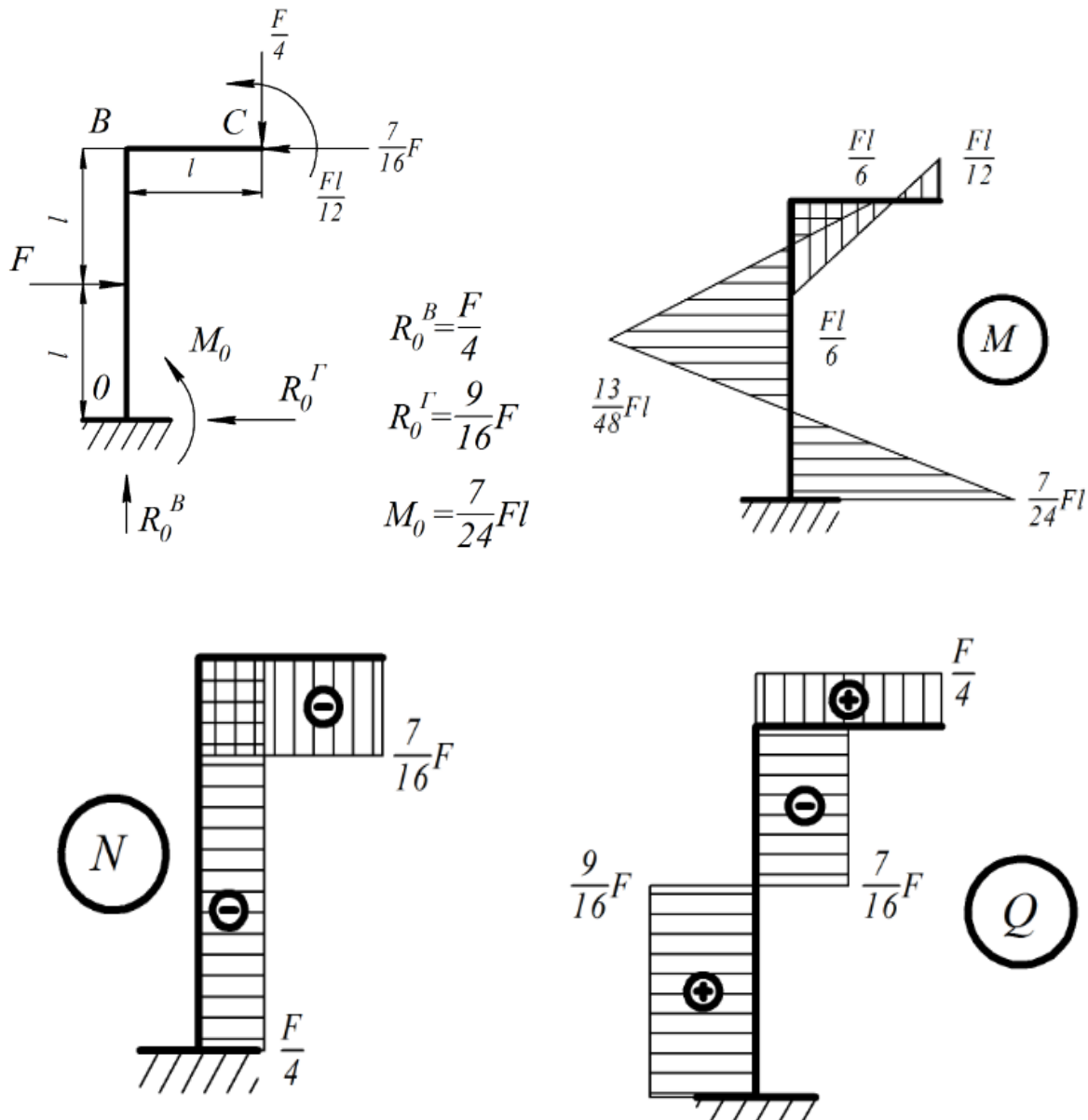


Рисунок 3.7 - Эпюры M , Q , N для эквивалентной рамы

Подберём прямоугольное сечение для стержней рамы по заданным параметрам при соотношении сторон $h : b = 2$ (рисунок 3.8):

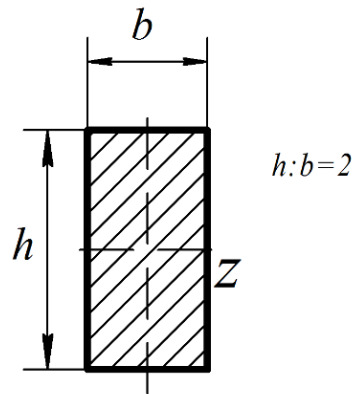


Рисунок 3.8 - Прямоугольное сечение для стержней рамы

Как видно из этих эпюр внутренних усилий в опасном сечении:

$$M_{max} = \frac{7}{24} Fl = 5,835 \text{ кНм}; Q_{max} = \frac{9}{16} F = 11,25 \text{ кН}; N = \frac{F}{4} = 5 \text{ кН}.$$

Размеры поперечного сечения стержней “h”, “b” находим из условия прочности на изгиб:

$$W_Z = \frac{M_{max}}{\sigma_{adm}} = \frac{5,835 \times 10^3 \text{ Нм}}{140 \times 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}} = 0,417 \times 10^{-4} \text{ м}^3 = 41,7 \text{ см}^3,$$

$$W_Z = \frac{bh^2}{6} = \frac{2}{3} b^3 = 41,7 \text{ см}^3, \text{ отсюда } b = 3,91 \text{ см}.$$

Округляя, получим $b = 4 \text{ см}$, $h = 8 \text{ см}$, $A = 32 \text{ см}^2$,

$$W_Z = \frac{bh^2}{6} = 42,67 \text{ см}^3.$$

Проверим стержни на прочность по найденным размерам от действия изгибающего момента и осевой силы:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_Z} + \frac{N}{A} = \frac{5,835 \times 10^3 \text{ Нм}}{42,67 \times 10^{-6} \text{ м}^3} + \frac{5 \times 10^3 \text{ Н}}{32 \times 10^{-4} \text{ м}^2} = 183,26 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{max} < \sigma_{adm}.$$

Наибольшее касательное напряжение:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \times \frac{Q_{max}}{A} = \frac{3}{2} \times \frac{11,25 \times 10^3 \text{ Н}}{32 \times 10^{-4} \text{ м}^2} = 5,27 \text{ МПа}.$$

$$\tau_{max} < \tau_{adm}.$$

Прямая и обратная симметрия рам

Если рама имеет ось симметрии, то при загрузении её могут быть три случая:

- 1) нагрузка не симметрична относительно оси симметрии рамы;
- 2) нагрузка прямо симметрична относительно оси симметрии рамы;
- 3) нагрузка обратно симметрична относительно оси симметрии рамы.

В случаях 2 и 3 число неизвестных усилий в раме часто может быть уменьшено правильным выбором основной системы. Рассмотрим на примерах.

Пример 1.

Симметричная рама с прямо симметричной нагрузкой (рисунок 3.10). Если разрезать заданную раму по оси симметрии, то получим две отдельные статические определимые рамы.

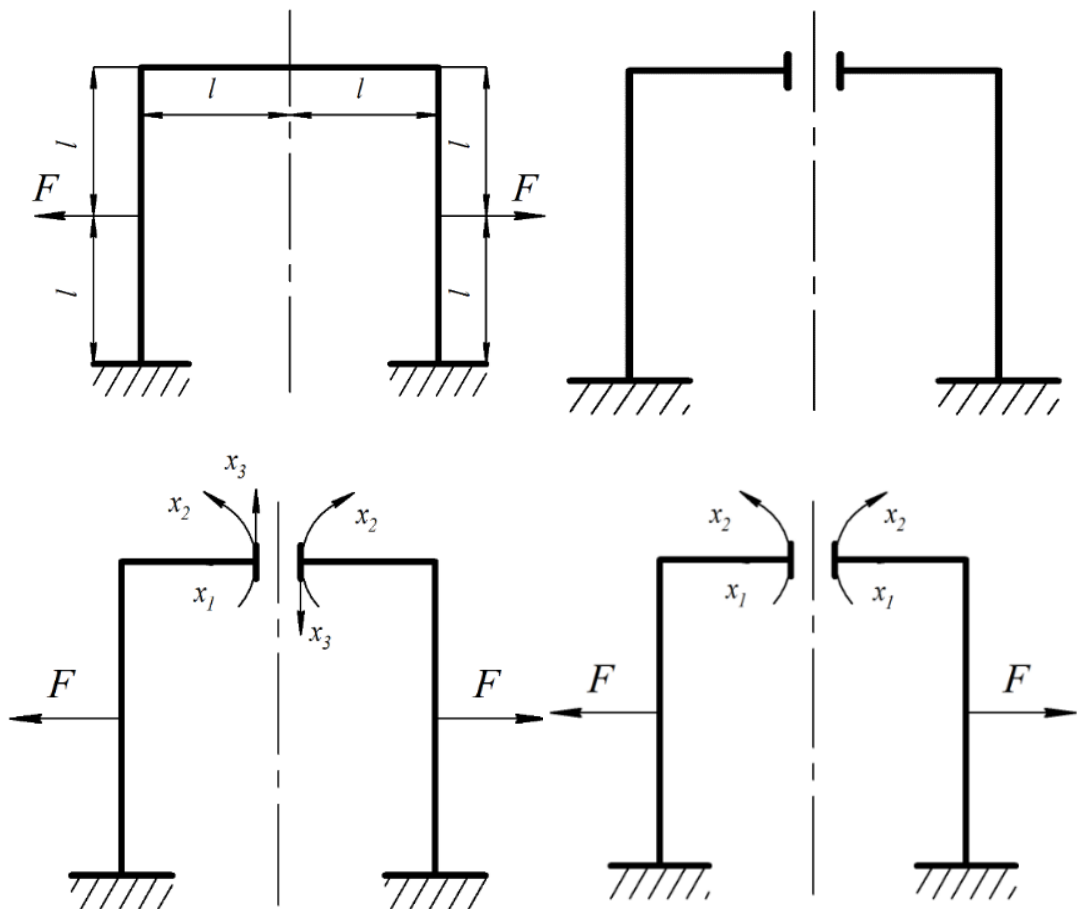


Рисунок 3.10 - Симметричная рама с прямо симметричной нагрузкой

Принимаем эти статически определимые рамы в качестве основной системы (обе половинки рамы для наглядности развернуты). Для получения эквивалентной системы основную систему загружаем усилиями F и X_1 , X_2 , X_3 . Так как обе половинки эквивалентной системы прямо симметричны в отношении конструкции и заданной нагрузки F , то в месте разреза (на оси симметрии рамы) возникают внутренние силы, имевшие прямую симметрию в отношении X_1 и X_2 а несимметричная сила X_3 равна нулю. В этом случае будут два канонических уравнения:

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1F} = 0; \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2F} = 0. \quad (3.15)$$

При выборе любой другой основной системы получим три неизвестных X_1, X_2, X_3 и необходимо будет решать три канонических уравнения.

Пример 2.

Симметричная рама с обратно симметричной нагрузкой (рисунок 3.11).

Основную систему принимаем в виде двух отдельных рам, получаемых разрезом заданной рамы по оси симметрии. Так как рама обратно симметрична по отношению нагрузки F , то и внутренние силы на оси симметрии (по месту разреза) должны быть обратно симметричны. Этому условию удовлетворяет $X_1, X_2 = 0, X_3 = 0$. Одно каноническое уравнение:

$$\delta_{11}x_1 + \Delta_{1F} = 0; \quad (3.15)$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2}l \times l \times \frac{2}{3}l + 2l \times l \times l \right) \times 2 = 2 \frac{7l^3}{3EI}; \quad (3.16)$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2}l \times F \times l \times l \right) = -\frac{Fl^3}{2EI} \times 2; \quad 2 \frac{7l^3}{3EI} x_1 - 2 \frac{Fl^3}{2EI} = 0; \quad (3.17)$$

$$x_1 = \frac{3}{14} F. \quad (3.14)$$

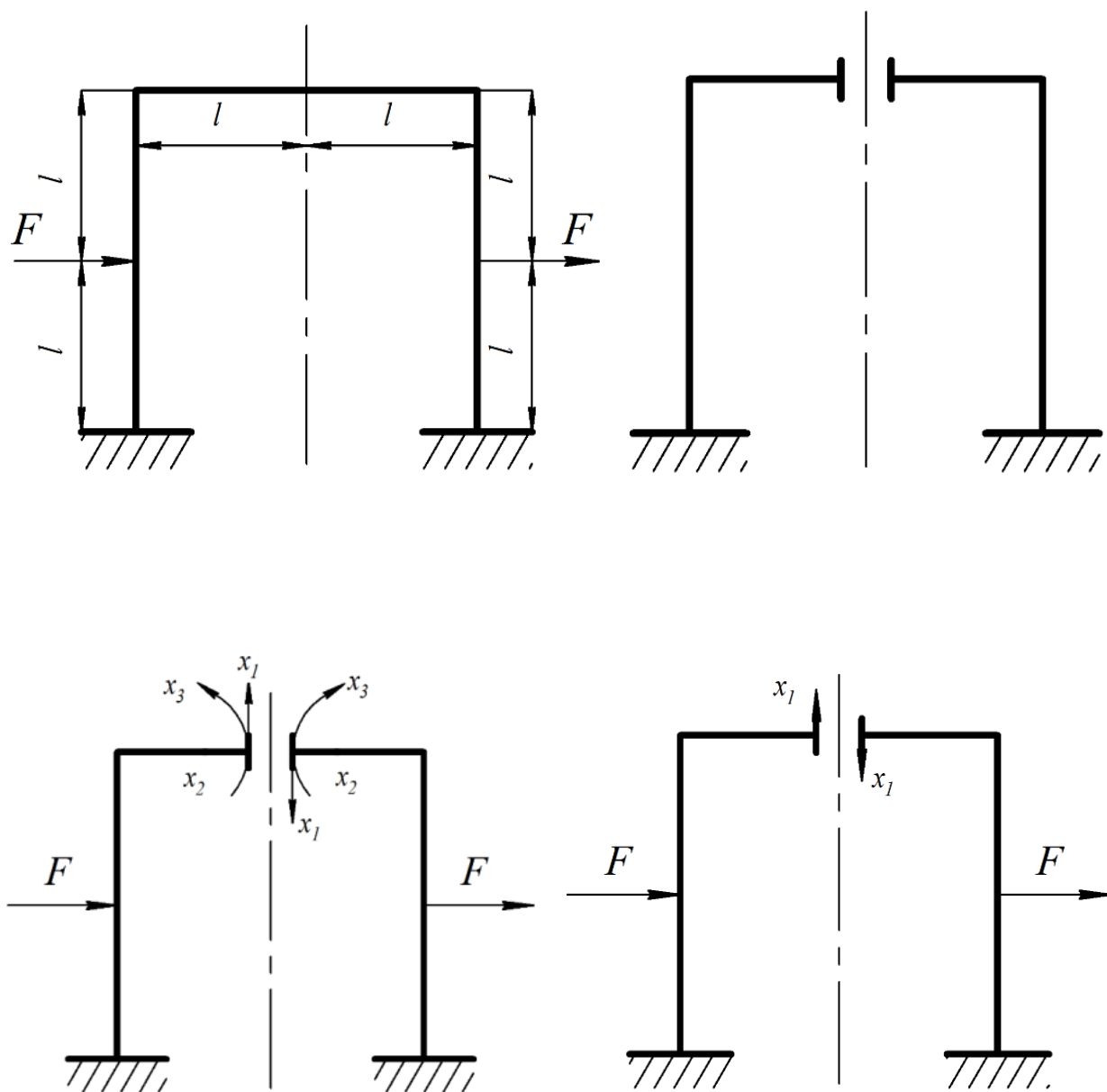


Рисунок 3.11 - Симметричная рама с обратно симметричной нагрузкой
Суммарная эпюра показана на рисунке 3.12.

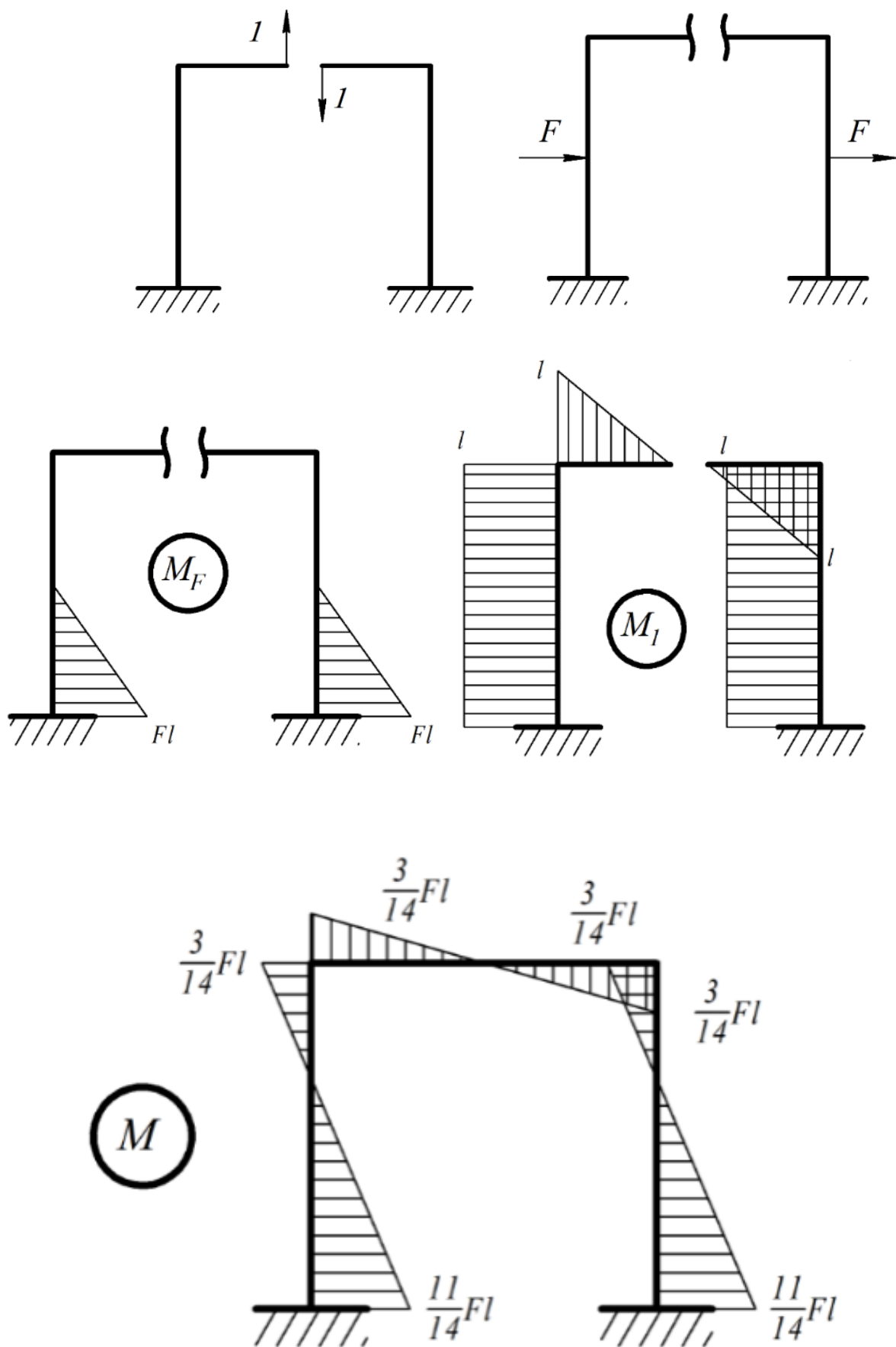


Рисунок 3.12 - Суммарная эпюра

Многопролетные неразрезные балки.

Уравнение трех моментов

Неразрезными называют балки, лежащие более чем на двух опорах и не имеющих промежуточных шарниров. Такие балки, широко применяемые в различных конструкциях, принадлежат к числу статически неопределимых. Опоры принято нумеровать слева направо, обозначая крайнюю левую номером 0. Номер пролета определяется номером принадлежащей ему правой опоры (рисунок 4.1а). Число лишних связей равно числу промежуточных опор. Иногда крайняя опора выполняется в виде защемления. В этом случае степень статической неопределимости увеличивается на единицу по сравнению с шарнирной опорой.

Оптимальной основной системой будет статически определимая балка с шарнирами в сечениях над всеми промежуточными опорами (рисунок 4.1б). Лишними неизвестными в этом случае будут изгибающие моменты в опорных сечениях балки.

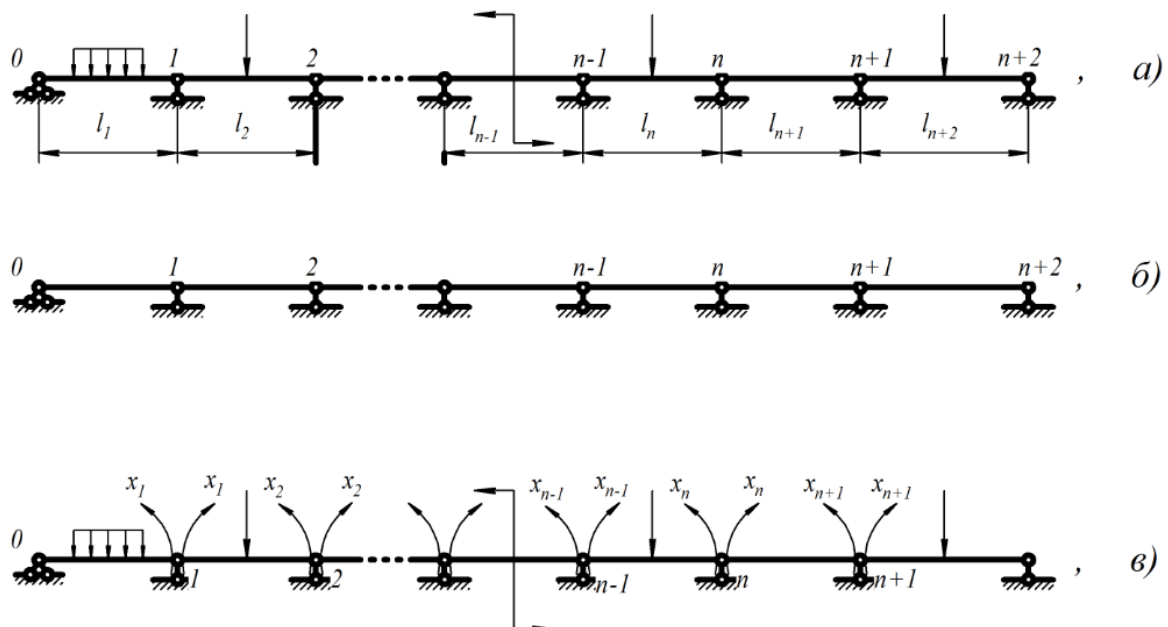


Рисунок 4.1 - Статически определимая балка с шарнирами в сечениях над всеми промежуточными опорами

Таким образом, эквивалентная система представляет собой ряд простых шарнирно опертых балок, нагруженных заданной нагрузкой и неизвестными изгибающими моментами:

$$M_1 = x_1, M_2 = x_2, \dots, M_n = x_n, M_{n+1} = x_{n+1} \quad (4.1)$$

приложенными в сечениях, где поставлены шарниры (рисунок 4.1в). Направления моментов приняты положительными. Дополнительные уравнения перемещений выражают собой равенство нулю перемещений опорных сечений по направлениям действия неизвестных опорных моментов.

Запишем уравнение для опоры “n” в каноническом виде. Поскольку основная система состоит из отдельных, не связанных между собой двухопорных балок, то рассматриваем только два пролёта основной системы, примыкающим к n-ой опоре:

$$\delta_{n_1 n-1} \times x_{n-1} + \delta_{n_2 n} \times x_n + \delta_{n_3 n+1} + \Delta_{nF} = 0. \quad (4.2)$$

Применяя способ Верещагина для определения коэффициентов δ и Δ , получаем следующее уравнение:

$$x_{n-1} \times l_n + 2x_n(l_n + l_{n+1}) + x_{n+1} \times l_{n+1} = -6\left(\frac{A_n \times a_n}{l_n} + \frac{A_{n+1} \times b_{n+1}}{l_{n+1}}\right), \quad (4.3)$$

где A_n, A_{n+1} – площади эпюр от заданной нагрузки на n-м и (n+1)-м пролётах; a_n, b_{n+1} – расстояние от центров тяжести этих площадей до левой и правой опор своего пролёта (рисунок 4.2).

Поскольку при этом выборе основной системы все лишние неизвестные представляют собой изгибающие моменты в опорных сечениях балки, то вместо X_i запишем M_i :

$$M_{n-1} \times l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} \times l_{n+1} = -6\left(\frac{A_n \times a_n}{l_n} + \frac{A_{n+1} \times b_{n+1}}{l_{n+1}}\right). \quad (4.4)$$

Последнее уравнение называется уравнением трех моментов. Составляем таких уравнений столько, сколько будет промежуточных опор. Уравнение трех моментов записано для балки постоянного поперечного сечения.

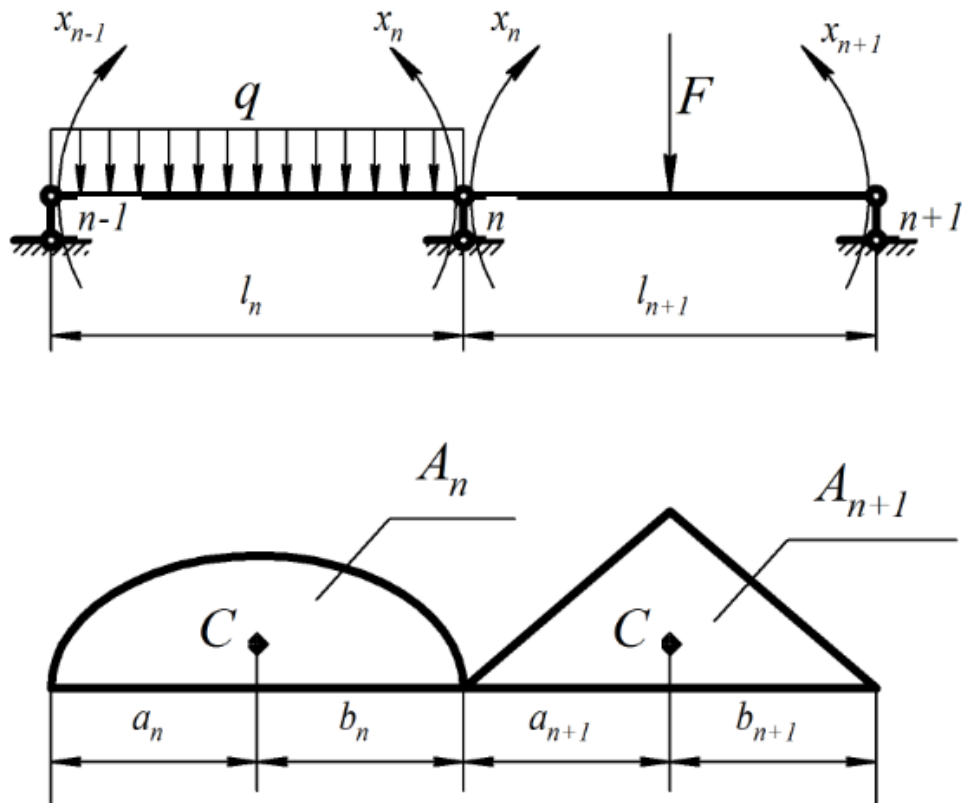


Рисунок 4.2 - Двухопорная балка для определения коэффициентов δ и Δ

Неразрезные балки с консолями.

Балки с защемленными концами

Теорему о трех моментах можно распространить на те случаи, когда концы балки (один или оба) защемлены. При расчете неразрезной балки с защемленным концом необходимо вместо защемления добавить еще пролет, составить уравнение трех моментов для каждой промежуточной опоры. При решении уравнений трех моментов положить, что дополнительный пролет равен нулю (рисунок 4.3).

Запишем уравнение трех моментов для первой опоры:

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_{\dots}) + M_2 l_2 = -6 \left(\frac{A_1 \times a_1}{l_1} + \frac{A_2 \times b_2}{l_2} \right) \quad (4.5)$$

Так как $l_1 = 0$ и $A_1 = 0$, то уравнение перепишем:

$$2M_1l_2 + M_2l_2 = -6 \frac{A_2b_2}{l_2}. \quad (4.6)$$

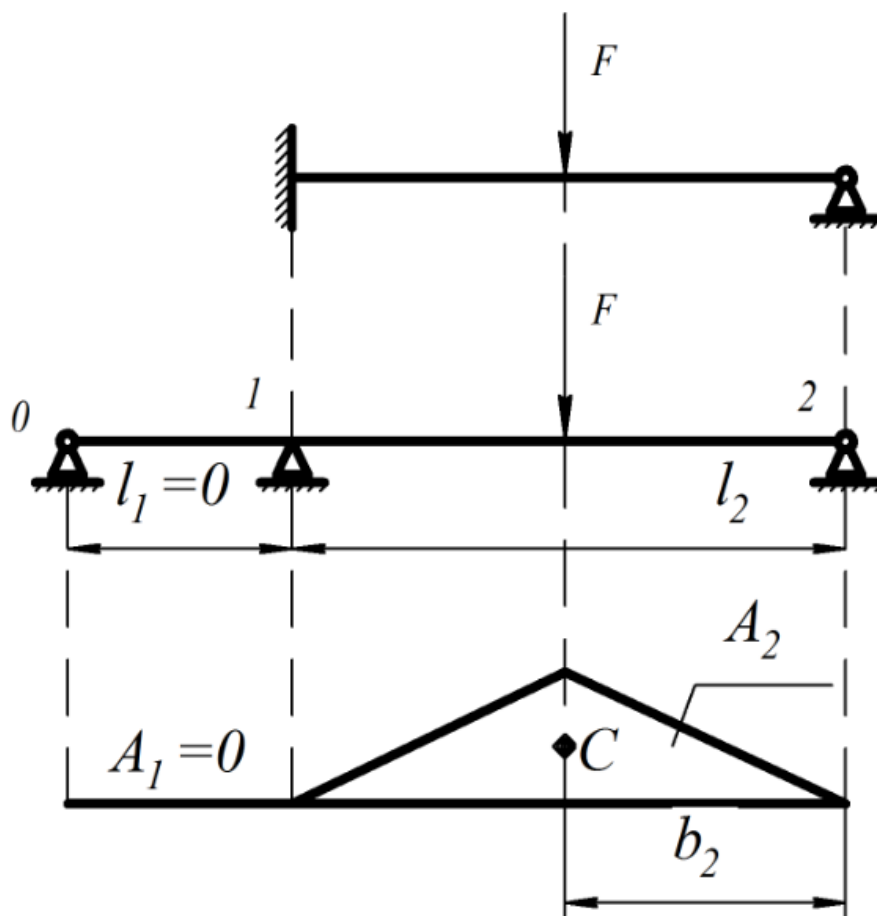


Рисунок 4.3 - Нерезная балка с консолями

При расчёте нерезной балки с консолью «а» (рисунок 4.4) в уравнении трёх моментов опорный момент M_2 следует считать известным:

$$M_2 = -\frac{qa^2}{2}. \quad (4.7)$$

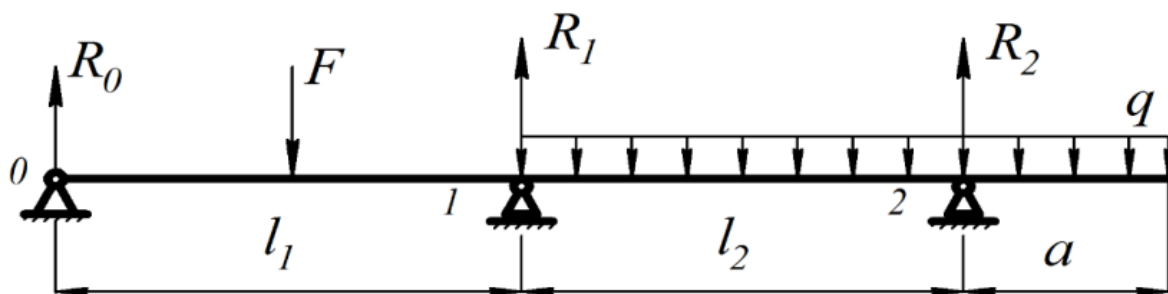


Рисунок 4.4 – Нерезная балка с консолью «а» в уравнении трёх моментов

Определение опорных реакций

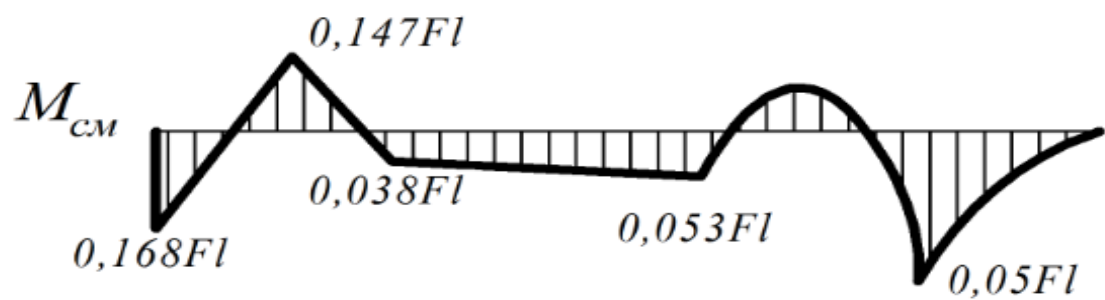
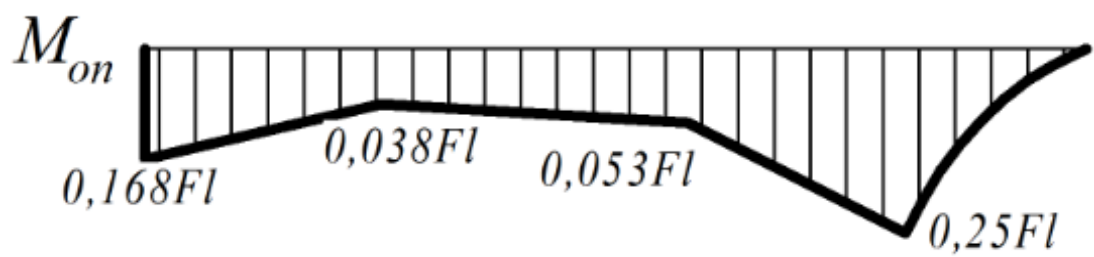
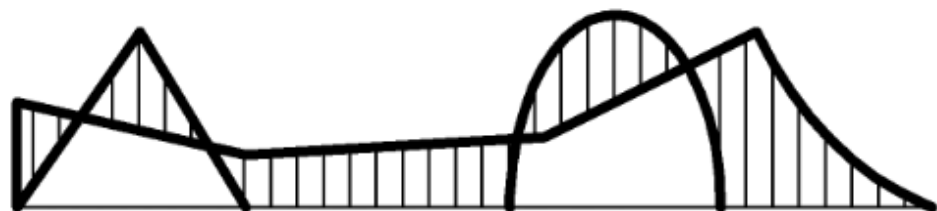
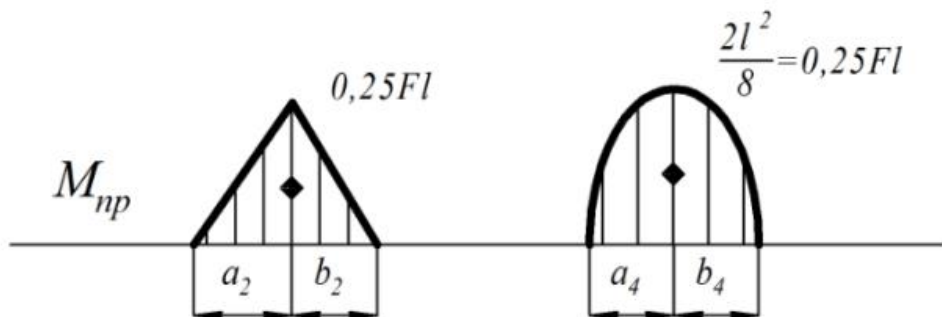
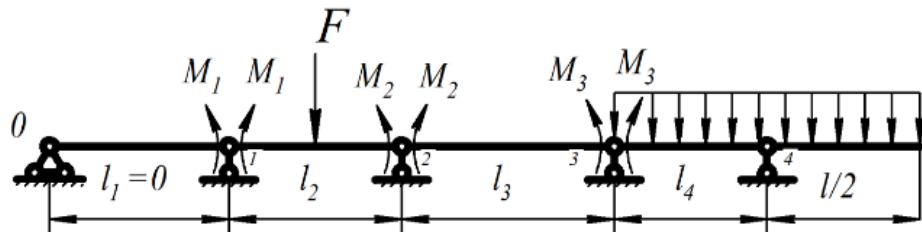
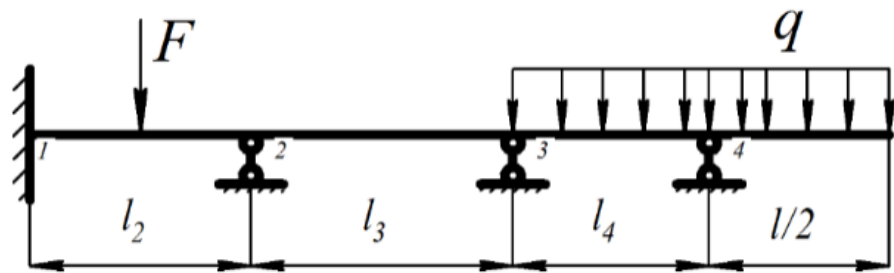
Для нахождения величин реакций составим выражения изгибающих моментов относительно опор и приравняем их полученным значениям опорных моментов. Например, (рисунок 4.5):

$$R_0 \times l_1 - F \frac{l_1}{2} = M_1; \quad (4.8)$$

$$R_0(l_0 + l_1) - F \left(\frac{l_1}{2} + l_2 \right) + R_1 l_2 - \frac{ql_2^2}{2} = M_2. \quad (4.9)$$

Порядок расчёта неразрезной балки

1. Устанавливаем степень статической неопределимости балки.
2. Строим эпюру изгибающих моментов в каждом пролёте $M_{\text{пр}}$ от заданной нагрузки.
3. Определяем площади эпюр $M_{\text{пр}}$ в каждом пролёте ($A_i, A_{i+1}; A_i, A_{i+1}, \dots$) и устанавливаем значения a_i и b_{i+1} (расстояния от центра тяжести эпюры до левой и правой опор в рассматриваемом пролёте).
4. Записываем уравнение трёх моментов для каждой промежуточной опоры.
5. Решаем систему уравнений трёх моментов и находим значения опорных моментов.
6. Строим эпюру опорных моментов $M_{\text{оп}}$ (в том же масштабе, что и эпюру $M_{\text{пр}}$).
7. Накладываем эпюру $M_{\text{оп}}$ на $M_{\text{пр}}$ (или наоборот) и получаем суммарную эпюру моментов - $M_{\text{сумм}}$.
8. Определяем опорные реакции.
9. Строим эпюру перерезывающих сил - Q .



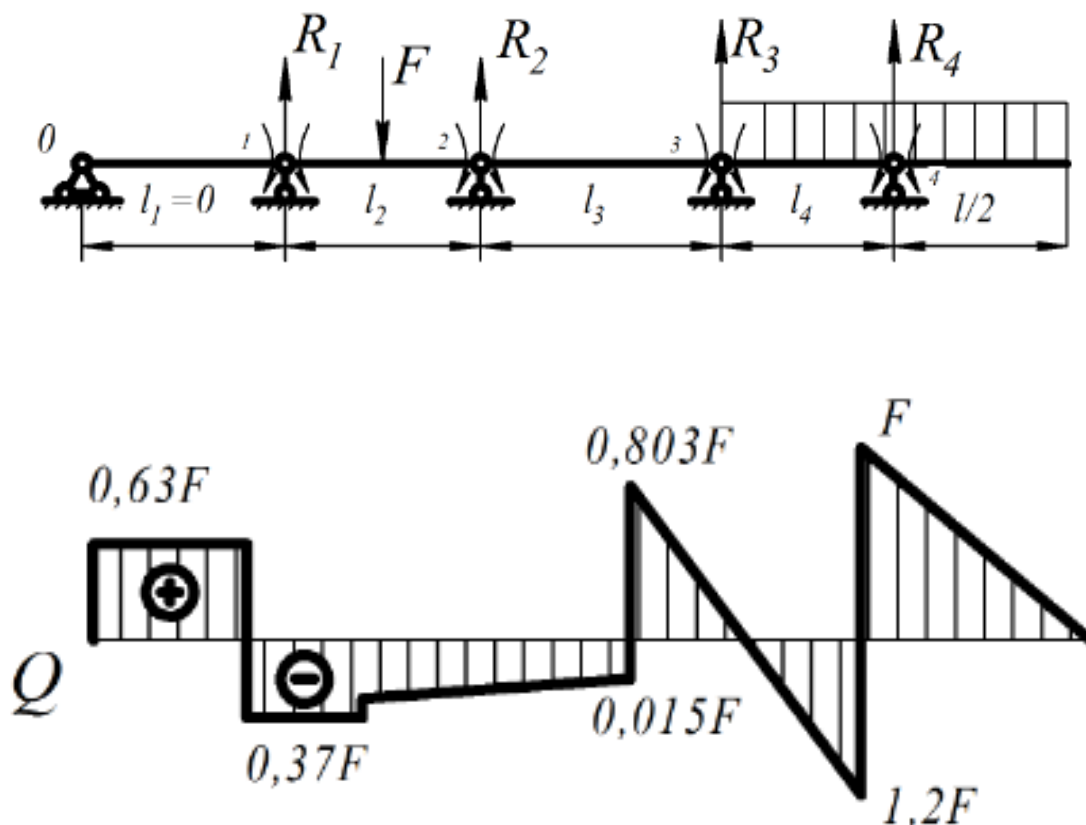


Рисунок 4.5 - Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для заданной балки

10. Из условия прочности на изгиб для опасного сечения находим поперечные размеры сечения.

11. Найденные размеры сечения проверяем на максимальное касательное напряжение τ_{max} .

Пример

Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для заданной балки (рисунок 4.5) при

$$F = \frac{ql}{2}, l_2 = l_3 = l_4 = l$$

1. Вводим дополнительный пролёт длиной $l_1 = 0$.
2. Определяем степень статической неопределимости, она равна 3.

3. Строим эпюры пролётных моментов $M_{\text{пр}}$.

4. Вычисляем площади эпюры:

$$A_1 = 0; A_2 = 0,5 \times 0,25F \times l \times l = 0,125Fl^2; A_3 = 0;$$

$$A_4 = \frac{2}{3}l \times \frac{1}{4}Fl = \frac{1}{6}Fl^2.$$

5. Определяем значения a_i, b_i :

$$a_2 = \frac{l}{2}, b_2 = \frac{l}{2}; a_4 = \frac{l}{2}, b_4 = \frac{l}{2}.$$

6. Записываем уравнения трёх моментов для первой, второй и третьей опор:

$$M_0l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2l_2 = -6 \left(\frac{A_1a_1}{l_1} + \frac{A_2b_2}{l_2} \right);$$

$$M_1l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3l_3 = -6 \left(\frac{A_2a_2}{l_2} + \frac{A_3b_3}{l_3} \right);$$

$$M_2l_3 + 2M_3(l_3 + l_4) + M_4l_4 = -6 \left(\frac{A_3a_3}{l_3} + \frac{A_4a_4}{l_4} \right).$$

Так как $l_1 = 0$, а l_2, l_3, l_4 приняли равными l и $A_1 = 0, A_3 = 0$, то уравнения 3 моментов перепишем:

$$2M_1 + M_2 = -\frac{3}{8}Fl,$$

$$M_1 + 4M_2 + M_3 = -\frac{3}{8}Fl,$$

$$M_2 + 4M_3 + M_4 = -\frac{1}{2}Fl,$$

$$\text{где } M_4 = -\frac{ql^2}{8} = -0,25Fl.$$

Решая систему уравнений, получаем:

$$M_1 = -0,168Fl, M_2 = -0,038Fl, M_3 = -0,053Fl.$$

Отрицательные значения опорных моментов показывают, что моменты M_1, M_2, M_3 направлены противоположно указанным на рисунке 4.5. По значениям M_2, M_3, M_4 и M_1 строим эпюру опорных моментов. Затем путём наложения эпюр $M_{\text{пролёт.}}$ и $M_{\text{опорн.}}$ получаем суммарную эпюру M .

Определение опорных реакций

$$\sum M_2^{\text{слев.}} = M_2;$$

$$R_1 l + M_1 - \frac{Fl}{2} = M_2; R_1 l - 0,168Fl - 0,5Fl = -0,038Fl;$$

$$R_1 = 0,63F;$$

$$\sum M_3^{\text{слев.}} = M_3; M_1 + R_1 * 2l - F \times 1,5l + R_2 l = M_3;$$

$$0,168Fl + 0,63Fl - 1,5Fl + R_2 l = -0,053Fl;$$

$$R_2 = 0,355F;$$

$$\sum M_3^{\text{спр.}} = M_3; R_4 \times l - \frac{q \times (1,5l)^2}{2} = M_3; R_4 l - 2,25Fl = -0,053Fl;$$

$$R_4 = 2,197F;$$

$$\sum M_2^{\text{спр.}} = M_2; R_4 \times 2l + R_3 \times l - q * 1,5l \times 1,75l = -0,038Fl;$$

$$2,197F \times 2l + R_3 l - \frac{2F}{l} \times 1,5l \times 1,75l = -0,038Fl;$$

$$R_3 = 0,818F.$$

Проверяем правильность найденных реакций:

$$\sum y = 0, \quad R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - F - q \times 1,5l = 0;$$

$$0,63F + 0,355F + 0,818F + 2,197F - F - \frac{2F}{l} \times 1,5l = 0.$$

Реакции вычислены, верно. Зная реакции, строим эпюру поперечных сил Q (рисунок 4.5).

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие системы называются статически неопределимыми?
2. Что называется степенью статической неопределимости системы?
3. Что такое основная система?
4. Каков физический смысл произведений $x_1 \times \delta_{11}$, $x_2 \times \delta_{12}$ ит.д.?

5. Какую мысль выражает каждое из канонических уравнений?
6. В каком порядке производится расчет статически неопределимых систем?
7. Как производится статическая проверка окончательных эпюр M , Q , N ?
8. Как производится деформационная проверка окончательной эпюры изгибающих моментов в статически неопределимых рамах?
9. Какие балки называются неразрезными?
10. Какой вид имеет уравнение трех моментов и какую мысль оно выражает?
11. Как вычисляются опорные реакции балки?
12. В каком порядке производится расчет неразрезной балки?
13. Как производится проверка правильности результирующей эпюры моментов?

ЛИТЕРАТУРА

1. Атаров, Н.М. Сопротивление материалов в примерах и задачах: Учебное пособие / Н.М. Атаров. - М.: ИНФРА-М, 2010. - 407 с.
2. Биргер, И.А. Сопротивление материалов: учеб. пособие для машиностроит. и авиац. вузов. / И.А. Биргер - 2-е изд. - М.: Ленанд, 2015. - 560 с.: ил.
3. Евтушенко, С.И. Сопротивление материалов: Сборник задач с решениями: Учебное пособие / С.И. Евтушенко, Т.А. Дукмасова, Н.А. Вильбицкая. - М.: ИЦРИОР: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 210 с.
4. Паршин, Л.К. Сборник задач по сопротивлению материалов. / Л.К. Паршин и др. - М.: Наука, 2011. - 432 с.
5. Пикмуллин, Г.В. Учебное пособие «Сопротивление материалов» / Г.В. Пикмуллин, А.А. Мустафин, С.М. Яхин, Р.Х. Марданов. - Казань: Изд-во Казанского ГАУ, 2016. - 176 с. ISBN 978-5-905201-37-0.
6. Пикмуллин, Г.В. Методические указания и контрольные задания по сопротивлению материалов / Г.В. Пикмуллин, А.А. Мустафин, Марданов Р.Х. - Казань: Изд-во Казанского ГАУ, 2019. - 44 с.
7. Серазутдинов, М.И. Прикладная механика: учебник / М.И. Серазутдинов, Э.Н. Островская, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин: под ред. М.Н. Серазутдинова – Казань, ООО Веда, 2011. – 322 с.
8. Степин, П. А. Сопротивление материалов, 13-е изд., стер. / П. А. Степин - М., "Высшая школа", 2014. – 320 с.
9. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов. / В.И. Феодосьев - М.: изд. МГТУ, 2007. - 592с.
10. Стородубцева, Т.Н. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: учеб. пособие - Электрон. дан. — Воронеж: ВГЛУ, 2015. — 196 с.
11. Сидорин С.Г. Сопротивление материалов: теория, тестовые задания, примеры решения: учеб. пособие / С.Г. Сидорин, Ф.С. Хайруллин. — М.: РИОР: ИНФРА - М, 2018. — 184 с.
12. Миролубов, И.Н. Сопротивление материалов: пособие по решению задач / И.Н. Миролубов [и др.]. - 9-е изд., испр. - СПб.: Лань, 2014. - 512 с.

Приложение 1

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ЕДИНИЦАМИ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Наименование величин	Единица		Соотношение единиц
	Наименование	Обозначение	
Сила, нагрузка, вес	Ньютон	Н	1 Н 0,1 кгс
Линейная нагрузка	Ньютон на метр	Н/м	1 Н/м 0,1 кгс/м 1 кН/м 0,1 тс/м
Поверхностная нагрузка, механическое напряжение, модуль упругости	Паскаль (Ньютон на квадратный метр)	Па	1 Па 0,1 кгс/м ² 1 кПа 0,1 тс/м ² 1 МПа 10кгс/см ²
Момент силы, момент пары сил	Ньютон-метр	Н·м	1 Н·м 0,1кгс·м 1 кН·м 0,1тс·м
Работа (энергия)	Джоуль	Дж	1 Дж 0,1 кгс·м
Мощность	Ватт (Джоуль в секунду)	Вт	1 Вт 0,1 кгс·м/с

Приложение 2

КРАТНЫЕ И ДОЛЬНЫЕ ЕДИНИЦЫ СИ

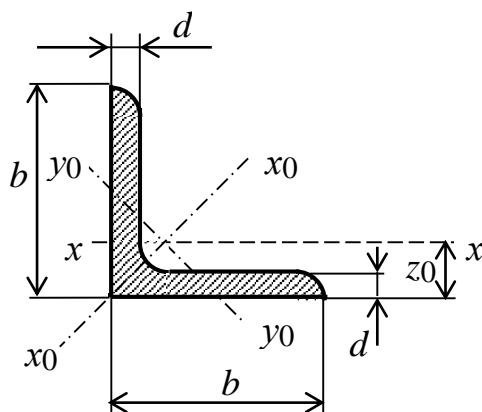
Приставка	Обозначение	Множитель	Приставка	Обозначение	Множитель
Тера	Т	10^{12}	Деци	д	10^{-1}
Гига	Г	10^9	Санتي	с	10^{-2}
Мега	М	10^6	Милли	м	10^{-3}
Кило	К	10^3	Микро	Мк	10^{-6}
Гекто	Г	10^2	Нано	н	10^{-9}
Дека	да	10^1	Пико	п	10^{-12}

Примечание. Приставки рекомендуется выбирать таким образом, чтобы числовые значения величин находились в пределах 0,1-1000.

Приложение 3

Сортамент прокатной стали

Таблица П1. Уголки равнополочные ГОСТ 8509-86



Но- мер про- фи- ля	b , мм	d , мм	Пло- щадь сече- ния A , см ²	I_x , см ⁴	i_x , см	I_{x_0} , см ⁴	i_{x_0} , max, см	I_{y_0} , см ⁴	i_{y_0} , min, см	z_0 , см
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	1,69
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	1,74
		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,20	1,24	1,78
7	70	5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	1,90
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	1,94
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	1,99
		8	10,70	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	2,02
		10	13,12	58,4	2,34	92,3	2,65	24,4	1,36	2,08
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	2,02
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	2,06
		7	10,10	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	2,10
		8	11,50	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	2,15
		9	12,80	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	2,18
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	2,17
		6	9,38	57,0	2,47	94,0	3,11	23,5	1,58	2,19
		7	10,80	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	2,23
		8	12,30	73,4	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	2,27

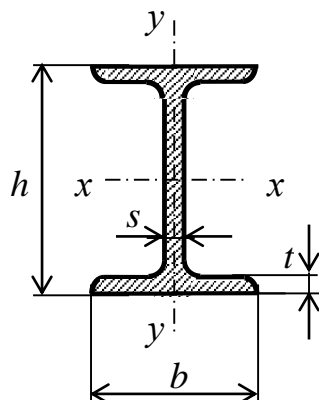
Продолжение таблицы П1

Но- мер про- фи- ля	b , см	d , см	Пло- щадь сече- ния A , см ²	I_x , см ⁴	i_x , см	I_{x_0} , см ⁴	i_{x_0} , max, см	I_{y_0} , см ⁴	i_{y_0} , min, см	z_0 , см
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130,0	3,50	34,0	1,79	2,43
		7	12,3	94,3	2,77	150,0	3,49	38,9	1,78	2,47
		8	13,9	106,0	2,76	168,0	3,48	8	1,77	2,51
		9	15,6	118,0	2,75	188,0	3,46	48,6	1,77	2,55
10	100	6,5	12,8	122,0	3,09	193,0	3,88	50,7	1,99	2,68
		7	13,8	131,0	3,08	207,0	3,88	54,2	1,98	2,71
		8	15,6	147,0	3,07	233,0	3,87	60,9	1,98	2,75
		10	19,2	179,0	3,05	284,0	3,84	74,1	1,96	2,83
		12	22,8	209,0	3,03	331,0	3,81	86,9	1,95	2,91
		14	26,3	237,0	3,00	375,0	3,78	99,3	1,94	2,99
		16	29,7	264,0	2,98	416,0	3,74	112,0	1,94	3,06
11	110	7	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	2,96
		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	3,00
12,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	3,36
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	3,40
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	3,45
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	3,53
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	3,61
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	3,68
14	140	9	24,7	465	4,34	739	5,47	192	2,79	3,78
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	3,82
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	3,90
16	160	10	31,4	744	4,96	1229	6,25	319	3,19	4,30
		11	34,4	884	4,95	1341	6,24	348	3,18	4,35
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	4,39
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	4,47
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	4,55
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	4,63
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	4,70
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	4,85
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	4,89

Продолжение таблицы П1

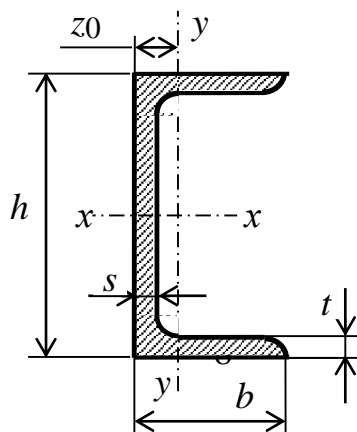
Но- мер про- фи- ля	b , мм	d , мм	Пло- щадь сече- ния A , см ²	I_x , см ⁴	i_x , см	I_{x_0} , см ⁴	i_{x_0} , max, см	I_{y_0} , см ⁴	i_{y_0} , min, см	z_0 , см
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	5,37
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	5,42
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	5,46
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	5,54
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5,70
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	5,89
		30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	6,07
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	5,93
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	6,02
25	150	16	78,4	4717	7,76	6492	9,78	1942	4,98	6,75
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	6,83
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	6,91
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	7,00
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	7,11
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	7,23
		30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	7,31

Таблица П2. Балки двутавровые ГОСТ 8239-72



Но- мер бал- ки	h , мм	b , мм	s , мм	t , мм	Пло- щадь A , см ²	I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x^* , см ³	I_y , см ⁴	i_y , см
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114,0	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104,0	115,0	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114,0	155,0	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131,0	157,0	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143,0	206,0	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163,0	198,0	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178,0	260,0	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210,0	260,0	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229,0	337,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268,0	337,0	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292,0	436,0	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339,0	419,0	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423,0	516,0	2,89
40	400	155	8,0	13,0	72,6	19062	953	16,2	545,0	667,0	3,03
45	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708,0	808,0	3,09
50	500	170	10,0	15,2	100,0	39727	1589	19,9	919,0	1043,0	3,23
55	550	180	11,0	16,5	118,0	55962	2035	21,8	1181,0	356,0	3,39
60	600	190	12,0	17,8	138,0	76806	2560	23,6	1491,0	1725,0	3,54
70a	700	210	15,0	24,0	202,0	152700	4360	27,5	2550,0	3240,0	4,01

Таблица ПЗ. Швеллеры ГОСТ 8240 – 72



Но- мер про- фи- ля	h , мм	b , мм	s , мм	t , мм	Пло- щадь сече- ния A , см ²	I_x , см ⁴	i_x , см	I_y , см ⁴	i_y , см	z_0 , см
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	1,92	5,61	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	2,54	8,70	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	3,16	12,8	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	3,99	20,4	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	4,78	31,2	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	5,60	45,4	1,7	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	5,66	57,5	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	6,42	63,3	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	6,49	78,8	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	7,24	86,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	7,32	105,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	8,07	113,0	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	8,15	139,0	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	8,89	151,0	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	8,99	187,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	9,73	208,0	2,60	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	9,84	254,0	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	10,9	262,0	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	12,0	327,0	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	13,1	410,0	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	14,2	513,0	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15520	15,7	642,0	3,23	2,75

Приложение 4

Механические характеристики некоторых сталей

Марка стали	Предел текучести σ_y , МПа	Предел прочности σ , МПа	Относительное удлинение σ , %
Ст. 0	19	32...47	18
Ст. 1	-	32...40	28
Ст. 2	19...22	34...42	26
Ст. 3	21...24	38...47	23...21
Ст. 4	24...26	42...52	21...19
Ст. 5	26...28	50...62	17...15
Ст. 6	30...31	60...72	13...11
20X	60	80	-
40,45,50	40...60	60...70	-

Приложение 5

Модули упругости и коэффициенты Пуассона

Материал	Модуль упругости E, МПа	Модуль сдвига G, МПа	Коэффициент Пуассона ν
Углеродистые стали	$(2,0 \dots 2,1)10^5$	$(8,0 \dots 8,1)10^4$	0,24...0,28
Легированные стали	$(2,1 \dots 2,2)10^5$	$(8,0 \dots 8,1)10^4$	0,25...0,30
Чугун серый	$(1,15 \dots 1,6)10^5$	$4,5 \cdot 10^4$	0,23...0,27
Чугун ковкий	$1,55 \cdot 10^5$	-	-
Медь (прокат)	$1,1 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^4$	0,31...0,34
Алюминий (прокат)	$0,69 \cdot 10^5$	$(2,6 \dots 2,7)10^4$	0,32...0,36
Дюралюминий	$0,70 \cdot 10^5$	$3,7 \cdot 10^4$	0,31
Дерево (сосна, ель): вдоль волокон	$(0,1 \dots 0,12)10^5$	$0,055 \cdot 10^4$	-
Поперек волокон	$0,005 \dots 0,01)10^5$	-	-

Приложение 6

Коэффициенты φ уменьшения основного допускаемого напряжения

Гибкость	Материал		Гибкость	Материал	
	Сталь Ст.3	Сталь Ст.5		Сталь Ст.3	Сталь Ст.5
0	1,00	1,00	110	0,52	0,43
10	0,99	0,98	120	0,45	0,37
20	0,96	0,95	130	0,40	0,36
30	0,94	0,92	140	0,36	0,29
40	0,92	0,89	150	0,32	0,26
50	0,89	0,86	160	0,29	0,24
60	0,86	0,82	170	0,26	0,21
70	0,81	0,76	180	0,23	0,19
80	0,75	0,70	190	0,21	0,17
90	0,69	0,62	200	0,19	0,16
100	0,60	0,51	-	-	-

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ.....	4
Статические моменты площади сечения.....	4
Моменты инерции площади сечения.....	5
Зависимости между моментами инерции в случае преобразования координат.....	6
Главные оси и главные моменты инерции.....	7
Моменты инерции сечений простой формы.....	8
Понятие о радиусе и эллипсе инерции.....	9
Пример.....	11
Вопросы для самопроверки.....	17
ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ.....	18
Построение эпюр внутренних сил.....	18
Особенности построения эпюр внутренних сил в рамах.....	20
Контроль правильности построения эпюр Q и M.....	21
Порядок построения эпюр Q и M.....	22
Напряжения при изгибе. Проверка прочности.....	23
Определение перемещений при изгибе.....	24
Решение задач на поперечный изгиб.....	29
Вопросы для самопроверки.....	42
СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ.....	43
Основные этапы расчета статически неопределимой системы.....	43
Метод сил.....	43
Прямая и обратная симметрия рам.....	50
Многопролетные неразрезные балки. Уравнение трех моментов.....	54
Порядок расчета неразрезной балки.....	57
Пример.....	59
Вопросы для самопроверки.....	61
Литература.....	62
Приложения.....	63

