

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Казанский государственный аграрный университет»

Институт механизации и технического сервиса

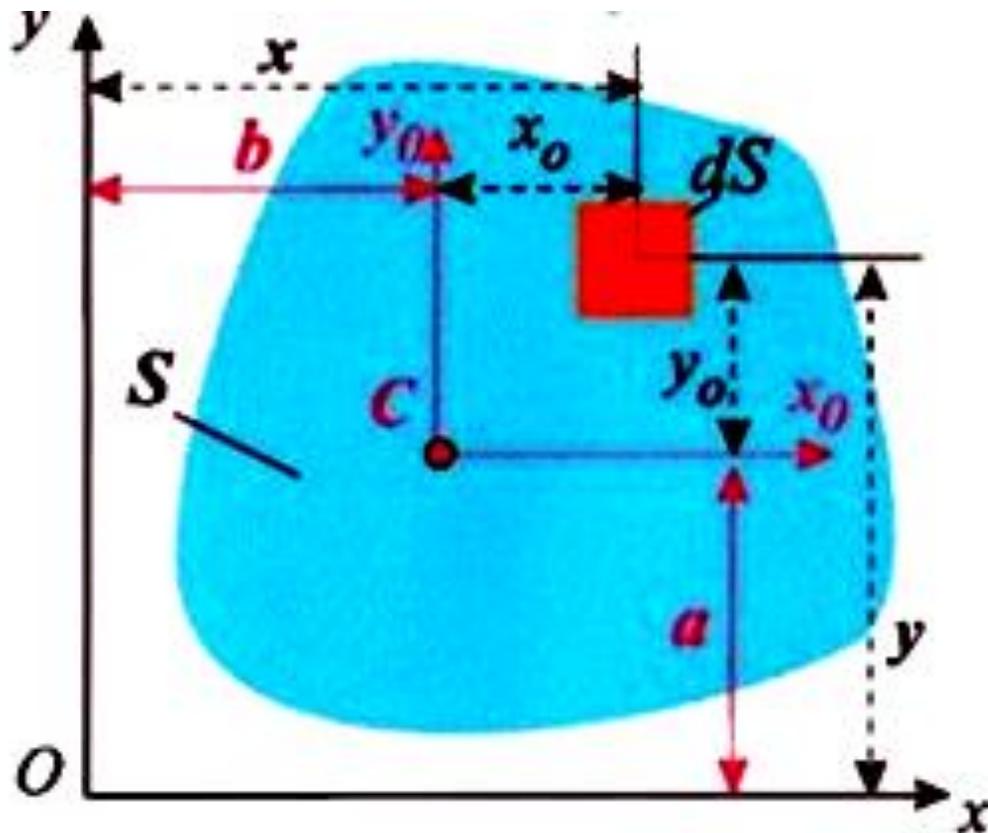
Кафедра общинженерных дисциплин

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Практикум

по сопротивлению материалов
для студентов очной и
заочной формы обучения

Института механизации и технического сервиса



Казань, 2021

УДК 620.1
ББК 30.121я7

Составители: Пикмуллин Г.В., Мустафин А.А., Марданов Р.Х.

Рецензенты:

Кандидат технических наук, доцент кафедры «Эксплуатация и ремонт машин» ФГБОУ ВО Казанский ГАУ Шайхутдинов Р.Р.

Доктор технических наук, профессор кафедры «Оборудование пищевых производств» ФГБОУ ВО КНИТУ Николаев А.Н.

Практикум по сопротивлению материалов обсуждены и рекомендованы к печати на заседании кафедры общепрофессиональных дисциплин Казанского ГАУ (протокол №2 от 20.09.2021г.) и заседании методической комиссии Института механизации и технического сервиса Казанского государственного аграрного университета (протокол №2 от 23.09.2021г.).

Пикмуллин, Г.В. Геометрические характеристики плоских сечений: практикум /Г.В. Пикмуллин, А.А.Мустафин, Р.Х. Марданов - Казань: Изд-во Казанского ГАУ, 2021.- 28 с.

Практикум предназначен для выполнения практических и самостоятельных работ по дисциплине «Сопротивление материалов», способствуют формированию общепрофессиональных и профессиональных компетенций для направлений подготовки: 35.03.06 «Агроинженерия», 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», 20.03.01 «Техносферная безопасность», 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства» и 44.03.04 «Профессиональное обучение».

УДК 620.1
ББК 30.121я7

©Казанский государственный аграрный университет, 2021г.

ВВЕДЕНИЕ

Современная действительность требует ускорения научно-технического прогресса, повышения конкурентоспособности выпускаемой продукции, снижения материалоемкости конструкции, повышения производительности, долговечности, надежности машин. Исключительная роль в обеспечении этого процесса принадлежит инженерам, конструкторам. Значительная роль в формировании облика инженеров отводится дисциплинам общеинженерного цикла и, в частности, дисциплине «Сопротивление материалов». Создавая новую конструкцию, инженер назначает первоначальные размеры ее элементов, проводя прочностные расчеты методами сопротивления материалов.

Задачами дисциплины «Сопротивление материалов» являются овладение теоретическими основами и практическими методами расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций и машин, необходимыми как при изучении дальнейших дисциплин, так и в практической деятельности бакалавров и дипломированных специалистов, ознакомление с современными подходами к расчету сложных систем, элементами рационального проектирования конструкций.

Настоящая работа содержит задания с примерами их выполнения. В приложениях приведены таблицы сортамента прокатной стали.

Номер схемы в заданиях должен совпадать с порядковым номером студента в списке группы. Все исходные данные для выполнения задания нужно выбирать из таблиц в соответствии с шифром, полученным студентом от преподавателя, ведущего занятия по данной дисциплине. Для этого под каждой цифрой шифра разместить по порядку русские буквы «а», «б», «в», «г». И из каждого столбца любой таблицы, обозначенного сверху определенной буквой, надо взять число из той строки, номер которой совпадает с номером этой буквы в шифре.

шифр -	М	3	1	7	5	0	4
буквы -				а	б	в	г

Например, при шифре 2479 в любой таблице из столбца «а» взять число из 2-й строки, из столбца «б» - из 4-й строки, из столбца «в» - из 7-й строки, из столбца «г» - из 9-й строки.

Самостоятельная работа по дисциплине «Сопротивление материалов» заключается в изучении теоретического материала.

Принятые обозначения основных величин и их единицы измерения

A	– площадь поперечного сечения	м^2
$P; F$	– сила (сосредоточенная)	кН
q	– интенсивность распределенной нагрузки	кН/м; кН/м ²
m	– сосредоточенный момент, пара сил	кНм
E	– модуль продольной упругости	МПа
G	– модуль сдвига	МПа
M_u	– момент изгибающий	кНм
M_k	– момент крутящий	кНм
N	– нормальная сила	кН
Q	– поперечная сила	кН
S	– статический момент площади	м^3
I_p	– полярный момент инерции	м^4
I	– осевой момент инерции	м^4
W_p	– полярный момент сопротивления	м^3
W	– осевой момент сопротивления	м^3
l	– длина бруса, балки	м
a	– единичный отрезок длины участка бруса	м
σ	– нормальное напряжение	МПа
τ	– касательное напряжение	МПа
ν	– коэффициент Пуассона	–
λ	– гибкость стержня	–
μ	– коэффициент приведения длины стержня	–
φ	– угол закручивания бруса	рад
α	– угол поворота сечения при изгибе	рад
γ	– угол сдвига	рад
ε	– относительная продольная деформация	–
ε'	– относительная поперечная деформация	–
Δ, δ	– линейное перемещение	мм
T	– температура	град.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СОСТАВНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

В теории изгиба важную роль играют моменты инерции сечения. Следует напомнить и повторить из теоретической механики правила нахождения центров тяжести сечения и статические моменты плоских фигур.

Изучить методику вычисления моментов инерции для простейших плоских фигур (прямоугольника, треугольника, круга).

Координаты центра тяжести любой сложной фигуры определяются по формуле:

$$X_c = \frac{X_1 A_1 + X_2 A_2 + X_3 A_3 + \dots + X_n A_n}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n};$$

$$Y_c = \frac{Y_1 A_1 + Y_2 A_2 + Y_3 A_3 + \dots + Y_n A_n}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n}; \quad (1)$$

где $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ – площади отдельных частей сечения;

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$ – координаты центров тяжести этих площадей относительно произвольно выбранных осей.

При определении координат центра тяжести площади сложной фигуры необходимо соблюдать следующую последовательность (рисунок 1):

1. Вычертить площадь сечения в масштабе.
2. Разбить ее на отдельные площадки, положения центров тяжести которых легко определить.

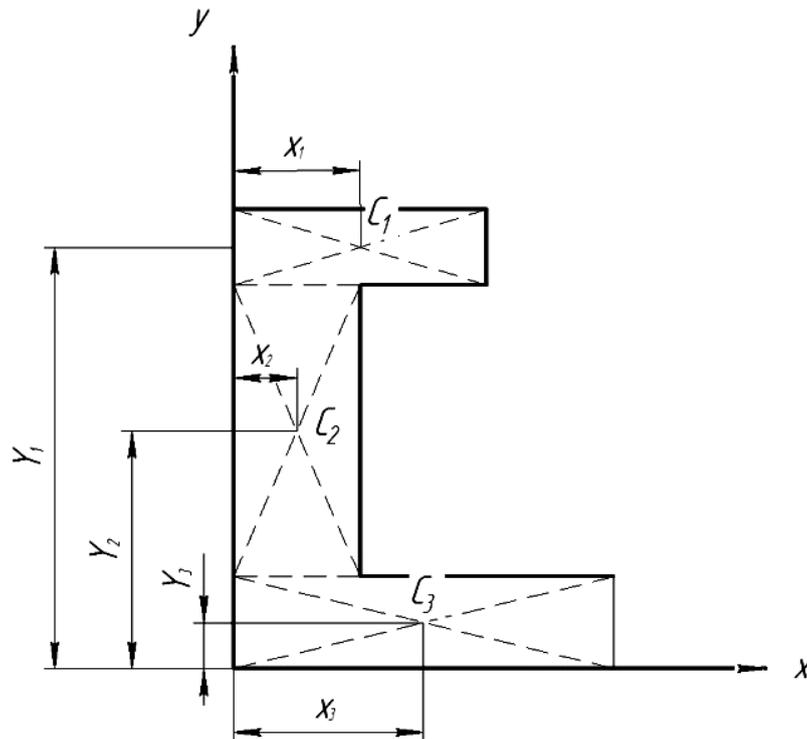


Рисунок 1- Схема для определения положения центра тяжести сечения

3. Обозначить на чертеже положения центров тяжести отдельных площадок ($C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$).

4. Провести вспомогательные оси координат и принять их как начало отсчета.

5. Нанести на чертеже координаты центров тяжести отдельных площадок: $C_1, (X_1, Y_1), C_2, (X_2, Y_2)$... и т. д.

6. Определить численно величины площадей и координаты центров тяжести.

7. Определить по формулам X_c и Y_c всей площади и нанести их на чертеж.

Определение осевого момента инерции сечения сложной фигуры относительно оси, проходящей через ее центр тяжести

Для определения осевого момента инерции площади сложной фигуры ее надо разбить на такие отдельные площадки моменты инерции, которых можно определить по формуле, или при помощи таблиц прокатных профилей. Общий момент инерции будет равен сумме моментов инерции отдельных площадок. Момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями (рисунок 2):

$$I_y = I_{y_c} + b^2 A; \quad I_x = I_{x_c} + a^2 A, \quad (2)$$

где I_{x_c}, I_{y_c} - моменты инерции площадки относительно осей, проходящих через ее центр тяжести, м^4 ;

a и b - расстояние между осями, м.

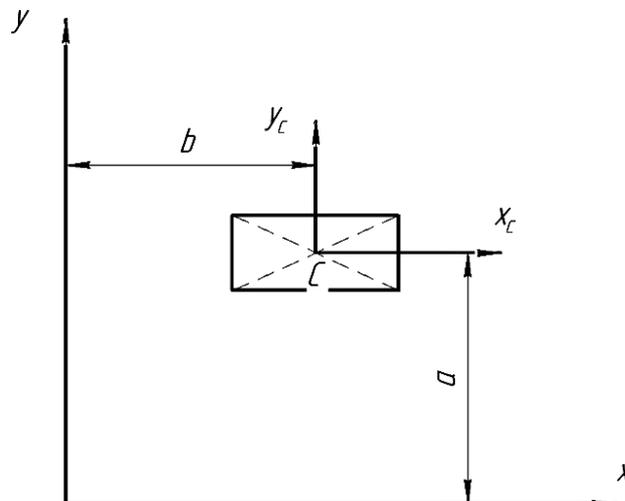


Рисунок 2 - Схема для определения положения центра тяжести сечения прямоугольника

Определение центробежного момента инерции площади сложной фигуры относительно осей, проходящих через центр тяжести

Площадь сложной фигуры надо разбить на отдельные площадки и вычислить центробежные моменты инерции каждой из них. Общий центробежный момент инерции будет равен алгебраической сумме центробежных моментов инерции отдельных площадок. Центробежный момент инерции отдельной площадки относительно осей, параллельных центральным равен центробежному моменту инерции относительно этих центральных осей плюс произведение площади фигуры на координаты ее центра тяжести относительно новых осей:

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + (\pm a) \square (\pm b) A, \quad (3)$$

где $I_{x_c y_c}$ - центробежный момент инерции площади относительно оси, проходящей через ее центр тяжести;

a и b - расстояние между осями, м (рисунок 2);

A - площадь, м².

У симметричных площадок оси симметрии являются главными осями инерции. Центробежный момент относительно их равен нулю. У уголка (рисунок 3) главными осями являются оси X_0, Y_0 , повернутые на угол α относительно центральных осей X_c и Y_c параллельных полкам уголка.

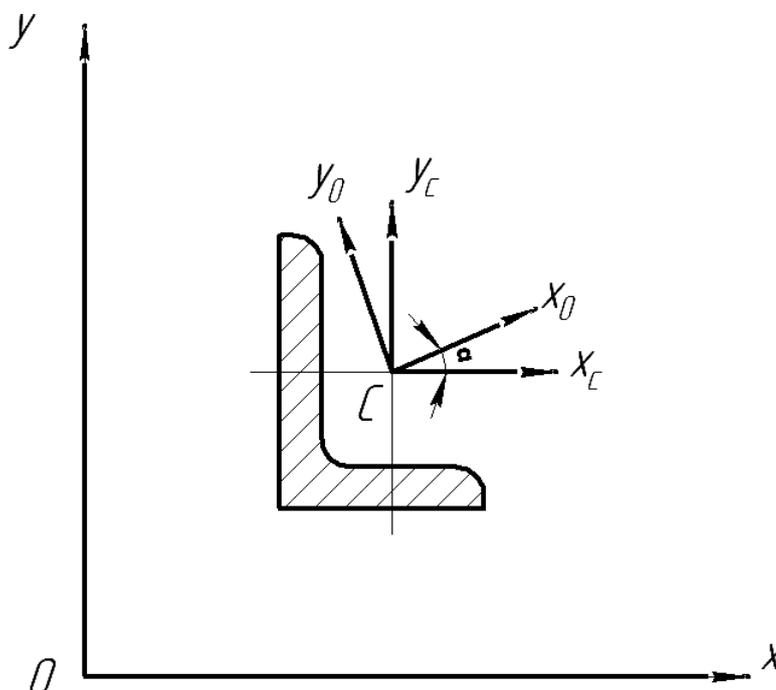


Рисунок 3 - Схема для определения главных осей у уголка

Для определения центробежного момента инерции уголка относительно других центральных осей надо воспользоваться формулой перехода к повернутым осям координат:

$$I_{x_c y_c} = \frac{I_{x_0} - I_{y_0}}{2} \sin 2a + I_{x_0 y_0} \cdot \cos 2a, \quad (4)$$

где I_{x_0}, I_{y_0} — осевые моменты инерции относительно главных центральных осей инерции, м^4 ;

$I_{x_0 y_0}$ — центробежный момент инерции относительно главных центральных осей инерции, м^4 .

Так как для уголка оси X_0 и Y_0 — главное, то $I_{x_0 y_0}$ для него равен нулю.

Определение положения главных центральных осей инерции

Положение главных центральных осей инерции сечения определяется углом наклона их относительно других осей (рисунок 4), проходящих через центр тяжести сечения (моменты инерции относительно которых, известны), по формуле:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}} \quad (5)$$

где $I_{x_c y_c}$ — центробежный момент инерции;

$I_{x_c y_c}$ — осевые моменты инерции относительно осей X_c и Y_c .

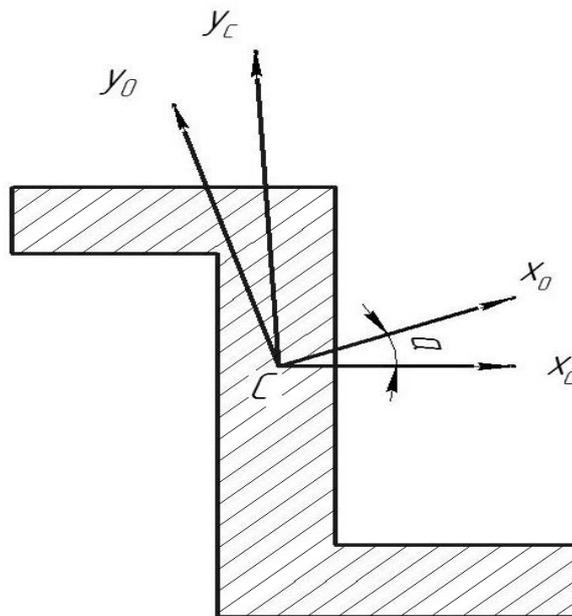


Рисунок 4 - Положение главных центральных осей инерции сечения

Определение главных моментов инерции

Главные моменты инерции, т. е. осевые моменты инерции, вычисленные относительно главных осей инерции, имеют следующие экстремальные значения:

$$I_{\max} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + I_{x_c y_c}^2} \quad (6)$$

$$I_{max} + I_{min} = I_{x_c} + I_{y_c}; \quad I_{x_0 y_0} = \frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2} \sin 2a_0 + I_{x_c y_c} \cos 2a_0 = 0. \quad (7)$$

Чтобы убедиться в правильности определения главных моментов инерции, нужно произвести проверки. Ошибки не должны превышать 5%.

Пример 1

Определить положение главных центральных осей и вычислить главные центральные моменты инерции составного сечения, состоящего из швеллера и уголка (рисунок 5а).

Задача 1. Заданное сечение состоит из двух прокатных профилей: неравнобокого уголка I и швеллера II. Геометрические характеристики уголка и швеллера берем по ГОСТ 8510-72 и 8240-72. Для уголка 110x70x6,5 - $I_{X1}^I = 142 \text{ см}^4$; $I_{Y1}^I = 45,6 \text{ см}^4$; $I_z^I = 26,9 \text{ см}^4$; $A_1 = 11,40 \text{ см}^2$; $\text{tg} \alpha_0 = 0,402$; координаты центра тяжести $V_1 = 3,55 \text{ см}$; $X_1 = 1,58 \text{ см}$. Для швеллера № 24: $I_{X2}^{II} = 2900 \text{ см}^4$; $I_{Y2}^{II} = 208 \text{ см}^4$; $A_2 = 30,6 \text{ см}^2$; $Z_0 = 2,42 \text{ см}$.

Решение:

1. Выбираем вспомогательные оси V, Z и определяем относительно их координаты центра тяжести составного сечения:

$$V_C = \frac{V_1 A_1 + V_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{11,4 \cdot 20,45 + 30,6 \cdot 12}{11,4 + 30,6} = 14,3 \text{ см};$$

$$Z_C = \frac{Z_1 A_1 + Z_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{10,6 \cdot 11,4 + 6,58 \cdot 30,6}{11,4 + 30,6} = 7,7 \text{ см};$$

2. Вспомогательные центральные оси x_c и y_c , параллельные $V-Z$. Вычисляем осевые и центробежные моменты инерции относительно этих осей.

Центральные вспомогательные оси параллельны центральным осям уголка и швеллера, относительно которых моменты инерции известны:

$$I_{X_C} = I_{X_1}^I + a_1^2 A_1 + I_{X_2}^{II} + a_2^2 A_2 = 142 + 6,15^2 \cdot 11,4 + 2900 + 2,3^2 \cdot 30,6$$

$$= 36,35 \cdot 10^2 \text{ см}^4 = 36,35 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

$$I_{Y_C} = I_{Y_1}^I + a_1^2 A_1 + I_{Y_2}^{II} + a_2^2 A_2 = 142 + 6,15^2 \cdot 11,4 + 2900 + 2,3^2 \cdot 30,6$$

$$= 36,35 \cdot 10^2 \text{ см}^4 = 36,35 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

$$I_{X_C Y_C} = I_{X_1 Y_1} + (\pm a_1) (\pm b_1) A_1 + I_{X_2 Y_2} + (\pm a_2) (\pm b_2) A_2.$$

Для швеллера оси x_2, y_2 являются главными, поэтому $I_{x_2 y_2} = 0$.

Вычисляем центробежный момент инерции уголка относительно осей x_1, y_1 (рисунок 5б).

Связь между моментами инерции относительно исходных осей x_1, y_1 и осей повернутых на произвольный угол α имеет вид:

$$I_{y_3}^I = \frac{I_{x_1}^I + I_{y_1}^I}{2} + \frac{I_{x_1}^I - I_{y_1}^I}{2} \cos 2(90^\circ - \alpha) - J_{x_1 y_1}^I \sin(90^\circ - \alpha).$$

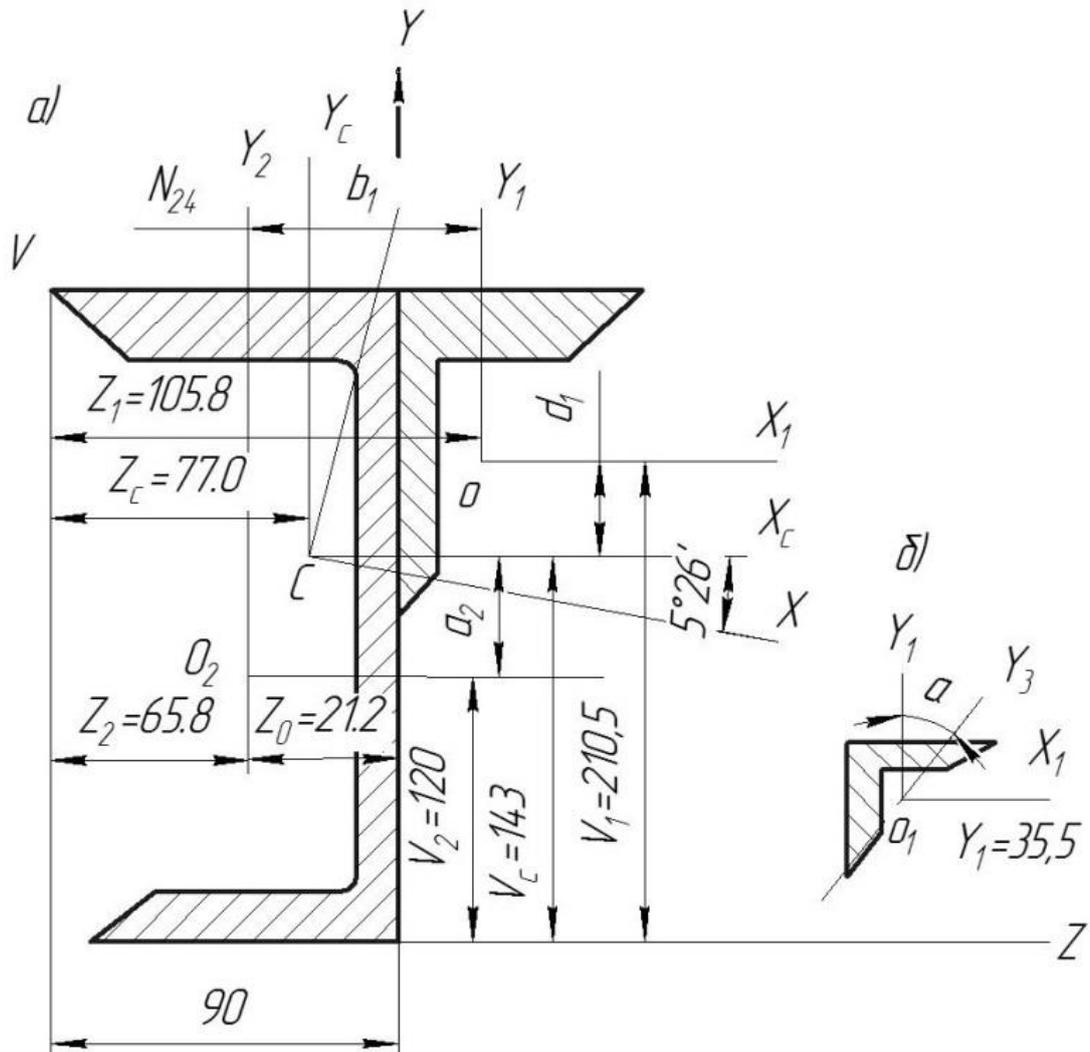


Рисунок 5 – Схема для определения положения главных центральных осей

Связь между моментами инерции относительно исходных осей x_1, y_1 и осей повернутых на произвольный угол α имеет вид:

$$I_{y_3}^I = \frac{I_{x_1}^I + I_{y_1}^I}{2} + \frac{I_{x_1}^I - I_{y_1}^I}{2} \cos 2(90^\circ - \alpha) - J_{x_1 y_1}^I \sin(90^\circ - \alpha).$$

Учитывая, что $\alpha = \arctg 0,402 = 21^\circ 54'$, подставим числовые значения

$$I_{x_1 y_1}^I \sin 136^\circ 12' = \frac{142 + 45,6}{2} + \frac{142 - 45,6}{2} \cos 136^\circ 12' - 26,9.$$

Центробежный момент инерции:

$$\begin{aligned} I_{x_c y_c} &= 50 + (6,15)(2,9)11,4 + 0 + (2,3)(-1,12)30,6 = \\ &= 332,3 \text{ см}^4 = 3,32 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4. \end{aligned}$$

Определяем положение главных осей инерции сечения (угол их наклона) к исходной оси x_c :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}} = \frac{2 \cdot 3,32 \cdot 10^{-6}}{3,88 \cdot 10^{-6} - 36,35 \cdot 10^{-6}} = -0,204;$$

$$\alpha_0 \cong 5^\circ 16'.$$

Определяем главные моменты инерции по формулам:

$$I_{\max} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} + I_{y_c})^2 - 4I_{x_c y_c}^2} =$$

$$= \frac{36,35 \cdot 10^{-6} + 3,88 \cdot 10^{-6}}{2} \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{(36,35 \cdot 10^{-6} - 3,88 \cdot 10^{-6})^2 + 4(3,32 \cdot 10^{-6})^2};$$

$$I_{\max} = 36,67 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

$$I_{\min} = 3,56 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

Правильность расчетов можно проверить по выполнению соотношения

$$I_{\max} + I_{\min} = I_{x_c} + I_{y_c};$$

$$I_{\max} + I_{\min} = 36,67 \cdot 10^{-6} + 3,56 \cdot 10^{-6} = 40,23 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

$$I_{x_c} + I_{y_c} = 36,35 \cdot 10^{-6} + 3,88 \cdot 10^{-6} = 40,23 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

$$I_{x_0 y_0} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{x_c y_c} \cos 2\alpha_0 = 0;$$

$$I_{x_0 y_0} = \frac{36,35 \cdot 10^{-6} - 3,88 \cdot 10^{-6}}{2} \sin 10^\circ 32' + 3,32 \cdot 10^{-6} \cos 10^\circ 32' = 0,$$

то есть расчет произведен точно.

Задание 1

Для поперечного сечения, составленного из стандартных прокатных профилей, требуется:

- 1) определить положение центра тяжести;
- 2) найти значения осевых и центробежных моментов инерции относительно горизонтальной и вертикальной осей, проходящих через центр тяжести сечения;
- 3) определить направление главных центральных осей инерции;
- 4) найти значения моментов инерции относительно главных центральных осей;
- 5) вычертить сечение в масштабе 1:2 и указать на нем все оси и размеры;
- 6) при расчете все необходимые данные следует брать из таблиц сортамента и не заменять части профилей прямоугольниками (Приложение 1).

Данные для расчета приведены в таблице 1 и рисунка 6.

Таблица 1 - Исходные данные

№ строки	Схема по рисунку 6	Швеллер	Равнобокий уголок	Двутавр									
1	I	12	40x40x5	16									
2	II	14	50x50x5	18									
3	III	16	70x70x6	18a									
4	IV	18	80x80x7	20									
5	V	20	90x90x8	22									
6	VI	22	100x100x7	24a									
7	VII	24	110x110x8	27									
8	VIII	27	140x140x9	30									
9	IX	30	33	0	X	36	180x180x11	40		<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>
0	X	36	180x180x11	40									
	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>									

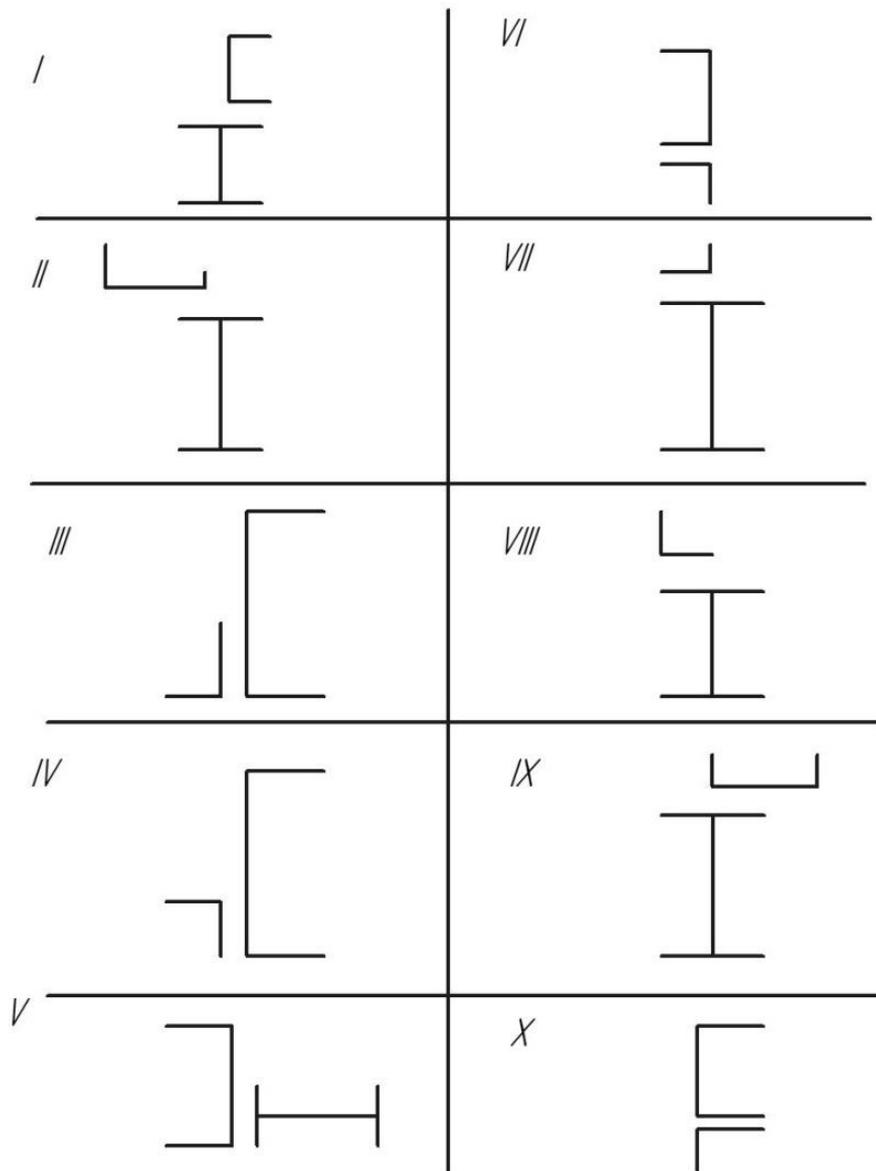


Рисунок 6 – Схемы к заданию 1

Вопросы для самопроверки:

1. Что такое статический момент сечения? Как он определяется относительно произвольной оси? Чему равен статический момент сечения относительно центральной оси?
2. По каким формулам находят координаты центра тяжести плоской фигуры?
3. Что такое осевой момент инерции сечения и в каких единицах измеряется его величина?
4. Чему равна сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей?
5. Что такое центробежный момент инерции?
6. Какова зависимость между осевыми и полярными моментами инерции данного сечения?
7. Какова зависимость между осевыми моментами инерции относительно центральных и им параллельных осей?
8. Относительно каких центральных осей осевые моменты инерции имеют наибольшее и наименьшее значения?
9. Какие оси, проведенные в плоскости сечения называются главными и какие главными центральными осями?
10. Напишите формулы главных центральных осевых моментов инерции для прямоугольника, круга, кольца.
11. Как определить положение главных центральных осей составного сечения, имеющего ось симметрии?
12. Какой из двух моментов инерции треугольника больше: относительно оси, совпадающей с основанием, или относительно оси, проходящей через вершину параллельно основанию?
13. В каком соотношении находятся моменты инерции квадратного сечения относительно центральной оси, проходящей параллельно сторонам, и относительно оси, проходящей через диагональ?

После изучения этой темы решить задачу № 1 и 2.

Должен знать: основные геометрические характеристики плоских однородных сечений; зависимости, существующие между статическими, осевыми, центробежными моментами относительно двух параллельных осей; формулы, выражающие изменение осевых и центробежного моментов инерции сечения при повороте осей; формулы для определения положения главных осей инерции и величин главных моментов инерции; формулы моментов инерции сечений простой формы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СОСТАВНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Целью задания 2 является определение центра тяжести и вычисление главных центральных моментов инерции составного сечения.

Для заданного составного поперечного сечения стержня, состоящего из равнополочного уголка, прямоугольника и двутавра или швеллера (рисунок 7):

- 1) определить положение центра тяжести относительно первоначально принятых осей;
- 2) вычислить осевые и центробежный моменты инерции сечения относительно центральных осей, параллельных первоначально принятым осям;
- 3) определить положение главных центральных осей инерции сечения;
- 4) вычислить величины главных моментов инерции сечения.
- 5) сделать чертеж заданного сечения в масштабе и указать на нем основные размеры и оси.

Исходные данные взять из таблицы 2 Данные о прокатных профилях принимаются из таблиц сортамента (ГОСТ 8239-72, ГОСТ 8240-72, ГОСТ 8509-86), приведенных в приложении 1.

Таблица 2 Исходные данные

№ п/п	Номер двутавра или швеллера	Прямоугольник	Равнополочный уголок
	б	в	г
1	10	200×10	80×80×6
2	12	220×12	80×80×8
3	14	240×10	80×80×10
4	16	240×14	75×75×6
5	18	250×14	75×75×8
6	20	240×12	63×63×4
7	22	220×10	63×63×6
8	24	230×12	50×50×4
9	27	300×14	50×50×5
0	30	250×12	45×45×5

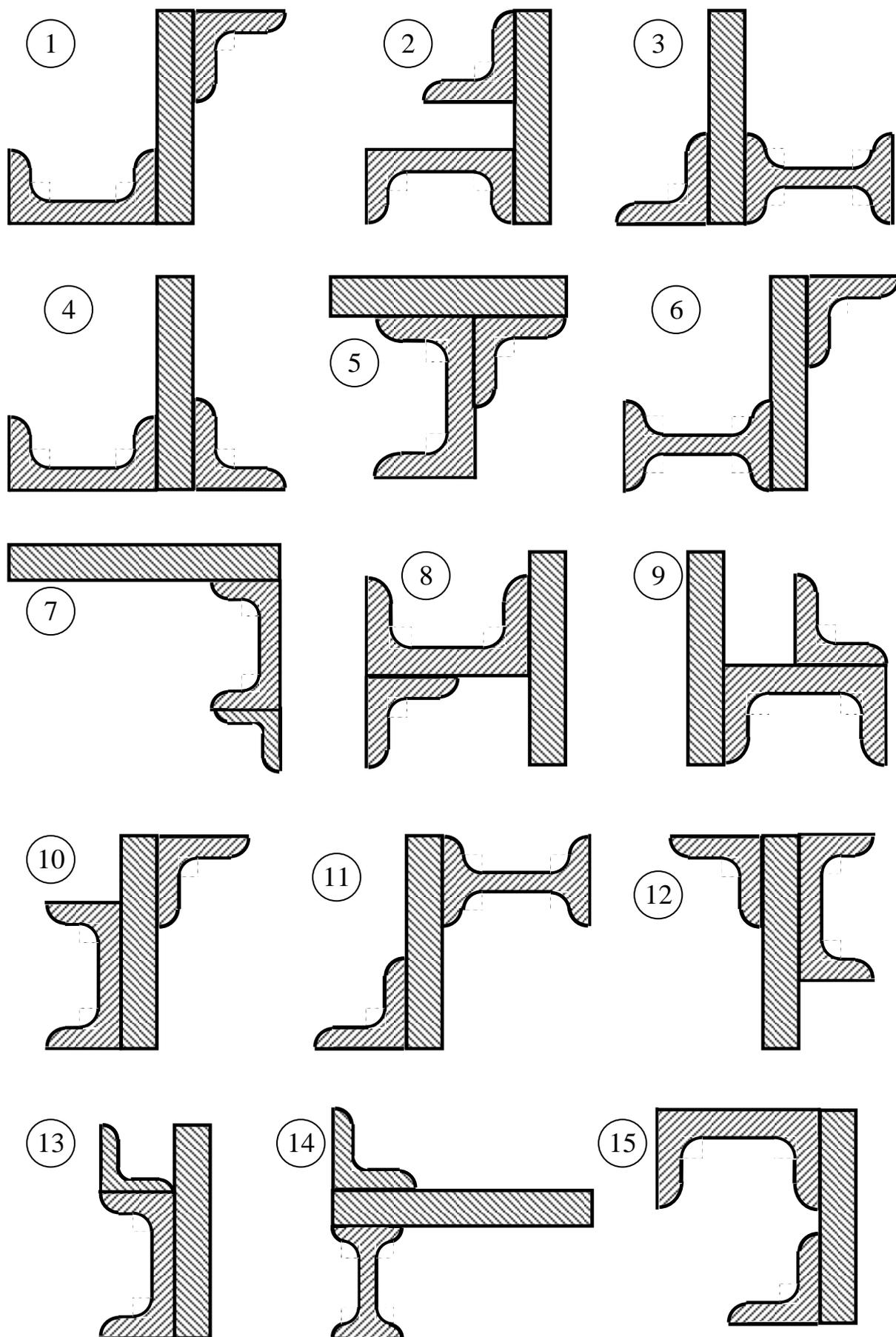


Рисунок 7 (начало)

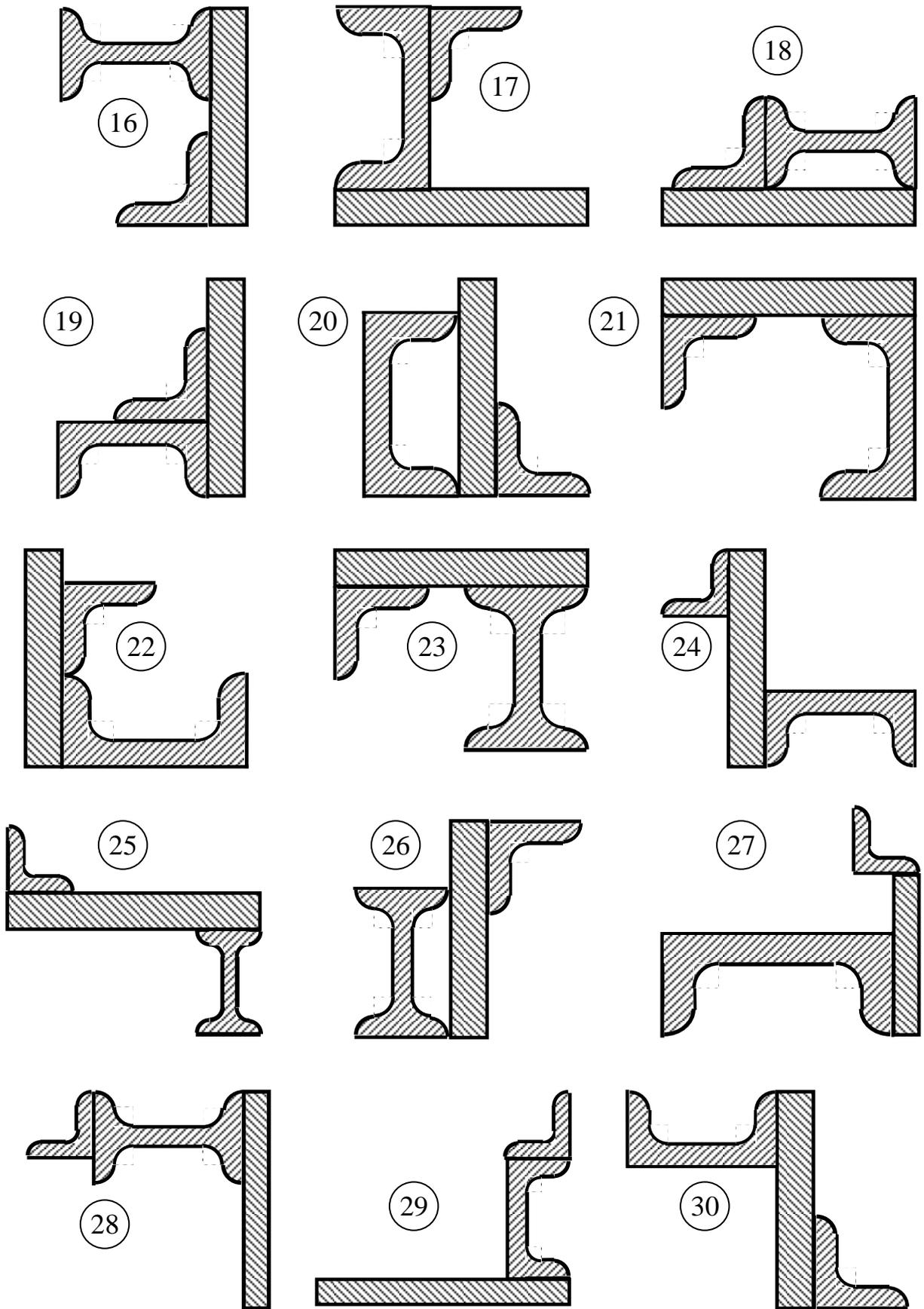


Рисунок 7 (окончание)

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ 2

Вычислить главные моменты инерции составного сечения (рисунке 8).

Исходные данные: Составное сечение представляет собой набор из трех элементов: равнополочного уголка 63×63×6 мм, швеллера № 16 и прямоугольника 240×12 мм.

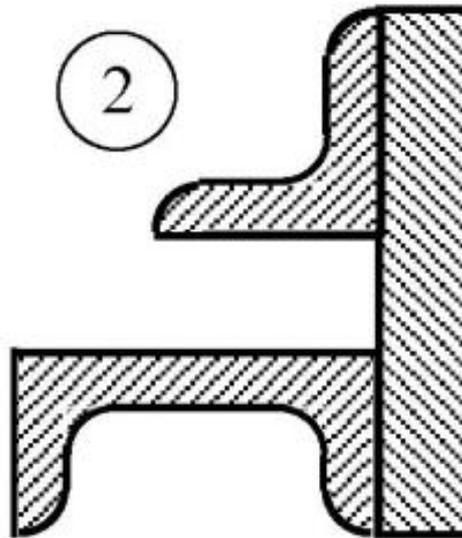


Рисунок 8 - Составное сечение

Решение:

1. Выпишем из таблиц сортамента и подсчитаем геометрические характеристики отдельных частей поперечного сечения:

а) равнополочный уголок 63×63×6 мм (рисунок 9): $b_1 = 6,3$ см, $A_1 = 7,28$ см², $I_{y_1} = I_{z_1} = 27,1$ см⁴, $I_{z_0} = 42,9$ см⁴, $I_{y_0} = 11,2$ см⁴, $z_{01} = 1,78$ см, $\alpha = 45^\circ$ (поворот главных осей z_0 и y_0 против часовой стрелки),

$$I_{z_1 y_1} = \frac{I_{z_0} - I_{y_0}}{2} \sin 2\alpha = \frac{42,9 - 11,2}{2} \sin 2 \cdot 45^\circ = 15,85 \text{ см}^4;$$

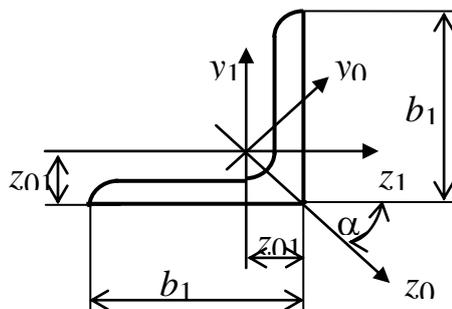


Рисунок 9

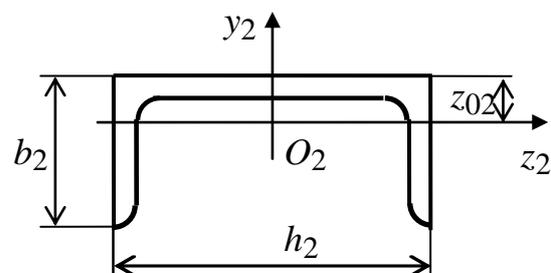
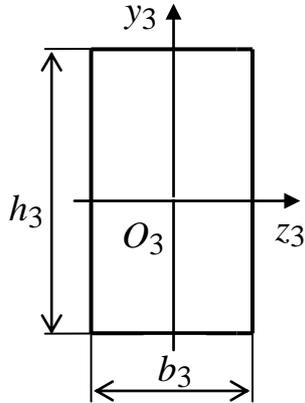


Рисунок 10

б) швеллер № 16 (рисунок 10): $h_2 = 16$ см; $b_2 = 6,4$ см, $A_2 = 18,1$ см², $z_{O2} = 1,8$ см, $I_{y_2} = 747$ см⁴, $I_{z_2} = 63,3$ см⁴, $I_{z_2 y_2} = 0$ (оси z_2 и y_2 являются главными центральными осями);



в) прямоугольник 240×12 мм (рисунок 11):

$$b_3 = 1,2 \text{ см}, h_3 = 24 \text{ см}, A_3 = b_3 h_3 = 1,2 \cdot 24 = 28,8 \text{ см}^2,$$

$$I_{z_3} = \frac{b_3 h_3^3}{12} = \frac{1,2 \cdot 24^3}{12} = 1382,4 \text{ см}^4, \quad I_{y_3} = \frac{h_3 b_3^3}{12} =$$

$$= \frac{24 \cdot 1,2^3}{12} = 3,456 \text{ см}^4, \quad I_{z_3 y_3} = 0 \text{ (оси } z_3 \text{ и } y_3 \text{ - главные центральные оси)}.$$

Рисунок 11

2. Проводим вспомогательные оси z и y , заключив все сечение в положительной четверти (рисунок 12). Определим координаты центров тяжести O_1 , O_2 и O_3 отдельных частей сечения в системе координат zOy :

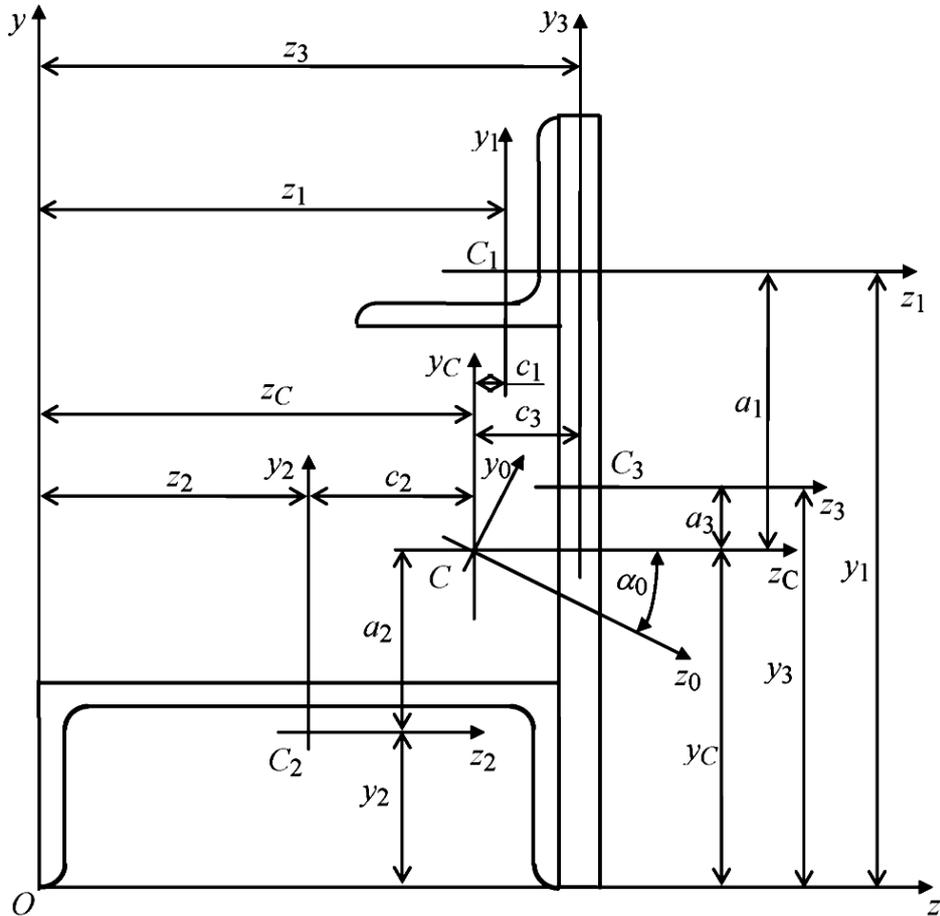


Рисунок 12 - Составное сечение

$$z_1 = h_2 - z_{01} = 16 - 1,78 = 14,22 \text{ см};$$

$$z_2 = h_2 / 2 = 16 / 2 = 8 \text{ см};$$

$$z_3 = h_2 + b_3 / 2 = 16 + 1,2 / 2 = 16,6 \text{ см};$$

$$y_1 = h_3 - b_1 + z_{01} = 24 - 6,3 + 1,78 = 19,48 \text{ см};$$

$$y_2 = b_2 - z_{02} = 6,4 - 1,8 = 4,6 \text{ см};$$

$$y_3 = h_3 / 2 = 24 / 2 = 12 \text{ см}.$$

3. Определим координаты центра тяжести заданного сечения в системе координат zOy :

$$\begin{aligned} z_C &= \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \\ &= \frac{7,28 \cdot 14,22 + 18,1 \cdot 8 + 28,8 \cdot 16,6}{7,28 + 18,1 + 28,8} = 13,41 \text{ см}; \\ y_C &= \frac{S_z}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \\ &= \frac{7,28 \cdot 19,48 + 18,1 \cdot 4,6 + 28,8 \cdot 12}{7,28 + 18,1 + 28,8} = 10,53 \text{ см}. \end{aligned}$$

Центр тяжести C заданного сечения должен находиться внутри многоугольника, вершинами которого являются центры тяжести отдельных частей сечения, в нашем примере - внутри треугольника $O_1 O_2 O_3$.

4. Проводим центральные оси z_C и y_C параллельно осям z и y . Вычисляем расстояния между осями z_C и z_1, z_2, z_3 , осями y_C и y_1, y_2, y_3 :

$$a_1 = y_1 - y_C = 19,48 - 10,53 = 8,95 \text{ см};$$

$$a_2 = y_2 - y_C = 4,6 - 10,53 = -6,23 \text{ см};$$

$$a_3 = y_3 - y_C = 12 - 10,53 = 1,47 \text{ см};$$

$$c_1 = z_1 - z_C = 14,22 - 13,41 = 0,81 \text{ см};$$

$$c_2 = z_2 - z_C = 8 - 13,41 = -5,41 \text{ см};$$

$$c_3 = z_3 - z_C = 16,6 - 13,41 = 3,19 \text{ см}.$$

5. Вычисляем значения осевых и центробежного моментов инерции заданного сечения относительно центральных осей z_C и y_C по формулам параллельного преобразования осей:

$$\begin{aligned} I_{z_C} &= I_{z_1} + a_1^2 A_1 + I_{z_2} + a_2^2 A_2 + I_{z_3} + a_3^2 A_3 = 27,1 + 8,95^2 \cdot 7,28 + 63,3 + \\ &+ (-6,23)^2 \cdot 18,1 + 1382,4 + 1,47^2 \cdot 28,8 = 2820,7 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$I_{y_C} = I_{y_1} + c_1^2 A_1 + I_{y_2} + c_2^2 A_2 + I_{y_3} + c_3^2 A_3 = 27,1 + 0,81^2 \cdot 7,28 + 747 + \\ + (-5,41)^2 \cdot 18,1 + 3,456 + 3,19^2 \cdot 28,8 = 1605,2 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_C y_C} = I_{z_1 y_1} + a_1 c_1 A_1 + I_{z_2 y_2} + a_2 c_2 A_2 + I_{z_3 y_3} + a_3 c_3 A_3 = 15,85 + 8,95 \cdot 0,81 \cdot 7,28 + \\ + 0 + (-6,23)(-5,41)18,1 + 0 + 1,47 \cdot 3,19 \cdot 28,8 = 813,7 \text{ см}^4.$$

6. Определим положение главных центральных осей инерции сечения:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{z_C y_C}}{I_{z_C} - I_{y_C}} = -\frac{2 \cdot 813,7}{2820,7 - 1605,2} = -1,339,$$

откуда $\alpha_0 = -26,62^\circ$.

Угол α_0 отрицательный, поэтому оси z_C и y_C поворачиваем по часовой стрелке на угол $26,62^\circ$ и проводим главные центральные оси сечения z_0 и y_0 (рис. 15).

7. Вычисляем значения главных центральных моментов инерции сечения по формулам углового преобразования осей:

$$I_{z_0} = I_{z_C} \cos^2 \alpha_0 + I_{y_C} \sin^2 \alpha_0 - I_{z_C y_C} \sin 2\alpha_0 = \\ = 2820,7 \cos^2(-26,62^\circ) + 1605,2 \sin^2(-26,62^\circ) - 813,7 \sin 2(-26,62^\circ) = 3228,56 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_0} = I_{y_C} \cos^2 \alpha_0 + I_{z_C} \sin^2 \alpha_0 + I_{z_C y_C} \sin 2\alpha_0 = \\ = 1605,2 \cos^2(-26,62^\circ) + 2820,7 \sin^2(-26,62^\circ) + 813,7 \sin 2(-26,62^\circ) = 1197,35 \text{ см}^4.$$

Значения главных моментов инерции сечения можно вычислять также и по формуле :

$$I_{\max} = \frac{I_{z_C} + I_{y_C}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{z_C} - I_{y_C})^2 + 4I_{z_C y_C}^2} = \frac{2820,7 + 1605,2}{2} \pm \\ \pm \frac{1}{2} \sqrt{(2820,7 - 1605,2)^2 + 4 \cdot 813,7^2} = 2212,95 \pm 1015,6;$$

$$I_{\max} = 3228,56 \text{ см}^4; \quad I_{\min} = 1197,35 \text{ см}^4.$$

Если центробежный момент инерции сечения $I_{z_C y_C} > 0$, то главная ось инерции, относительно которой главный момент инерции сечения принимает максимальное значение, проходит через четные четверти. Поэтому $I_{z_0} = I_{\max} = 3228,56 \text{ см}^4$; $I_{y_0} = I_{\min} = 1197,35 \text{ см}^4$.

Правильность вычислений значений главных моментов инерции сечения проверяем по выполнению условий:

а) сумма моментов инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей при повороте осей не меняется

$$I_{z_0} + I_{y_0} = I_{z_C} + I_{y_C},$$

$$3228,56 + 1197,35 = 2820,7 + 1605,2,$$

$$4425,91 \approx 4425,9;$$

б) центробежный момент инерции сечения относительно главных осей равен нулю

$$I_{z_0 y_0} = \frac{I_{z_C} - I_{y_C}}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{z_C y_C} \cos 2\alpha_0 =$$

$$= \frac{2820,7 - 1605,2}{2} \sin 2(-26,62)^\circ - 813,7 \cdot \cos 2(-26,62)^\circ = -486,90 - 486,97 = -973,87 \approx 0.$$

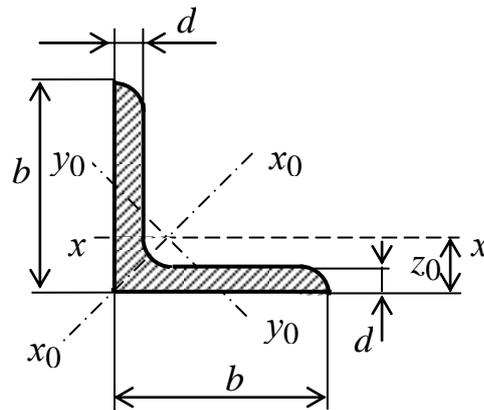
Значит, расчет выполнен точно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер, И.А. Сопротивление материалов: учеб. пособие для машиностроит. и авиац. вузов. / И.А. Биргер - 2-е изд. - М.: Ленанд, 2015. - 560 с. : ил.
2. Пикмуллин, Г.В. Учебное пособие «Сопротивление материалов» / Г.В. Пикмуллин, А.А. Мустафин, С.М. Яхин, Р.Х. Марданов. - Казань: Изд-во Казанского ГАУ, 2016. - 176 с. ISBN 978-5-905201-37-0.
3. Пикмуллин, Г.В. Методические указания и контрольные задания по сопротивлению материалов / Г.В. Пикмуллин, А.А. Мустафин, Марданов Р.Х. - Казань: Изд-во Казанского ГАУ, 2019. - 44 с.
4. Серазутдинов, М.И. Прикладная механика: учебник / М.И. Серазутдинов, Э.Н. Островская, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин: под ред. М.Н. Серазутдинова – Казань, ООО Веда, 2011. – 322 с.
5. Степин, П. А. Сопротивление материалов, 13-е изд., стер. / П. А. Степин - М., "Высшая школа", 2014. – 320 с.
6. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов. / В.И. Феодосьев - М.: изд. МГТУ, 2007. -592с.
7. Стородубцева, Т.Н. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: учеб. пособие - Электрон. дан. — Воронеж: ВГЛУ, 2015. — 196 с.
8. Сидорин С.Г. Сопротивление материалов: теория, тестовые задания, примеры решения: учеб. пособие / С.Г. Сидорин, Ф.С. Хайруллин. — М.: РИОР: ИНФРА - М, 2018. — 184 с.
9. Паршин, Л.К. Сборник задач по сопротивлению материалов. / Л.К. Паршин и др. - М.: Наука, 2011. –432 с.
10. Атаров, Н.М. Сопротивление материалов в примерах и задачах: Учебное пособие / Н.М. Атаров. - М.: ИНФРА-М, 2010. - 407 с.
11. Евтушенко, С.И. Сопротивление материалов: Сборник задач с решениями: Учебное пособие / С.И. Евтушенко, Т.А. Дукмасова, Н.А. Вильбицкая. - М.: ИЦРИОР: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 210 с.
12. Миролюбов, И.Н. Сопротивление материалов: пособие по решению задач / И.Н. Миролюбов [и др.]. - 9-е изд., испр. - СПб.: Лань, 2014. -512 с.

Сортамент прокатной стали

Таблица П1. Уголки равнополочные (ГОСТ 8509-86)



Но- мер про- фи- ля	b , мм	d , мм	Пло- щадь сече- ния A , см ²	I_x , см ⁴	i_x , см	I_{x_0} , см ⁴	i_{x_0} , макс, см	I_{y_0} , см ⁴	i_{y_0} , мин, см	z_0 , см
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	1,69
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	1,74
		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,20	1,24	1,78
7	70	5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	1,90
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	1,94
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	1,99
		8	10,70	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	2,02
		10	13,12	58,4	2,34	92,3	2,65	24,4	1,36	2,08
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	2,02
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	2,06
		7	10,10	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	2,10
		8	11,50	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	2,15
		9	12,80	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	2,18
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	2,17
		6	9,38	57,0	2,47	94,0	3,11	23,5	1,58	2,19
		7	10,80	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	2,23
		8	12,30	73,4	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	2,27

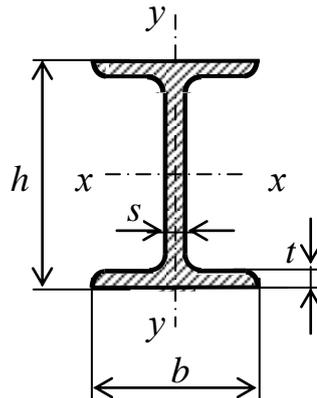
Продолжение таблицы П1

Но- мер про- фи- ля	b , см	d , см	Пло- щадь сече- ния A , см ²	I_x , см ⁴	i_x , см	I_{x_0} , см ⁴	i_{x_0} , max, см	I_{y_0} , см ⁴	i_{y_0} , min, см	z_0 , см
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130,0	3,50	34,0	1,79	2,43
		7	12,3	94,3	2,77	150,0	3,49	38,9	1,78	2,47
		8	13,9	106,0	2,76	168,0	3,48	8	1,77	2,51
		9	15,6	118,0	2,75	188,0	3,46	48,6	1,77	2,55
10	100	6,5	12,8	122,0	3,09	193,0	3,88	50,7	1,99	2,68
		7	13,8	131,0	3,08	207,0	3,88	54,2	1,98	2,71
		8	15,6	147,0	3,07	233,0	3,87	60,9	1,98	2,75
		10	19,2	179,0	3,05	284,0	3,84	74,1	1,96	2,83
		12	22,8	209,0	3,03	331,0	3,81	86,9	1,95	2,91
		14	26,3	237,0	3,00	375,0	3,78	99,3	1,94	2,99
		16	29,7	264,0	2,98	416,0	3,74	112,0	1,94	3,06
11	110	7	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	2,96
		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	3,00
12,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	3,36
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	3,40
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	3,45
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	3,53
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	3,61
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	3,68
14	140	9	24,7	465	4,34	739	5,47	192	2,79	3,78
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	3,82
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	3,90
16	160	10	31,4	744	4,96	1229	6,25	319	3,19	4,30
		11	34,4	884	4,95	1341	6,24	348	3,18	4,35
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	4,39
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	4,47
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	4,55
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	4,63
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	4,70
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	4,85
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	4,89

Продолжение таблицы П1

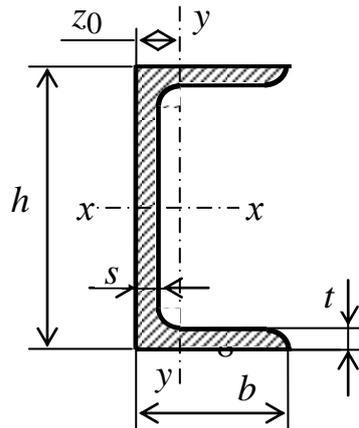
Но- мер про- фи- ля	b , мм	d , мм	Пло- щадь сече- ния A , см ²	I_x , см ⁴	i_x , см	I_{x_0} , см ⁴	i_{x_0} , max, см	I_{y_0} , см ⁴	i_{y_0} , min, см	z_0 , см
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	5,37
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	5,42
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	5,46
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	5,54
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5,70
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	5,89
		30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	6,07
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	5,93
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	6,02
25	150	16	78,4	4717	7,76	6492	9,78	1942	4,98	6,75
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	6,83
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	6,91
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	7,00
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	7,11
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	7,23
		30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	7,31

Таблица П2. Балки двутавровые (ГОСТ 8239-72)



Но- мер бал- ки	h , мм	b , мм	s , мм	t , мм	Пло- щадь A , см ²	I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x^* , см ³	I_y , см ⁴	i_y , см
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114,0	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104,0	115,0	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114,0	155,0	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131,0	157,0	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143,0	206,0	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163,0	198,0	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178,0	260,0	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210,0	260,0	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229,0	337,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268,0	337,0	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292,0	436,0	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339,0	419,0	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423,0	516,0	2,89
40	400	155	8,0	13,0	72,6	19062	953	16,2	545,0	667,0	3,03
45	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708,0	808,0	3,09
50	500	170	10,0	15,2	100,0	39727	1589	19,9	919,0	1043,0	3,23
55	550	180	11,0	16,5	118,0	55962	2035	21,8	1181,0	356,0	3,39
60	600	190	12,0	17,8	138,0	76806	2560	23,6	1491,0	1725,0	3,54
70a	700	210	15,0	24,0	202,0	152700	4360	27,5	2550,0	3240,0	4,01

Таблица ПЗ. Швеллеры (ГОСТ 8240 – 72)



Но- мер про- фи- ля	h , мм	b , мм	s , мм	t , мм	Пло- щадь сече- ния A , см ²	I_x , см ⁴	i_x , см	I_y , см ⁴	i_y , см	z_0 , см
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	1,92	5,61	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	2,54	8,70	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	3,16	12,8	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	3,99	20,4	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	4,78	31,2	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	5,60	45,4	1,7	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	5,66	57,5	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	6,42	63,3	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	6,49	78,8	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	7,24	86,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	7,32	105,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	8,07	113,0	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	8,15	139,0	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	8,89	151,0	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	8,99	187,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	9,73	208,0	2,60	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	9,84	254,0	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	10,9	262,0	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	12,0	327,0	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	13,1	410,0	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	14,2	513,0	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15520	15,7	642,0	3,23	2,75

