Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Казанский государственный аграрный университет

Кафедра физики и математики

МАТЕМАТИКА
Часть 1

Учебно-методическое пособие для студентов
очной и заочной формы обучения

Казань, 2017

УДК 51 (07)
ББК 22.1Р

Составители: Н.Г. Киселева, доцент кафедры физики и математики
А.Н. Зиннатуллина, доцент кафедры физики и математики

Рецензенты: доцент кафедры прикладной математики КГАСУ, к.т.н. Р.М. Гильфанов;
доцент кафедры экономики и информационных технологий Казанского ГАУ, к.э.н. О.С. Семичева.

Печатается по решению методической комиссии ИМ и ТС (протокол №7 от 29.03.2017 г), кафедры физики и математики (протокол №6 от 6.02.2017 г.).

Математика. Часть 1: учебно-методическое пособие для студентов заочной формы обучения / Н.Г. Киселева, А.Н. Зиннатуллина. – Казань: Изд-во Казанского ГАУ, 2017. – 88 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов заочной формы обучения всех направлений подготовки Института механизации и технического сервиса, Института экономики, Агрономического факультета и Факультета лесного хозяйства и экологии, обучающихся по ФГОС ВО (уровень бакалавриата и магистратуры), способствует формированию общекультурных, общепрофессиональных компетенций. Содержат краткие теоретические сведения и разобранные примеры с подробными пояснениями, приведены задания для самостоятельной работы. Пособие может быть использовано студентами дневной очной формы обучения.

УДК 51 (07)
ББК 22.1Р

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕМА 1. МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Матрица. Основные понятия

Определение. *Матрицей* размера *mxn* называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются *элементами* матрицы. Матрицы обозначаются латинскими буквами A, B, C, … и записываются в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или в сокращенной записи: $\underset{m\times n}{A} = (a_{ij})$, $i = 1,2,..., m$, $j = 1,2,..., n$. Каждый элемент a_{ij} матрицы имеет два индекса i и j, которые показывают, что элемент находится в i -ой строке и j -ом столбце.

Определение. Две матрицы A и B называются *равными*, если они имеют одинаковое число строк m и одинаковое число столбцов n и их соответствующие элементы равны: $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1,2,..., n$.

Определение. *Матрицей-строкой* называется матрица, состоящая из одной строки:

$$\underset{1\times n}{A} = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}).$$

Определение. *Матрицей-столбцом* называется матрица, состоящая из одного столбца:

$$\underset{m\times 1}{B} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрица, у которой число строк равно числу столбцов ($m = n$), называется *квадратной матрицей порядка n*. Число строк или столбцов квадратной матрицы называется ее *порядком*.

Рассмотрим квадратную матрицу порядка n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Диагональ, содержащая элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$, называется главной, а диагональ, содержащая элементы $a_{1n}, a_{2\,n-1}, ..., a_{n1}$, называется побочной (или вспомогательной).

Определение. Квадратные матрицы, у которых отличны от нуля только элементы, находящиеся на главной диагонали называются *диагональными*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Если у диагональной матрицы n-го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется *единичной* матрицей n-го порядка и обозначается:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2. Действия над матрицами

1. Умножение матрицы на число.

При умножении матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ каждый ее элемент умножается на это число $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, тогда $3A = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 & 3\cdot 3 \\ -2\cdot 3 & 5\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 15 \end{pmatrix}$.

2. Сложение матриц.

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера *m*x*n* является матрица *C* размера *m*x*n*, элементы которой вычисляются по формуле $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ (т.е. матрицы складываются поэлементно).

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$,

тогда матрица $C = 2A + B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -2 & 10 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & 6-1 & 0+3 \\ -2+2 & 10+5 & 12-4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 0 & 15 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. Вычитание матриц.

Разностью матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера *m*x*n* является матрица D размера *m*x*n*, элементы которой вычисляются по формуле $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ для $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$,

тогда матрица

$$D = A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-7 & 2-5 \\ -3-1 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Умножение матриц.

Умножение матрицы A на матрицу *B* определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Тогда произведением матриц $\underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B}$ называется такая матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов *i*-ой строки матрицы *A* на соответствующие элементы *j*-го столбца матрицы *B*:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj}.$$

Пример. Даны матрицы $\underset{3\times 2}{A}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ и $\underset{2\times 2}{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, тогда

$$\underset{3\times 2}{A}\cdot\underset{2\times 2}{B}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 1+2\cdot 3 & 3\cdot(-1)+2\cdot 4\\ 2\cdot 1+1\cdot 3 & 2\cdot(-1)+1\cdot 4\\ 1\cdot 1+5\cdot 3 & 1\cdot(-1)+5\cdot 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}9 & 5\\ 5 & 2\\ 16 & 19\end{pmatrix}.$$

5. Возведение в степень.

Целой положительной степенью A^m $(m > 1)$ квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A, т.е. $A^m=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{m\text{ раз}}$.

Операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц.

Пример. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, тогда

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot 3 & 1\cdot 2+2\cdot 4\\ 3\cdot 1+4\cdot 3 & 3\cdot 2+4\cdot 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{pmatrix}.$$

6. Транспонирование матрицы.

Переход от матрицы A к матрице A^T, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка, называется транспонированием матрицы. Из определения следует, что если матрица A имеет размер mxn, то транспонированная матрица A^T имеет размер nxm.

Пример. Дана матрица $\underset{2\times 3}{A}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 6 & 7 & 8\end{pmatrix}$, тогда $\underset{3\times 2}{A}^T=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 4 & 7\\ 5 & 8\end{pmatrix}$.

1.3. Определитель. Основные понятия

Определение. *Определителем* называется число, характеризующее квадратную матрицу A. Определитель обозначается $|A|$ или $\Delta = \det A$ (детерминант).

Определение. *Определитель второго порядка* матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ вычисляется по формуле:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Пример.

Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, тогда $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 5 \cdot 1 = 9$.

Определение. *Определитель третьего порядка* матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ вычисляется по формуле Саррюса («правило треугольников»):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, тогда

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot 4 - 5 \cdot 3 \cdot 1 -$$

$$- (-1) \cdot 2 \cdot 4 = -3.$$

Определение. *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Определение. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, то есть $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Минор M_{23} элемента a_{23} получается из определителя матрицы A вычеркиванием второй строки и третьего столбца, т.е.

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 = -7.$$

Алгебраическое дополнение A_{23} элемента a_{23}:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^5 \cdot (-7) = 7.$$

1.4. Обратная матрица

Определение. Матрица A^{-1} называется *обратной* по отношению к квадратной матрице A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную. В этом случае и обратная матрица является квадратной того же порядка. Однако не каждая квадратная матрица имеет обратную.

Определение. Если определитель матрицы отличен от нуля $(|A| \neq 0)$, то такая квадратная матрица называется *невырожденной*, в противном случае $(|A| = 0)$ – *вырожденной*.

Теорема 1 (Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы). Обратная матрица A^{-1} существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная.

Алгоритм вычисления обратной матрицы

1. Вычисляется определитель матрицы A. Если $|A| = 0$, то матрица A – вырожденная и обратной матрицы A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица A – невырожденная и обратная матрица существует.

2. Вычисляются алгебраические дополнения всех элементов a_{ij} матрицы A и записывают новую матрицу $\widetilde{A}$.

3. Вычисляют матрицу $\widetilde{A}^T$, транспонированную к матрице $\widetilde{A}$.

4. Вычисляют обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \widetilde{A}^T$, где $\left(|A| \neq 0\right)$.

5. Проверяют правильность вычисления обратной матрицы A^{-1}, исходя из ее определения: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Пример. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1. Вычисляем определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \left(1 \cdot 4 - 1 \cdot (-1)\right) + 1 \cdot \left((-2) \cdot 4 - 1 \cdot 2\right) + 0 \cdot \left((-2) \cdot (-1) - 1 \cdot 2\right) =$$

$$= 3 \cdot 5 + 1 \cdot (-10) + 0 \cdot 0 = 5 \neq 0.$$

$\Rightarrow$ матрица A – невырожденная и A^{-1} существует.

2. Вычисляем алгебраические дополнения A_{ij} элементов матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0; \qquad A_{23} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Записываем матрицу $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 4 & 12 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Матрица $\tilde{A}^T$, транспонированная к матрице $\tilde{A}$, имеет вид:

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T$.

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot \frac{4}{5} + (-1) \cdot \frac{12}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} & 3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + (-1) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 0 \cdot \frac{1}{5} \\ (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & (-2) \cdot \frac{4}{5} + 1 \cdot \frac{12}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5} & (-2) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + 1 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 1 \cdot \frac{1}{5} \\ 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 0 & 2 \cdot \frac{4}{5} + (-1) \cdot \frac{12}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} & 2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + (-1) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 4 \cdot \frac{1}{5} \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix} 3-2+0 & \frac{12}{5}-\frac{12}{5}+0 & -\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+0 \\ -2+2+0 & -\frac{8}{5}+\frac{12}{5}+\frac{1}{5} & \frac{2}{5}-\frac{3}{5}+\frac{1}{5} \\ 2-2+0 & \frac{8}{5}-\frac{12}{5}+\frac{4}{5} & -\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.
$$

Следовательно, обратная матрица вычислена правильно.

1.5. Решение невырожденных линейных систем

Матричный способ решения системы. Формулы Крамера

Пусть дана система n линейных уравнений с n переменными:

$$
\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}
$$

или в матричной форме $A \cdot X = B$.

Определение. Определитель матрицы A обозначим Δ и назовем *определителем системы*:

$$
\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

Определение. Если определитель системы отличен от нуля, то система называется *невырожденной*.

Найдем решение данной системы уравнений в случае $\Delta \neq 0$.

Умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то $X = A^{-1} \cdot B$.

Определение. Отыскание решения системы по формуле $X = A^{-1} \cdot B$ называют *матричным способом* решения системы.

Таким образом, чтобы решить систему уравнений матричным способом, нужно:

1. Найти обратную матрицу A^{-1}.

2. Найти произведение обратной матрицы A^{-1} на матрицу-столбец свободных членов B, т.е. $A^{-1} \cdot B$.

3. Пользуясь определением равных матриц, записать ответ.

Если в определителе системы Δ заменить поочередно столбцы коэффициентов при $x_1, x_2, \dots, x_n$ на столбец свободных членов, то получим n определителей (для n неизвестных):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Тогда получим формулы для решения системы n линейных уравнений с n неизвестными: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$.

Определение. Формулы $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1, \dots, n$ называются *формулами Крамера*.

1.6. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решений линейных алгебраических систем является *метод Гаусса*, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов.

I этап (*прямой ход*).

С помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (треугольного) вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases}$$

где $k \le n$, $a_{ii} \ne 0$, $i = 1,\ldots, k$. Коэффициенты a_{ii} называются *главными* элементами системы.

II этап (*обратный ход*).

Из ступенчатой системы последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Ступенчатая система уравнений, вообще говоря, имеет бесчисленное множество решений. В последнем уравнении этой системы выражаем первое неизвестное x_k через остальные неизвестные ($x_{k+1},\ldots,x_n$). Затем подставляем значение x_k в предпоследнее уравнение системы и выражаем x_{k-1} через ($x_{k+1},\ldots,x_n$); затем находим $x_{k-2},\ldots,$ x_1. Придавая свободным неизвестным ($x_{k+1},\ldots,x_n$) произвольные значения, получим бесчисленное множество решений системы.

Замечание. Если ступенчатая система оказывается треугольной, т.е. $k = n$, то исходная система имеет единственное решение. Из последнего уравнения находим x_n, из предпоследнего уравнения x_{n-1}, далее поднимаясь по системе вверх, найдем остальные неизвестные ($x_{n-2},\ldots, x_1$).

1.7. Решение типового задания

Пример 1. Решить матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 4x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Составим матричное решение $AX = B$, где

$$A=\begin{pmatrix}6 & 1 & -4\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5\\ 6\\ 3\end{pmatrix}.$$

тогда $X = A^{-1}\cdot B$. Вычислим обратную матрицу A^{-1}.

Находим

$$|A|=\begin{vmatrix}6 & 1 & -4\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=6\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}+$$

$$+(-4)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=6(2-3)-1(-1-6)-4(1-(-4))=-19.$$

Вычислим алгебраические дополнения A_{ij} элементов матрицы A:

$A_{11}=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1;$ $A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -4\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3;$ $A_{31}=\begin{vmatrix}1 & -4\\ -2 & 3\end{vmatrix}=-5$

$A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=7;$ $A_{22}=\begin{vmatrix}6 & -4\\ 2 & -1\end{vmatrix}=2;$ $A_{32}=-\begin{vmatrix}6 & -4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-22$

$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5;$ $A_{23}=-\begin{vmatrix}6 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-4;$ $A_{33}=\begin{vmatrix}6 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-13$

Составим матрицу $\begin{pmatrix}-1 & 7 & 5\\ -3 & 2 & -4\\ -5 & -22 & -13\end{pmatrix}$ и транспонируем ее $\begin{pmatrix}-1 & -3 & -5\\ 7 & 2 & -22\\ 5 & -4 & -13\end{pmatrix}$.

Запишем обратную матрицу $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{19} & \frac{3}{19} & \frac{5}{19}\\ -\frac{7}{19} & -\frac{2}{19} & \frac{22}{19}\\ -\frac{5}{19} & \frac{4}{19} & \frac{13}{19}\end{pmatrix}$.

Следовательно,

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{19} & \frac{3}{19} & \frac{5}{19} \\ -\frac{7}{19} & -\frac{2}{19} & \frac{22}{19} \\ -\frac{5}{19} & \frac{4}{19} & \frac{13}{19} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$.

Пример 2. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 10, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -6. \end{cases}$$

Решение.

Вычислим определитель системы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6(1 - (-6)) + 1(3 - (-3)) + 1(6 - 1) = 53.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & -3 \\ -6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 10 & -3 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 5(1 - (-6)) + 1(10 - 18) + 1(20 - (-6)) = 53.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & -3 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 10 & -3 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 6(10 - 18) - 5(3 - (-3)) + 1(-18 - 10) = -106.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} +$$

$$+ 5 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6(-6-20) + 1(-18-10) + 5(6-1) = -159.$$

Подставляя найденные значения определителей в формулы Крамера, получаем искомое решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{53}{53} = 1; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-106}{53} = -2; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-159}{53} = -3.$$

Ответ: $x_1 = 1, \; x_2 = -2, \; x_3 = -3$.

Пример 3. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4, \\ 2x - y + 3z = 9, \\ x - 2y + 2z = 3. \end{cases}$$

Решение.

Переставим третье уравнение на место первого:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3, \\ 2x - y + 3z = 9, \\ 3x + 2y - z = 4. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right).$$

Чтобы в 1-м столбце получить $a_{21} = a_{31} = 0$, умножим 1-ю строку сначала на 2, а затем на 3 и вычтем результаты из 2-й и 3-й строк:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & -5 \end{array}\right).$$

Умножим 2-ю строку на 8, а 3-ю строку умножим на 3, затем полученные результаты вычтем из 3-й строки 2-ю строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -13 & -39 \end{array}\right).$$

Запишем новую эквивалентную систему, которой соответствует расширенная матрица:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3, \\ 3y - z = 3, \\ -3z = -39. \end{cases}$$

Выразим переменную z из 3-го уравнения, y – из 2-го уравнения, переменную x из 1-го уравнения:

$$\begin{cases} z = 3, \\ y = \frac{1}{3}(3 + 3) = 2, \\ x = 3 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Задачи №1-30:

Решите систему линейных уравнений тремя способами:

а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 3x + y + z = 6, \\ x + 4y - z = 3, \\ 4x - y + 2z = 7. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x - y + 3z = 6, \\ 2x + y + z = 5, \\ x + 3y - 4z = 3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2, \\ x + 5y + z = -4, \\ 4x - y + 3z = 6. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y + 3z = -2, \\ 3x - y + z = 3, \\ 2x + y - z = 7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} -2x + y + z = -6, \\ x - 3y + 2z = 8, \\ 3x + 2y - z = 6. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x - y + 2z = -1, \\ 2x + 3y - z = -4, \\ -4x + y - 3z = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x - 2y + z = 4, \\ -2x + y - 3z = -1, \\ x + 2y + 2z = 5. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x + 5y - 2z = 1, \\ 2x - y + 3z = -2, \\ -2x + 3y - z = 6. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x - y - 3z = -3, \\ -5x + 3y + 2z = -4, \\ x + 4y + 2z = 1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} -2x + y + 3z = 5, \\ x - 4y - z = 6, \\ 2x + 2y - z = -5. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 5x - 2y + z = 4, \\ x + 4y - 2z = 3, \\ 2x - y + 2z = 6. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 6, \\ x + 2y + 3z = 1, \\ x + 3y + 6z = 2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x - y + 4z = 4, \\ 2x + 3y - z = -1, \\ -x - 2y + 3z = 7. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + 3y - z = -4, \\ 2x - 2y + 3z = 3, \\ -x + 2y - 3z = -2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} -3x + 2y + z = -5, \\ -x + 2y + 2z = 2, \\ 2x + y - 3z = -6. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x - y + z = 8, \\ -2x + 5y - z = 0, \\ x + y - 2z = -3. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x - 4y + z = -5, \\ 2x + y + 2z = 8, \\ -3x + 2y - z = 3. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x - y - z = 7, \\ x + 2y - z = -2, \\ -2x - y + 3z = -1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x - 2y + z = -2, \\ -3x + y - 2z = 1, \\ x - 2y + 3z = -6. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x - y - 3z = -6, \\ x + 5y + z = -1, \\ 3x - y + z = 7. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 4x + y - 3z = -1, \\ x - 2y + z = 6, \\ 3x + y - 2z = -1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1, \\ 3x + y + 4z = -7, \\ -x + 3y + 2z = -1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x + 5y - z = 5, \\ -2x + y + 3z = -1, \\ 2x + 3y + z = -3. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 4x - y + 2z = -3, \\ x + 3y + z = 8, \\ -x + 2y + 3z = -1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 4, \\ -2x + 2y - z = 3, \\ x + 5y + z = 6. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 3, \\ 2x - y - 4z = 4, \\ x + 2y + z = 1. \end{cases}$

27. $\begin{cases} -2x + 3y + z = -1, \\ x + 3y + 4z = -4, \\ 2x - y - 3z = 7. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x - 2y + 5z = 1, \\ -3x + y + 2z = -1, \\ x - 4y + 3z = -7. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 4x + y - 3z = -5, \\ 2x - 2y + z = 10, \\ x + 2y + 2z = -1. \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} 3x - y + 2z = 5, \\ -x + 3y + z = -6, \\ 2x + y + 3z = 0. \end{cases}$

ТЕМА 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

2.1. Координаты точки на плоскости

Если даны две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ на плоскости, то расстояние d между ними определяется по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Координаты точки *M*, лежащей на одной прямой с точками A и B и делящей отрезок AB в отношении $\lambda = \dfrac{AM}{MB}$, определяются формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \text{ и } y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\ .$$

Если точка M делит отрезок пополам, то $\lambda = 1$ и координаты середины отрезка находятся по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ и } y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Пример 1. Вычислить длину медианы AD треугольника ABС, где *A*(3; –2), *B*(5; 2), *C*(–1; 4).

Решение.

Найдем координаты точки D по формулам середины отрезка BC:

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{5-1}{2} = 2\,,\ y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2+4}{2} = 3\,.$$

Вычислим длину медианы AD по формуле расстояния между двумя точками:

$$|AD| = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{26}.$$

Пример 2. Показать, что треугольник с вершинами *A*(3; –1), *B*(0; –4), *C*(–3; 2) равнобедренный.

Решение.

Найдем длины сторон треугольника:

$$|AB| = \sqrt{(0-3)^2 + (-4-(-1))^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18},$$

$$|AC| = \sqrt{(-3-3)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45},$$

$$|BC| = \sqrt{(-3-0)^2 + (2-(-4))^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}.$$

Так как $|AC| = |BC|$, то треугольник ABC – равнобедренный.

2.2. Уравнения прямой на плоскости

1. **Общее уравнение прямой**. Любое уравнение первой степени относительно x и y вида

$$Ax + By + C = 0,$$

где A, B, C – постоянные коэффициенты ($A^2 + B^2 \neq 0$) определяет на плоскости некоторую прямую. Это уравнение называется *общим уравнением прямой*.

Некоторые частные случаи общего уравнения прямой:

1. A = 0; $B \neq 0$; $C \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $By + C = 0$ параллельна оси Ox.

2. B = 0; $A \neq 0$; $C \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $Ax + C = 0$ параллельна оси Oy.

3. C = 0; $A \neq 0$; $B \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $Ax + By = 0$, проходит через начало координат.

2. **Уравнение прямой с угловым коэффициентом**. Если в общем уравнении прямой $B \neq 0$, то, разрешив его относительно y, получим уравнение вида

$$y = kx + b,$$

где $k = -A/B$, $b = -C/B$. Его называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом*, поскольку $k = tg\alpha$, где α – угол, образованный прямой с положительным направлением оси Ox. Свободный член уравнения b равен ординате точки пересечения прямой с осью Oy.

Если прямая проходит через начало координат, то $b = 0$ и, следовательно, уравнение прямой с угловым коэффициентом будет иметь вид $y = kx$.

3. **Уравнение прямой в отрезках**. Если в общем уравнении прямой $C \neq 0$, то, разделив его члены на $(-C)$, получим уравнение вида:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $a = -C/A$, $b = -C/B$. Его называют *уравнением прямой в отрезках*; в нем a является абсциссой точки пересечения прямой с осью Ox, а b – ордината точки пересечения прямой с осью Oy. Поэтому a и b называют отрезками прямой на осях координат.

4. **Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении**. Пусть прямая проходит через точку $M(x_0; y_0)$ и ее направление характеризуется угловым коэффициентом k. Уравнение этой прямой можно записать в виде $y = kx + b$, где b – пока неизвестная величина.

Так как прямая проходит через точку $M(x_0; y_0)$, то координаты точки удовлетворяют уравнению прямой: $y_0 = kx_0 + b$. Отсюда $b = y_0 - kx_0$. Подставляя значение b в уравнение $y = kx + b$, получим искомое уравнение прямой $y = kx + y_0 - kx_0$, т.е.

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

называемое также *уравнениями пучка прямых* с центром в точке $M(x_0; y_0)$.

5. **Уравнение прямой, проходящей через две точки.** Пусть прямая проходит через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Уравнение прямой, проходящей через точку M_1, имеет вид:

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

где k – пока неизвестный коэффициент.

Так как прямая проходит через точку $M_2(x_2; y_2)$, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Отсюда находим $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Подставляя найденное значение k в уравнение $y - y_1 = k(x - x_1)$, получим *уравнение прямой, проходящей через точки* M_1 и M_2:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Предполагается, что в этом уравнении $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$.

Если $x_1 = x_2$, то прямая, проходящая через точки M_1 и M_2, параллельна оси ординат. Ее уравнение имеет вид $x = x_1$.

Если $y_1 = y_2$, то прямая, проходящая через точки M_1 и M_2, параллельна оси абсцисс. Ее уравнение имеет вид $y = y_1$.

2.3. Прямая линия на плоскости. Основные задачи

Угол между двумя прямыми и условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Острый угол между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ определяется по формуле:

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Условие параллельности прямых имеет вид $k_1 = k_2$.

Условие перпендикулярности прямых имеет вид $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

2. **Расстояние от точки до прямой.** Расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

3. **Пучок прямых**. Если пересекающиеся прямые заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то уравнение

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

где λ – числовой множитель, определяет прямую линию, проходящую через точку пересечения заданных прямых. Давая в последнем уравнении λ различные значения, будем получать различные прямые, принадлежащие *пучку прямых*, центр которого есть точка пересечения прямых.

2.4. Решение типового задания

Даны вершины треугольника ABC (рис.1): $A(1;\ 1)$, $B(5;\ 4)$, $C(2;\ 6)$. Найти: 1) длину стороны AC;

2) уравнение стороны AB;

3) уравнение высоты CH;

4) уравнение медианы AM;

5) точку N пересечения медианы AM и высоты CH;

6) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB.

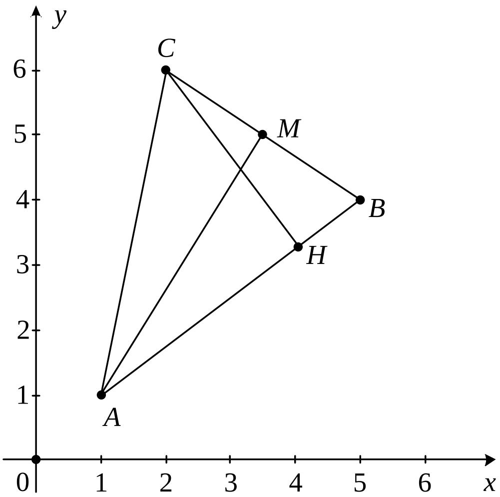


Рисунок 1 – Треугольник ABC в плоскости XOY

Решение.

1) Найдем длину стороны AC:

$$|AC| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{26}.$$

2) Найдем уравнение стороны AB, используя формулу уравнения прямой, проходящей через две точки: $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Имеем:

$$\frac{y-1}{4-1} = \frac{x-1}{5-1} \Rightarrow 3x - 4y + 1 = 0.$$

3) Уравнение высоты CH составим как уравнение прямой, имеющей

угловой коэффициент k_{CH} и проходящей через точку $C(x_1; y_1)$:

$$y - y_1 = k_{CH}(x - x_1).$$

Так как $CH \perp AB$, то $k_{CH} = -\frac{1}{k_{AB}}$. Найдем угловой коэффициент прямой AB из ее уравнения $3x - 4y + 1 = 0$.

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}.\text{ Отсюда } k_{AB} = \frac{3}{4}\text{, а } k_{CH} = -\frac{4}{3}.$$

Уравнение высоты CH примет вид:

$$y - 6 = -\frac{4}{3}(x - 2) \text{ или } 4x + 3y - 26 = 0.$$

4) Медиана AM выходит из точки $A(1;\ 1)$ и по свойствам медианы делит противолежащую сторону пополам, значит M – середина стороны BC. Найдем координаты точки M по формулам середины отрезка BC:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{5+2}{2} = 3{,}5,$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{4+6}{2} = 5 \Rightarrow M(3{,}5;\ 5).$$

Найдем уравнение медианы AM, используя формулу уравнения прямой, проходящей через две точки: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Имеем:

$$\frac{y-1}{5-1} = \frac{x-1}{3{,}5-1} \Rightarrow 4x - 2{,}5y - 1{,}5 = 0 \text{ или } 8x - 5y - 3 = 0.$$

5) Чтобы найти точку N пересечения медианы AM и высоты CH, необходимо решить систему уравнений:

$\begin{cases} 8x - 5y - 3 = 0, \\ 4x + 3y - 26 = 0. \end{cases}$ Решив эту систему уравнений, получим точку $N\left(\frac{139}{44}; \frac{49}{11}\right)$. Длину высоты найдем по формуле расстояния от точки A до прямой BC. Для этого составим уравнение прямой BC, используя формулу уравнения прямой, проходящей через две точки: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$, получаем $\frac{y-4}{6-4}=\frac{x-5}{2-5}$ $\Rightarrow 2x+3y-22=0$.

6) Уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB обозначим CK. Так как $CK \| AB$, то $k_{CK}=k_{AB}=\frac{3}{4}$. Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k_{CK} и проходящей через точку $C(x_1; y_1)$:

$$y-y_1=k_{CK}(x-x_1).$$

Получаем $y-6=\frac{3}{4}(x-2)$, тогда уравнение прямой CK имеет вид $4y-3x-18=0$.

Задачи №31-60:

Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти:

1) длину стороны AC;
2) уравнение стороны AB;
3) уравнение высоты CH;
4) уравнение медианы AM;
5) точку N пересечения медианы AM и высоты CH;
6) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB.

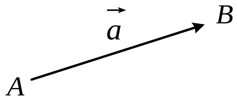
31. $A(1; -3)$, $B(0; 7)$, $C(-2; 4)$
32. $A(7; 0)$, $B(1; 4)$, $C(-8; -4)$
33. $A(0; 2)$, $B(-7; -4)$, $C(3; 2)$
34. $A(3; -1)$, $B(11; 3)$, $C(-6; 2)$
35. $A(-2; -3)$, $B(0; 7)$, $C(8; 3)$
36. $A(1; 2)$, $B(3; 12)$, $C(11; 8)$
37. $A(-4; -1)$, $B(-2; 9)$, $C(6; 5)$
38. $A(5; 4)$, $B(7; 11)$, $C(15; 10)$
39. $A(-8; -3)$, $B(4; -12)$, $C(8; 10)$
40. $A(1; 0)$, $B(13; -9)$, $C(7; 13)$
41. $A(1; -1)$, $B(7; 2)$, $C(4; 3)$
46. $A(1; 1)$, $B(7; 4)$, $C(4; 5)$
47. $A(2; 0)$, $B(8; 3)$, $C(5; 4)$
48. $A(3; -1)$, $B(9; 2)$, $C(6; 4)$
49. $A(4; -2)$, $B(10; 1)$, $C(7; 2)$
50. $A(0; 2)$, $B(6; 5)$, $C(3; 6)$
51. $A(-1; 3)$, $B(5; 6)$, $C(2; 7)$
52. $A(-2; 4)$, $B(4; 7)$, $C(1; 8)$
53. $A(3; -3)$, $B(9; 0)$, $C(6; 1)$
54. $A(-1; 0)$, $B(5; 3)$, $C(2; 4)$
55. $A(-2; 3)$, $B(4; 6)$, $C(1; 7)$
56. $A(5; -3)$, $B(11; 0)$, $C(8; 3)$

42. $A\ (2; -2)$, $B(8; 1)$, $C(5; 2)$
43. $A\ (1; 0)$, $B(7; 3)$, $C(4; 4)$
44. $A\ (2; -1)$, $B(8; 2)$, $C(5; 3)$
45. $A\ (3; -2)$, $B(9; 1)$, $C(6; 2)$
57. $A\ (-4; 6)$, $B(2; 9)$, $C(-1; 10)$
58. $A\ (1; 3)$, $B(7; 6)$, $C(4; 7)$
59. $A\ (4; -1)$, $B(10; 2)$, $C(7; 3)$
60. $A\ (-2; 2)$, $B(4; 5)$, $C(1; 6)$

ТЕМА 3. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

3.1. Векторы, линейные операции над векторами

Определение. *Вектором* $\overrightarrow{AB}$ называется направленный отрезок, где A – начальная, а B – конечная точки вектора.



Векторы обозначают также малыми латинскими буквами $\overrightarrow{a}$,$\overrightarrow{b}$,$\overrightarrow{c}$.

Определение. *Модуль вектора* $\overrightarrow{AB}$ – это длина отрезка, изображающего вектор, записывают $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Определение. *Единичным* вектором называется вектор, длина которого равна единице.

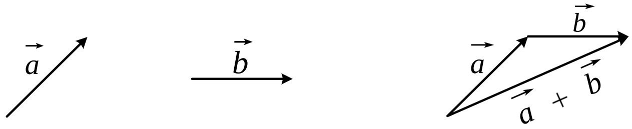
Определение. Вектор называется *нулевым*, если начало и конец его совпадают. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.

Определение. Два вектора называются *равными*, если равны их модули и совпадают направления.

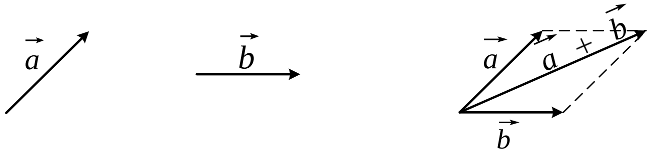
Определение. Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называют *коллинеарными*.

Определение. Векторы, противоположно направленные и имеющие равные длины, называются *противоположными*. Вектор, противоположный вектору $\overrightarrow{a}$, обозначается $(-\overrightarrow{a}\ )$.

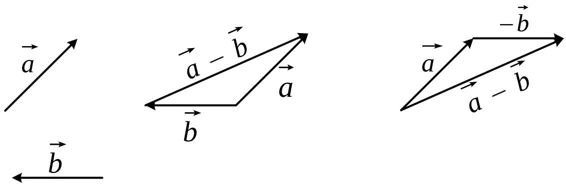
Определение. *Суммой* двух векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называется вектор $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\overrightarrow{a}$, а конец – с концом вектора $\overrightarrow{b}$ при условии, что начало вектора $\overrightarrow{b}$ совпадает с концом вектора $\overrightarrow{a}$ (правило треугольников).



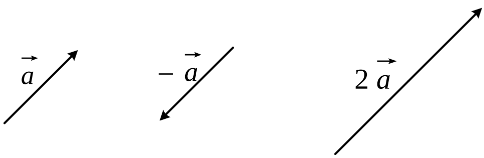
Вектор суммы $\vec{a} + \vec{b}$ равен диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах и выходящий из их общего начала (правило параллелограмма).



Определение. *Разностью* двух векторов $\vec{a} + \vec{b}$ называется вектор $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$. Начало вектора $\vec{d}$ совпадает с концом вычитаемого вектора $\vec{b}$, а конец – с концом уменьшаемого вектора $\vec{a}$. Разность векторов $\vec{a} - \vec{b}$ можно рассматривать как сумму векторов $\vec{a}$ и $(-\vec{b})$.



Определение. *Произведением* вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ с длиной равной $\left|\vec{b}\right| = |\lambda| \cdot \left|\vec{a}\right|$ и сонаправленный с вектором $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и с направлением противоположным при $\lambda < 0$.



Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

$1^0.\ \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

$2^0.\ (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;

$3^0.\ (\lambda_1+\lambda_2)\vec{a}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}$, где $\lambda_1,\lambda_2=const$;

$4^0.\ \lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$, где $\lambda=const$.

Определение. *Ортом* векторам $\vec{a}$ называется сонаправленный с ним единичный вектор $\vec{a_0}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Всякий вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде $\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a_0}$.

3.2. Проекция вектора на ось. Теоремы о проекциях

Определение. *Проекцией вектора на ось* называется число, равное длине составляющей, взятое со знаком плюс, если составляющая сонаправлена с осью и со знаком минус в противном случае (рис. 2):

$$\text{пр}_l\,\overrightarrow{AB}=\pm\overrightarrow{A_1B_1}.$$

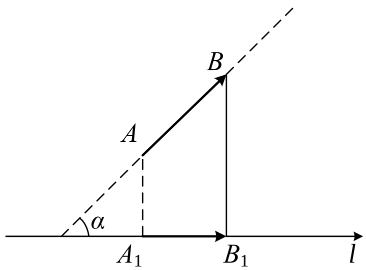


Рисунок 2 – Проекция вектора на ось

Теорема 6. Проекция вектора на ось равна произведению длины вектора на косинус угла между вектором и осью:

$$\text{пр}_l\,\vec{a}=|\vec{a}|\cos\alpha.$$

Теорема 7. Если вектор $\vec{a}$ умножить на число λ, то его проекция на ось также умножится на это число:

$$\text{пр}_l\,\lambda\vec{a}=\lambda\,\text{пр}_l\,\vec{a}.$$

Теорема 8. Проекция суммы двух векторов на ось равна сумме слагаемых векторов на ту же ось:

$$\text{пр}_l(\vec{a}+\vec{b})=\text{пр}_l\vec{a}+\text{пр}_l\vec{b}.$$

Определение. *Координатами* вектора $\vec{a}$ называют его проекции на координатные оси *Ox*, *Oy*, *Oz*. Записывают $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$ или $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ – *разложение вектора* по ортам $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ координатных осей *Ox*, *Oy*, *Oz*.

Определение. *Модуль* вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его проекций на оси координат

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

Определение. *Направляющими* косинусами вектора называются косинусы углов α,β,γ, образованных этим вектором с осями координат *Ox*, *Oy*, *Oz*:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|},\ \cos\beta=\frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|},\ \cos\gamma=\frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|},\ \text{причем}$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

3.3. Действия над векторами, заданными своими координатами

Пусть даны векторы $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$:

1) при сложении векторов их одноименные координаты складываются

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}+(a_z+b_z)\vec{k}\ \text{или}$$

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x;a_y+b_y;a_z+b_z);$$

2) при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число

$$\lambda\vec{a}=\lambda a_x\vec{i}+\lambda a_y\vec{j}+\lambda a_z\vec{k}\ \text{или}\ \lambda\vec{a}=(\lambda a_x;\lambda a_y;\lambda a_z),\ \text{где}$$

$\lambda=const$.

Определение. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *равными*, если выполняются равенства

$$a_x = b_x,\ a_y = b_y,\ a_z = b_z .$$

Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является пропорциональность их координат

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda \text{, где } \lambda = const.$$

Если известны координаты начала $A(x_1, y_1, z_1)$ и конца $B(x_2, y_2, z_2)$ вектора $\overrightarrow{AB}$, то его координаты определяются

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Длину вектора, заданного координатами начала и конца, вычисляют по формуле

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

3.4. Скалярное произведение

Определение. *Скалярным произведением* $\vec{a}\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi \text{ или } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} .$$

Свойства скалярного произведения:

1^0. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ – переместительный закон;

2^0. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ – распределительный закон;

3^0. $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b})$ – сочетательный закон, где $\lambda = const$;

4^0 скалярное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, т.е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$;

5^0. скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$.

Пусть даны два вектора $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. По свойствам 4^0 и 5^0 имеем

$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$; $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$.

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их одноименных координат

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Условие перпендикулярности двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 .$$

Косинус угла между векторами определяется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} .$$

Проекция вектора $\vec{a}$ на направление, заданное вектором $\vec{b}$, вычисляется по формуле

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} .$$

3.5. Векторное произведение

Определение. *Векторным произведением* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, который строится по следующему правилу (рис. 3):

1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направлен таким образом, что кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден из его конца совершающимся против часовой стрелки;

2) длина вектора $\vec{c}$ равна произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла φ между ними: $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$.

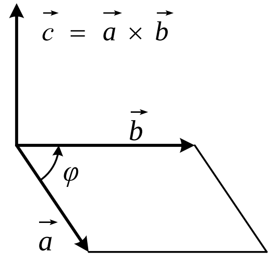


Рисунок 3 – Схема векторного произведения

Векторное произведение $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a} \times \vec{b}$.

Свойства векторного произведения:

1^0. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (т.е. векторное произведение не обладает переместительным свойством).

2^0. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, если $\vec{a} = 0$, либо $\vec{b} = 0$, либо $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (коллинеарность ненулевых векторов).

3^0. $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, где $\lambda = const$ (сочетательное свойство по отношению к скалярному множителю).

4^0. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (распределительное свойство).

Модуль векторного произведения двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

Векторные произведения координатных ортов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0,$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}; \quad \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}; \quad \vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}.$$

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$. Тогда векторное произведение удобнее находить по формуле

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

3.6. Смешанное произведение

Определение. *Смешанным произведением* векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$, т.е. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Смешанное произведение трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Свойства смешанного произведения:

1^0. Смешанное произведение трех векторов равно нулю, если:
а) хоть один из перемножаемых векторов равен нулю;
б) два из перемножаемых векторов коллинеарны;
в) три ненулевых вектора параллельны одной и той же плоскости (компланарность).

2^0. Смешанное произведение не изменяется, если в нем поменять местами знаки векторного (×) и скалярного (·) умножения, т.е. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$. В силу этого свойства смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ будем записывать в виде $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

3^0. Смешанное произведение не изменяется, если переставлять перемножаемые векторы в круговом порядке:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}.$$

4^0. При перестановке любых двух векторов смешанное произведение изменяет только знак:

$$\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{a}\vec{b}\vec{c};\ \vec{c}\vec{b}\vec{a}=-\vec{a}\vec{b}\vec{c};\ \vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ заданы своими координатами: $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$, $\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$, $\vec{c}=(c_x;c_y;c_z)$. Тогда смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равно определителю третьего порядка, составленному из координат векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Из свойств смешанного произведения трех векторов вытекает следующее:

1) необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов служит условие $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$;

2) объем V_1 параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, и объем V_2 образованной ими треугольной пирамиды находятся по формулам:

$$V_1 = \left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|,\ V_2 = \frac{1}{6}V_1 = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|.$$

3.7. Решение типового задания

Даны координаты вершин пирамиды *ABCD* (рис. 4): $A(1;4;3)$, $B(2;3;1)$, $C(-2;1;3)$, $D(0;1;2)$. Вычислить:

1) объем пирамиды;
2) длину ребра AB;
3) площадь грани ABC;
4) угол между ребрами AB и AD.

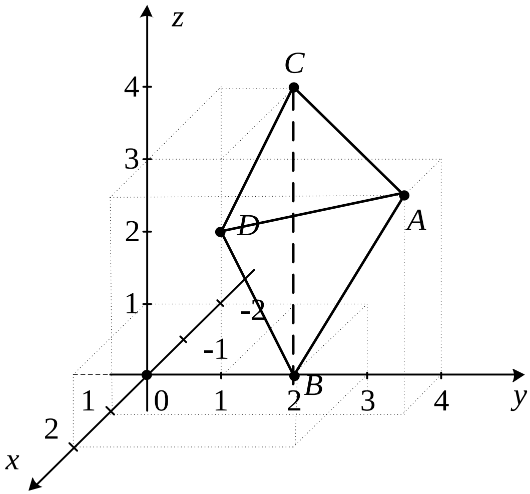


Рисунок 4 – Пирамида *ABCD* в пространстве *XYZ*

Решение:

1) Объем пирамиды вычисляется по формуле:

$$V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right|.$$

Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, совпадающие с ребрами пирамиды, сходящимися в вершине A:

$$\overrightarrow{AB}=\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k},\ \overrightarrow{AC}=-3\vec{i}-3\vec{j},\ \overrightarrow{AD}=-\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}.$$

Находим смешанное произведение этих векторов:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ -3 & -3 & 0\\ -1 & -3 & -1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-3 & 0\\ -3 & -1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-3 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-3 & -3\\ -1 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=3+3+-12=-6.$$

Так как объем пирамиды равен 1/6 объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, то $V=\frac{1}{6}\left|-6\right|=1$ (куб. ед.).

2. Длина ребра вычисляется по формуле: $AB=\left|\vec{AB}\right|\Rightarrow$

$$\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{1^2+\ -1\ ^2+\ -2\ ^2}=\sqrt{6}.$$

3. Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, поэтому находим векторное произведение этих векторов:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -1 & -2\\ -3 & -3 & 0\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -3 & 0\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}1 & -2\\ -3 & 0\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & -3\end{vmatrix}=$$

$=-6\bar{i}+6\bar{j}-6\bar{k}$. Следовательно,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{36+36+36}=3\sqrt{3}\,\text{(кв. ед.)}.$$

4. Угол между ребрами AB и AD вычисляется по формуле:

$$\angle\ A\bar{B},A\bar{D}\ =\arccos\frac{A\bar{B},A\bar{D}}{\left|A\bar{B}\right|\cdot\left|A\bar{D}\right|}\Rightarrow$$

$$\angle\ A\bar{B},A\bar{D}\ =\arccos\frac{1\cdot\ -1\ +\ -1\ \cdot\ -3\ +\ -2\ \cdot\ -1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{11}}=\arccos\frac{4}{\sqrt{66}}.$$

Задачи №61-90:

Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Вычислить: 1) объем пирамиды;

2) длину ребра AB;

3) площадь грани ABC;

4) угол между ребрами AB и AD.

Координаты вершин пирамиды для соответствующих номеров задач следующие:

61. $A\ 1;1;1\ , B\ -1;2;4\ , C\ 2;0;6\ , D\ -2;5;-1\ .$

62. $A\ 0;5;0\ , B\ 2;3;-4\ , C\ 0;0;6\ , D\ -3;1;-1\ .$

63. $A\ 0;0;6\ , B\ 4;0;-4\ , C\ 1;3;-1\ , D\ 4;-1;-3\ .$

64. $A\ -5;6;-1\ , B\ 6;-5;2\ , C\ 6;5;1\ , D\ 0;0;2\ .$

65. $A\ 2;-5;3\ , B\ 3;2;-5\ , C\ 5;-3;-2\ , D\ -5;3;-2\ .$

66. $A\ 6;0;4\ , B\ 0;6;4\ , C\ 4;6;0\ , D\ 0;-6;4\ .$

67. $A\ 3;2;4\ , B\ 2;4;3\ , C\ 4;3;-2\ , D\ -4;-2;-3\ .$

68. $A\ 6;3;5\ , B\ 5;-6;3\ , C\ 3;5;6\ , D\ -6;-1;2\ .$

69. $A\ 5;-2;-1\ , B\ 4;0;0\ , C\ 2;5;1\ , D\ 1;2;5\ .$

70. $A\ 4;2;5\ , B\ 3;0;4\ , C\ 0;2;3\ , D\ 5;-2;-4\ .$

71. $A\ 4;2;5\ , B\ -3;0;4\ , C\ 0;2;3\ , D\ 5;2;-4\ .$

72. $A\ 4;4;10\ , B\ 7;10;2\ , C\ 2;8;4\ , D\ 9;6;9\ .$

73. $A\ 4;6;5\ , B\ 6;9;4\ , C\ 2;10;10\ , D\ 7;5;9\ .$

74. $A\ 3;5;4\ , B\ 8;7;4\ , C\ 5;10;3\ , D\ 4;7;8\ .$

75. $A\ 10;6;5\ , B\ -2;8;4\ , C\ 6;8;9\ , D\ 7;10;3\ .$

76. $A\ 1;8;2\ , B\ 5;2;6\ , C\ 5;7;4\ , D\ 4;10;9\ .$

77. $A\ 6;6;5\ , B\ 4;9;5\ , C\ 4;6;11\ , D\ 5;9;3\ .$

78. $A\ 7;2;2\ , B\ 5;7;7\ , C\ 5;3;1\ , D\ 2;3;7\ .$

79. $A\ 8;6;4\ , B\ 10;5;5\ , C\ 5;6;8\ , D\ 8;10;-7\ .$

80. $A\ \ 7;7;3\ \ , B\ \ 6;5;8\ \ , C\ \ 3;6;7\ \ , D\ \ 8;4;1\ \ .$

81. $A\ \ 4;0;0\ \ , B\ \ -2;1;2\ \ , C\ \ 1;3;2\ \ , D\ \ 3;2;7\ \ .$

82. $A\ \ -2;1;2\ \ , B\ \ 4;0;1\ \ , C\ \ 3;2;7\ \ , D\ \ 1;3;2\ \ .$

83. $A\ \ 1;3;2\ \ , B\ \ 3;2;7\ \ , C\ \ 4;0;1\ \ , D\ \ -2;1;-2\ \ .$

84. $A\ \ 3;2;7\ \ , B\ \ 1;3;2\ \ , C\ \ -2;1;3\ \ , D\ \ 4;-2;3\ \ .$

85. $A\ \ 3;1;-2\ \ , B\ \ 1;-2;1\ \ , C\ \ -2;1;0\ \ , D\ \ 2;2;5\ \ .$

86. $A\ \ 1;-2;1\ \ , B\ \ 3;1;-2\ \ , C\ \ 2;2;5\ \ , D\ \ -2;1;0\ \ .$

87. $A\ \ -3;2;1\ \ , B\ \ -2;1;0\ \ , C\ \ 1;-2;1\ \ , D\ \ 3;1;2\ \ .$

88. $A\ \ 1;-2;1\ \ , B\ \ 3;1;-2\ \ , C\ \ 2;2;5\ \ , D\ \ -2;1;0\ \ .$

89. $A\ \ -3;1;2\ \ , B\ \ -2;1;1\ \ , C\ \ 1;-2;3\ \ , D\ \ 3;2;1\ \ .$

90. $A\ \ 2;-1;1\ \ , B\ \ 2;2;5\ \ , C\ \ 3;2;1\ \ , D\ \ 1;-2;1\ \ .$

ТЕМА 4. ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛЫ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

4.1. Функция. Основные понятия

Определение. Пусть даны два непустых множества X и Y. Если каждому элементу x из множества X по определенному правилу ставится в соответствие один и только один элемент y из Y, то говорят, что на множестве X задана *функция* (или *отображение*) со множеством значений Y.

Это можно записать так: $x \in X, X \xrightarrow{f} Y$ или $f : X \to Y$, где множество X называется *областью определения* функции ($D(f)$), а множество Y, состоящее из всех чисел вида $y = f(x)$, *−множеством значений* функции ($E(f)$).

Определение. *Графиком функции* $y = f(x)$ называется множество точек $M(x, y)$ плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют функциональной зависимости $y = f(x)$.

Определение.

1. Функция называется *четной*, если множество $D(f)$ симметрично относительно нуля и для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси Oy.

2. Функция называется *нечетной*, если множество $D(f)$ симметрично относительно нуля и для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция, не являющаяся ни четной, ни нечетной, называется функцией общего вида.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует число $T \neq 0$, что для любого $x \in D(f)$ справедливы условия:

1) $x + T \in D(f), x - T \in D(f)$;

2) $f(x+T) = f(x)$.

Число T называется *периодом* функции $y = f(x)$.

Определение. Если функция $u = \varphi(x)$ определена на области D, G – ее область значений, функция $y = f(u)$ определена на области G, то функция $y = f(\varphi(x)) = F(x)$ называется *сложной функцией*. Функцию $y = f(\varphi(x))$ называют *композицией двух функций* $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$.

Сложная функция может быть композицией большего числа функций: трех, четырех и т.д. Например, функция $y = \cos(x^2 + 1)$ – композиция двух функций $y = \cos u$ и $u = (x^2 + 1)$; функция $y = \lg(\sin 2^x)$ – композиция трех функций $y = \lg u, u = \sin v, v = 2^x$.

К основным элементарным функциям относятся:

1) степенная функция $y = x^\alpha$, где $\alpha \in R$;

2) показательная функция $y = a^x$, где $a > 0,\ a \neq 1$;

3) логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0,\ a \neq 1$;

4) тригонометрические функции: $y = \sin x, y = \cos x,\ y = tgx,\ y = ctgx$;

5) обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x,\ y = arctgx,\quad y = arcctgx.$

Определение. Функция $f(x)$ называется неубывающей (невозрастающей) на множестве $X \subseteq D(f)$, если для любых значений $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Определение. Функция $f(x)$ называется *монотонной*, если она невозрастающая или неубывающая.

Определение. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убываю-*

щей) на множестве $X \subseteq D(f)$, если для любых значений $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) > f(x_2)$).

Определение. Функция $f(x)$ называется *строго монотонной*, если она возрастающая или убывающая.

4.2. Последовательность. Предел последовательности

Определение. Если по некоторому закону каждому натуральному числу n поставлено в соответствие вполне определенное число a_n, то говорят, что задана *числовая последовательность* $\{a_n\}$:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots .$$

Числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ называются членами последовательности, а число a_n – общим членом последовательности.

Определение. Число a называется *пределом числовой последовательности* $\{a_n\}$, если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ верно неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon .$$

Обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противно случае – *расходящейся*.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно малой*, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно подобрать такой номер *N*, что, начиная с этого номера (т.е. для всех $n \ge N$), будет выполнено неравенство

$$|\alpha_n| < \varepsilon .$$

Обозначается: *б.м.* $\{a_n\}$.

Определение.

1. Последовательность $\{a_n\}$ называется положительной бесконечно большой, если для любого сколь угодно большого числа *M* найдется такой номер *N*, что для всех *n*, начиная с этого номера, выполняется неравенство $a_n > M$.

Обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

2. Последовательность $\{a_n\}$ называется отрицательной бесконечно

большой, если для любого сколь угодно большого по модулю отрицательного числа M найдется такой номер N, что для всех n, начиная с этого номера, выполняется неравенство $a_n < M$.

Обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Последовательность $\{a_n\}$, все члены которой отличны от нуля, - бесконечно малая тогда и только тогда, когда последовательность $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ – бесконечно большая.

Кроме того, полезно иметь в виду следующее:

1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, (в том числе $a = +\infty$), $a > 0$ (соответственно, $a < 0$, в том числе $a = -\infty$), $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0, b_n > 0\ \forall n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$ (соответственно, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = -\infty$).

4.3.Предел функции

Определение. Окрестностью точки a называется любой интервал с центром в точке a.

Определение. Число A называется *пределом* функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$.

Это записывают так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Практическое вычисление пределов основывается на следующих свойствах.

Если существуют $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то

1) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$ (при $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$).

Определение.

1. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x\to+\infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $M>0$, что для всех значений $x>M$ выполняется неравенство $\left|f\ \ x-A\right|<\varepsilon$.

Обозначается: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A.$

2. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x\to-\infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $M>0$, что для всех значений $x>M$ выполняется неравенство $\left|f\ \ x-A\right|<\varepsilon$.

Обозначается: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A.$

Определение.

1. Пусть функция $f(x)$ определена в правой полуокрестности точки a, т.е. на некотором интервале $(a,a+\delta)$, где $\delta>0$. Тогда говорят, что число A называется *пределом функции f(x) справа* в точке a (или *правосторонним пределом*), если для любой последовательности $\{a_n\}$, сходящейся к a и такой, что все ее члены больше, чем a, соответствующая последовательность значений функции $\{f(a_n)\}$ сходится к числу A.

Обозначается: $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=A.$

2. Пусть функция $f(x)$ определена в левой полуокрестности точки a, т.е. на некотором интервале $(a-\delta,a)$, где $\delta>0$. Тогда говорят, что число A называется *пределом функции f(x) слева* в точке a (или *левосторонним пределом*), если для любой последовательности $\{a_n\}$, сходящейся к a и такой, что все ее члены меньше, чем a, соответствующая последовательность значений функции $\{f(a_n)\}$ сходится к числу A.

Обозначается: $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=A.$

Очевидно, что $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ существует в том и только в том случае, когда существуют и односторонние пределы $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$, причем все три числа равны, т.е.

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a-0}f(x).$$

Замечательные пределы.

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

4.4. Непрерывность функции

Определение. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной* при $x=a$ (в точке a), если:

1) функция $f(x)$ определена в точке a и ее окрестности;

2) существует конечный предел функции $f(x)$ в точке a;

3) этот предел равен значению функции в точке a, т.е.

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

Определение. Функция, непрерывная во всех точках некоторой области, называется *непрерывной в этой области*.

Определение. Точка a, в которой нарушено хотя бы одно из трех условий непрерывности функции, называется *точкой разрыва функции*.

Если в точке a существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$, такие что $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)\neq\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$, то a называется *точкой разрыва первого рода*. Если в точке a существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, а $f(a)$ не определено или $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq f(a)$, то эта точка называется *точкой устранимого разрыва*. Точки разрыва первого рода функции, не являющиеся точками устранимого разрыва, называются *точками скачка* этой функции, при этом величина $\Delta f(a)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)-\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ называется *скачком функции* в точке a.

Если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ не существует или равен бесконечности, то точку a называют *точкой разрыва второго рода*.

4.5. Решение типового задания

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$.

Решение. Так как пределы числителя и знаменателя при $x\to 2$ равны нулю, то мы имеем неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. «Раскроем» эту неопределенность, разложив числитель и знаменатель на множители и сократив их далее на общий множитель (x+2):

$$\lim_{x\to -2}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}=\lim_{x\to -2}\frac{5(x+2)(x+0{,}6)}{3(x+2)(x-4/3)}=\lim_{x\to -2}\frac{5x+3}{3x-4}=$$

$$=\frac{5\cdot(-2)+3}{3\cdot(-2)-4}=\frac{-7}{-10}=0{,}7.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^4+5x}{-4x^4+7}$.

Решение. Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности вида ∞/∞. Так как под знаком предела стоит отношение двух многочленов, то разделим числитель и знаменатель на старшую степень аргумента, т.е. на x^4. В результате получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x^4+5x}{-4x^4+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{12+5/x^3}{-4+7/x^4}=\frac{-12+0}{-4+0}=-3,$$

поскольку при $x\to\infty$ функции $5/x^3$ и $7/x^4$ являются бесконечно малыми.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-8}-3}{x-1}$.

Решение. Здесь мы также имеем неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное к числителю:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+8})^2-3^2}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+8)-9}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{(\sqrt{x+8}+3)}=\frac{1}{6}.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$.

Решение. Так как $x\neq0$ под знаком предела, то

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 7x}{7x}\cdot7x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot3x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{7x}{3x}\right)\cdot\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 7x}{7x}}{\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{7}{3}.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{5x}$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{5x}=\left(1^\infty\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x-3)+4}{2x-3}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{(2x-3)\frac{5x}{2x-3}}=$$

$$=e^{4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x}{2x-3}}=e^{4\cdot\frac{5}{2}}=e^{10}.$$

Задачи №91-120:

Найти пределы (не применяя правило Лопиталя):

91. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x+1}{4-2x-9x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{tg\,2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{3x}$.

92. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+x^2+1}{3x^2+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 x}{\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+3}\right)^{2x}$.

93. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x+3}{4x^3+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos^3 2x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-5}{6x-1}\right)^{2x}$.

94. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+3x+1}{5x^2+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\cdot tg\,2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+5}\right)^{7x}$.

95 а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+11x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+2x+3}{1-4x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-1}\right)^{6x}$.

96. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-21}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x+1}{7x^3+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x+\sin 3x}{x\cdot\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+1}\right)^{2x}$.

97. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x+1}{x^2+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos^3 4x}{3x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-1}{7x+5}\right)^{4x}$.

98. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-5x-7}{3x^2+x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}}{5x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\cdot\sin 2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+2}\right)^{3x+2}$.

99. а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2+7x-15}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+2x+1}{5x^3+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\cdot tg3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-6}{x+4}\right)^{7x+4}$.

100. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{6x+1}-5}{\sqrt{x}-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+x+5}{3x^3+x^2+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 3x}{\cos x-\cos^3 x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^{2x+1}$.

101. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-3x-10}{x^2+6x-16}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+7x-5}{2x^3-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{3-x}$.

102. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+4}{2x^2-3x+5}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-7x^2+3x}{5x^2+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{3x+7}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+1}$.

103. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-5x+1}{2x^2-3x+5}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+x+1}{x^2+5-7x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-6x+8}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-7}{2x-3}\right)^{4x+1}$.

104. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+6}{3x^2-x-14}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-4x^3+2x}{x^2+7x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-4x}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x-4}\right)^{2x}$.

105. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+6}{6-x-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+x-4}{9x^2-x+7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot tg 4x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+3}\right)^{3-2x}$.

106. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-6x-7}{3x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+5x-2}{2x^4+3x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 8x}{tg 5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{4-x}$.

107. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-4}{4x-x^2-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+3x^2-5}{x^4-5x^3-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+1}$.

108. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-3x-10}{x^2+6x-16}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^4+x^3-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1}$.

109. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x}{1-2x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+11}{x+9}\right)^{6x+1}$.

110. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-7x-2}{x^2-7x+10}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^5-4x^4+2}{3x^5-2x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^2 x}{5x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+7}{2x-3}\right)^{x+4}$.

111. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{14-x-3x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+9x}{6-7x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{3-x}$.

112. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+4}{2x^2-3x+5}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-3x^2+2}{-3x^4+5x^3-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1}$.

113. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-5x+1}{2x^2-3x+5}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x-8}{1-5x^3+2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{7+x^2}-4}{x+3}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-7}{2x-3}\right)^{4x+3}$.

114. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+6}{3x^2-x-14}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-x^5-4x^4}{7x^5+3x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot tg4x}{\sin^2 6x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x-5}\right)^{7x-3}$.

115. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+6}{6-x-x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+9x^2+25}{5x^3-11}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+10}{x+7}\right)^{7x+3}$.

116. а) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{2x^2+11x-6}{3x^2+17x-6}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9-2x^3+x^2}{x^2+x^3+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot tg4x}{\sin^2 6x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+2}\right)^{3x+1}$.

117. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-3x-4}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+5x^3}{1-3x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-5}\right)^{4-3x}$.

118. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2-x-10}{x^2+3x+2}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-x^4+2}{7+9x^5-2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\cdot\cos 7x}{\sin 2x}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+6}{x+5}\right)^{5x+4}$.

119. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-5x^2+9x}{6x+4-7x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+21}-5}{x-2}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+5}\right)^{3+5x}$.

120. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-10x+3}{5x^2-16x+3}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-5x^2+2}{3x^4+8x^3-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg\, 2x}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+5}\right)^{7x+1}$.

ТЕМА 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

5.1. Основные понятия

Определение. *Производной функции* $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции к приращению независимого аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. Производная функции $y = f(x)$ обозначается через y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$.

По определению: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Определение. Операция отыскания производной заданной функции называется *дифференцированием* этой функции.

5.2. Таблица производных

По определению можно получить следующую таблицу формул дифференцирования элементарных функций:

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$, где $n \in R$;
2. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
3. $(a^x)' = a^x \ln a$;
4. $(e^x)' = e^x$;
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
7. $(\sin x)' = \cos x$;
8. $(\cos x)' = -\sin x$;
9. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
10. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$;
13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$;
14. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$;
15. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

5.3. Правила дифференцирования

Пусть C – постоянная, $u = u(x)$, $v=v(x)$ – функции, имеющие производные. Тогда:

1. Производная постоянной равна нулю, то есть

$$C' = 0.$$

2. Производная аргумента равна 1, то есть

$$x' = 1.$$

3. Производная алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна такой же сумме производных этих функций, то есть

$$(u+v)' = u' + v'.$$

4. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производного второго, то есть

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(Cu)' = Cu'.$$

Следствие 2. Производная произведения нескольких дифференцируемых функций равна сумме произведений производной каждого из сомножителей на все остальные, например:

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

5. Производная частного двух дифференцируемых функций может быть найдена по формуле

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{ где } v \neq 0.$$

5.4. Дифференцирование сложных функций

Рассмотренных формул и правил определения производных недостаточно для нахождения производных функций более сложного вида, например, таких как $y = \sqrt{\cos x}$, $y = e^{arctgx}$ и т.д.

Пусть y – есть функция от u: $y = f(u)$, где u – в свою очередь функция от аргумента x: $u=\varphi(x)$; в таком случае говорят, что y есть функция от функции, т.е. $y=f(\varphi(x))$.

Если для соответствующих друг другу значений x и u существуют производные $f'(u)$ и $u'=\varphi'(x)$, то существует и производная от y по x, причем имеет место равенство

$$y'=f'(u)\cdot u'.$$

5.5. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть функция y аргумента x задана при помощи параметрических соотношений $\begin{cases} x=\alpha(t) \\ y=\beta(t) \end{cases}$, причем $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ – дифференцируемые функции от t и $dx=\alpha'(t)dt$, $dy=\beta'(t)dt$. Тогда $y'_x=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\beta'(t)}{\alpha'(t)}$.

5.6. Дифференцирование функций, заданных неявно

Пусть функция $y=y(x)$, обладающая производной в точке x, задана неявно уравнением $F(x,y)=0$. Для нахождения производной $y'(x)$ надо продифференцировать по x обе части этого уравнения, учитывая, что y есть функция от x, и затем разрешить полученное уравнение относительно y'.

5.7. Схема полного исследования функции и построение ее графика

Для полного исследования функции и построения ее графика можно рекомендовать следующую примерную схему:

1) найти область определения функции;

2) установить наличие или отсутствие четности, нечетности, периодичности функции;

3) найти точки пересечения функции с осями координат;

3) найти промежутки монотонности функции, ее экстремумы;

4) найти промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба;

5) найти асимптоты графика функции;

6) построить график функции.

5.8. Решение типового задания

Пример 1. Найти производную от функции $y=\sqrt{x^2+3x+1}$.

Решение. Введем вспомогательную функцию $u = x^2 + 3x+1$, тогда можно записать $y=\sqrt{u}$, где $u = x^2+3x+1$.

По формуле имеем $y'=\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}\cdot\ 2x+3\ $, или, заменив u на его значение:

$$y=\frac{1}{2\sqrt{x^2+3x+1}}\cdot\ 2x+3\ =\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+1}}.$$

К такой подробной записи прибегают только на начальной стадии освоения правил дифференцирования, а обычно вспомогательную функцию вводят только мысленно и выполняют указанные действия.

Пример 2. Найти производную от функции $y=\ln\ x^3+7x-3\ $.

Решение. Мысленно за u принимаем выражение $x^3+7x–3$ и получаем

$$y'=\frac{3x^2+7}{x^3+7x-3}.$$

Пример 3. Найти производную от функции $y=\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin 4x$.

Решение. По правилу дифференцирования произведения записываем:

$$y'=\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\arcsin 4x+\sqrt{1-x^2}\ \ \arcsin 4x\ '.$$

При вычислении $\left(\sqrt{1-x^2}\right)'$ принимаем $u=1-x^2$, тогда

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot\ -2x\ =-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Таким образом,

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin 4x+\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2}.$$

Пример 4. Найти производную от функции $y=\ln arctg\ \ x^2-3\ $.

Решение. Принимаем $arctg\ \ x^2-3\ $ за вспомогательную функцию u

и получим $y' = \dfrac{\left[arctg\ \ x^2-3\ \right]^{/}}{arctg\ \ x^2-3}$.

При вычислении производной от $arctg\ \ x^2-3$ за вспомогательную функцию примем $\ x^2-3\ $:

$$\left[arctg\ \ x^2-3\ \right]' = \frac{(x^2-3)'}{1+\ \ x^2-3\ ^{2}} = \frac{2x-0}{1+x^4-6x^2+9} = \frac{2x}{x^4-6x^2+10}.$$

Подставим найденное значение в выражение для y', окончательно получим: $y' = \dfrac{2x}{x^4-6x^2+10\ \ arctg\ \ x^2-3}$.

Пример 5. Дана функция $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ dy = 2\sin^2 t + 5 \end{cases}$. Найти y'.

Решение. Дифференцируем исходные равенства по t:

$$\begin{cases} dx = -9\cos^2 t \sin t dt \\ dy = 4\sin t \cos t dt \end{cases}$$

По формуле получим $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4\sin t \cos t dt}{-9\cos^2 t \sin t dt} = -\dfrac{4}{9\cos t}$.

Пример 6. Найти производную неявно заданной функции y:

$$x^3 + y^3 = \sin(x-2y).$$

Решение. Дифференцируя обе части уравнения и учитывая, что y – есть функция от x, получим:

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' = \cos(x-2y)(1-2y') \text{ или}$$

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' = \cos(x-2y) - 2y'\cos(x-2y).$$

Отсюда находим y':

$$3y^2 \cdot y' + 2y'\cos(x-2y) = \cos(x-2y) - 3x^2$$

или

$$y'(3y^2 + 2\cos(x-2y)) = \cos(x-2y) - 3x^2,$$

т.е. $y' = \dfrac{\cos(x-2y) - 3x^2}{3y^2 + 2\cos(x-2y)}$.

Пример 7. Исследовать функцию $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ и построить ее график.

Решение. Проведем исследование по общей схеме.

1. Область определения функции: $x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

2. Для установления четности или нечетности функции проверим выполнимость равенств $f(-x) = f(x)$ (тогда $f(x)$ – четная функция) или $f(-x) = -f(x)$ (для нечетной функции) для любых x и $-x$ из области определения функции:

$$f(-x) = \frac{-2x-1}{(-x-1)^2},\ -f(x) = -\frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

Следовательно $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$ то есть данная функция не является ни четной ни нечетной. Также не является периодической.

3. Точки пересечения с осями координат: если $x = 0$, то $y = -1$; если $y = 0$, то $2x - 1 = 0$ и $x = 1/2$.

4. Промежутки монотонности функции, ее экстремумы.

Для исследования функции на экстремум найдем ее первую производную:

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - (2x-1)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{x}{(x-1)^3}.$$

$y' = 0$ при $x = 0$ и y' – не существует при $x = 1$. Тем самым имеем две критические точки: $x_1 = 0, x_2 = 1$. Но точка $x_2 = 1$ не принадлежит области определения функции, экстремума в ней быть не может.

Для наглядности результаты исследования функции представим в виде таблицы 1.

Таблица 1 – Интервалы возрастания и убывания функции, знаки производной y'

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	$(1;+\infty)$
y'	–	0	+	–
y	убывает	min	возрастает	убывает

В первом и третьем интервалах первая производная отрицательна, следовательно, здесь функция убывает, во втором интервале – положительна и данная функция возрастает. При переходе через точку x=0 первая производная меняет свой знак с минуса на плюс, поэтому в этой точке функция имеет минимум: $y_{\min} = y(0) = -1$. Значит $A(0;-1)$ – точка минимума.

5. Для определения точек перегиба графика функции и интервалов выпуклости и вогнутости кривой найдем вторую производную:

$$y'' = -\frac{(x-1)^2 - x\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{2x+1}{(x-1)^4}.$$

$y'' = 0$ при $x = -\frac{1}{2}$ и y'' – не существует при $x = 1$. Для наглядности результаты исследования функции представим в виде таблицы 2.

Таблица 2 – Интервалы выпуклости и вогнутости функции, знаки второй производной y'':

x	$\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2};1\right)$	$(1;+\infty)$
y''	$-$	0	$+$	$+$
y	$\cap$	Перегиб	$\cup$	$\cup$

На первом интервале вторая производная y'' отрицательна и дуга исследуемой кривой выпукла; на втором и третьем интервалах $y''>0$, тем самым график является вогнутым. При переходе через точку $x = -\frac{1}{2}$ y'' меняет свой знак, поэтому $x = -\frac{1}{2}$ – абсцисса точки перегиба. Следовательно, $B\left(-\frac{1}{2};-\frac{8}{9}\right)$ – точка перегиба графика функции.

6. Асимптоты графика функции. Так как $x=1$ – точка разрыва функции, причем $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-1}{(x-1)^2} = \infty$. Поэтому прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой графика. Для определения уравнения наклонной асимптоты $y = kx+b$ воспользуемся формулами: $k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right]$. Тогда

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{(x-1)^2}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2(x-1)}=0.$$

Значит прямая $y=0$ есть горизонтальная асимптота графика исследуемой функции.

7. Учитывая полученные результаты, строим график функции (рис.5):

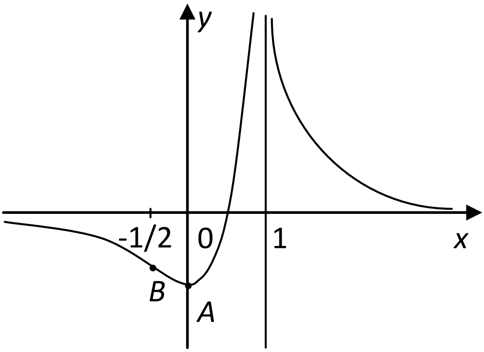


Рисунок 5 – График функции

Задачи №121-150:

Найти производные первого порядка данных функций, используя правила вычисления производных:

121. а) $y = 2x^5 - \dfrac{4}{x^3} + \dfrac{1}{x} + 3\sqrt{x}$,

б) $y = \sqrt{x} tgx$,

в) $y = \dfrac{\ln x}{4 - 3\cos x}$,

г) $\begin{cases} x = \arcsin 2t \\ y = \dfrac{1}{1 - 4t^2}. \end{cases}$

д) $y = x + arctgy$.

122. а) $y = \dfrac{3}{x} + \sqrt[5]{x^2} - 4x^3 + \dfrac{2}{x^4}$,

б) $y = \sin x \cdot \ln x$,

в) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{ctgx}$,

г) $\begin{cases} x = \ 1 - t \ ^2, \\ y = \cos \ t - 1 \ ^2. \end{cases}$

д) $x^2 - y^2 = \sin(x + y)$.

123.а) $y = 7x + \dfrac{5}{x^2} - \sqrt[3]{x^4} + \dfrac{6}{x}$,

б) $y = e^x \arcsin x$,

в) $y = \dfrac{ctgx}{x^4}$,

г) $\begin{cases} x = \ t - 1 \ ^2, \\ y = \sin \ t - 1 \ ^2. \end{cases}$

д) $\sqrt{xy} = e^y$.

124. а) $y = 3x^5 - \dfrac{3}{x} - \sqrt{x^3} + \dfrac{10}{x^5}$,

б) $y = \sqrt[3]{x^2} \ln x$,

в) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{e^x}$,

г) $\begin{cases} x = tgt^2, \\ y = t^2 - 5. \end{cases}$

д) $x^3 - y^3 - \sin(xy) = 0$.

125. а) $y = 8x^2 - \dfrac{4}{x} + \sqrt[3]{x^4} - \dfrac{2}{x^3}$,

б) $y = x^5 \cdot e^x$;

126.а) $y = 3x^2 - \dfrac{7}{x} + 2\sqrt{x^3} - \dfrac{2}{x^5}$,

б) $y = \cos x \cdot \ 3x - 1 \$,

в) $y=\dfrac{tgx}{\ln x}$;

г) $\begin{cases} x=7+t^2, \\ y=ctg3t^2. \end{cases}$

д) $2^x+2^y=x+y$.

в) $y=\dfrac{3x^5}{e^x}$,

г) $\begin{cases} x=\ln\ 1-t^4\ \ , \\ y=\arccos t^2. \end{cases}$

д) $\sin x+\sin y=x+y$.

127. а) $y=5x^3-\dfrac{7}{x^2}+4\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$,

б) $y=\sin x\cdot\sqrt[4]{x}$,

в) $y=\dfrac{\ln x}{\arcsin x}$,

г) $\begin{cases} x=\dfrac{3}{1+t^2}, \\ y=arcctgt. \end{cases}$

д) $\dfrac{x}{y}=ctgxy$.

128. а) $y=\dfrac{4}{x^5}-\dfrac{9}{x}+\sqrt[3]{x^2}-7x^3$,

б) $y=e^x\cdot\arccos x$,

в) $y=\dfrac{ctgx}{2x^4}$,

г) $\begin{cases} x=arctg\ \ 1+t\ \ ^2, \\ y=\sqrt{t^2+2t+2}. \end{cases}$

д) $\sqrt{x+y}=y^3$.

129. а) $y=5x^2+\dfrac{4}{x}-\sqrt[3]{x^7}-2x^6$,

б) $y=\ln x\cdot arctgx$,

в) $y=\dfrac{e^x}{\arcsin x}$,

г) $y=\begin{cases} x=\sin^2\ 1-4t\ \ , \\ \cos^2\ 1-4t\ \ . \end{cases}$

д) $e^{x+y}=\dfrac{x}{y}$.

130. а) $y=\sqrt{x^5}-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^3}-3x^3$,

б) $y=e^x\cdot ctgx$,

в) $y=\dfrac{5\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}$,

г) $\begin{cases} x=3e^{-t}, \\ y=\ \ 2+e^{-t}\ \ ^3. \end{cases}$

д) $y\sin x-\cos(x-y)=0$.

131. а) $y=3\sqrt{x}+\dfrac{4}{x^5}+\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{7}{x}$,

б) $y=(1+x^2)arctgx$,

в) $y=\dfrac{\sin^2 x}{x\cos x}$,

г) $\begin{cases} x=arctgt^2, \\ y=\ln\ \ 1+t^4\ \ . \end{cases}$

д) $arctg\,(x-y)=x^2-y^2$.

132. а) $y=\dfrac{4}{x}-\sqrt[3]{x^7}-2x^6+\dfrac{7}{x^5}$,

б) $y=ctg4x\cdot\sqrt[3]{x}$,

в) $y=\dfrac{\arcsin^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$,

г) $\begin{cases} x=\arccos t, \\ y=\sqrt{\ 1-t^2\ \ ^3}\,. \end{cases}$

д) $(x+y)^2+2\ln(xy)=4.$

133. а) $y=8x-\dfrac{5}{x^4}+\dfrac{1}{x}-\sqrt[5]{x^4}$,

б) $y=2^{ctg^2x}(5x^3+\sqrt[3]{x})$,

в) $y=\dfrac{8tg3x}{1+e^{\frac{x}{4}}}$,

г) $\begin{cases} x=\ln\ \ 5-2t\ \ , \\ y=arctg\ \ 5-2t\ \ . \end{cases}$

д) $y^2=x^2y-x.$

134. а) $y=3x^4+\sqrt[3]{x^5}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^2}$,

б) $y=e^{-2x}arctgx$,

в) $y=\dfrac{\lg(x+2)}{\sin 2x^2}$,

г) $\begin{cases} x=te^{-4t}, \\ y=\ \ 1-4t\ \ ^2. \end{cases}$

д) $x=arctg(2x+y)$.

135. а) $y=7\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^5}-3x^2+\dfrac{4}{x}$,

б) $y=(x^7-1)(e^x+\cos x)$,

в) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{3x^2+2}$,

136. а) $y=5x^2-\sqrt[3]{x^4}+\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{5}{x}$,

б) $y=\cos 2x\cdot\sin^2 2x$,

в) $y=\dfrac{4x-tg4x}{x^2}$;

г) $\begin{cases} x = ctg\ \ 1-2t\ \ , \\ y = \dfrac{1}{\cos^2\ \ 1-2t}. \end{cases}$

д) $xy - \sin(x+y) = 0.$

г) $\begin{cases} x = \sin^3\ \ t-4\ \ , \\ y = \cos^3\ \ t-4\ \ . \end{cases}$

д) $arctg\,\dfrac{x}{y} = x - y.$

137. а) $y = \sqrt[3]{x^7} + \dfrac{3}{x} - 4x^6 + \dfrac{4}{x^5},$

б) $y = ctg3x \cdot \arccos 3x^2,$

в) $y = \dfrac{e^{5x}}{3x^2 - 4x + 2},$

г) $\begin{cases} x = \cos^3\ \ 2t+6\ \ , \\ y = \sin^3\ \ 2t+6\ \ . \end{cases}$

д) $y\sin x + x\sin y = 0.$

138. а) $y = 4x^6 + \dfrac{5}{x} - \sqrt[3]{x^7} - \dfrac{7}{x^4},$

б) $y = e^{-x} \cdot \cos 3x,$

в) $y = \dfrac{\ln(x+1)}{\cos 3x},$

г) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sin^2\ \ 2-t}, \\ y = tg\ \ 2-1\ \ . \end{cases}$

д) $tg\,\dfrac{x}{y} + x = y.$

139. а) $y = 4x^3 - \dfrac{3}{x} - \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{6}{x^2},$

б) $y = e^{-2x} \cdot \cos 3x,$

в) $y = \dfrac{\log_2(7x-5)}{tg\sqrt{x}},$

г) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sin^2\ \ 2-t}, \\ y = tg\ \ 2-1\ \ . \end{cases}$

д) $tg\,\dfrac{x}{y} + x = y.$

140. а) $y = \dfrac{9}{x^3} + \sqrt[3]{x^4} - \dfrac{2}{x} + 5x^4,$

б) $y = x \cdot e^{-x^3},$

в) $y = \dfrac{e^{4x}}{(x+5)^3},$

г) $\begin{cases} x = \sqrt{\ 1-t^2\ \ ^3}, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$

д) $ytgx + \sqrt{y} = 3.$

141. а) $y=\frac{8}{x^3}+\frac{3}{x}-4\sqrt{x^3}+2x^7$,

б) $y=e^x\cdot\arcsin 3x$,

в) $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$,

г) $\begin{cases}x=\sin^3(t-4),\\ y=\cos^3(t-4),\end{cases}$

д) $\ln y-\frac{y}{x}=7$.

142. а) $y=x^2-3\sqrt{x^5}-\frac{4}{x}-\frac{5}{x^4}$,

б) $y=\arccos 4x\cdot\ln x$,

в) $y=\frac{tg3x}{x^2+2x}$,

г) $\begin{cases}x=te^{-5t},\\ y=(5t-1)^2,\end{cases}$

д) $e^{xy}=4x-7y$.

143. а) $y=9x^3+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^4}+\sqrt[3]{x^7}$,

б) $y=e^{2x}\cdot arcctg\frac{2x}{5}$,

в) $y=\frac{x^3-3x^2}{\log_5 x}$,

г) $\begin{cases}x=\cos^3(2t+6),\\ y=\sin^3(2t+6),\end{cases}$

д) $e^{x\sin y}-e^y\cos x=0$.

144. а) $y=\sqrt{x^3}+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^5}-5x^3$,

б) $y=\ln x\cdot(2-\cos^2 x)$,

в) $y=\frac{4\ln x}{1-\ln x}$;

г) $\begin{cases}x=\frac{1}{\sin^2(2-t)},\\ y=tg(2-t),\end{cases}$

д) $x\arccos\frac{x}{y}=x^y$.

145. а) $y=8x^3-\frac{4}{x}-\frac{7}{x^4}-\sqrt[7]{x^2}$,

б) $y=\cos 3x\cdot\sin e^{4x}$,

146. а) $y=3x^5-\frac{4}{x^3}+\sqrt[2]{x^3}+\frac{2}{x}$,

б) $y=\sqrt{x}\cdot tgx$,

в) $y=\dfrac{\lg(x+2)}{\sin 2x^2}$,

г) $\begin{cases} x=\sqrt{(1-t^2)^3}, \\ y=\arcsin t, \end{cases}$

д) $\sin^3(xy)+\ln(x^2+y^2)=0$.

в) $y=\dfrac{\ln x}{4-3\cos x}$,

г) $\begin{cases} x=\arcsin 2t, \\ y=\dfrac{1}{1-4t^2}, \end{cases}$

д) $e^{xy}=x^2y^2-\sin xy$.

147. а) $y=\sqrt[4]{x^3}-6x^4+\dfrac{2}{x^4}-\dfrac{1}{x}$,

б) $y=(1+x^2)arctgx$,

в) $y=\dfrac{\sin^2 x}{x\cos x}$,

г) $\begin{cases} x=\arcsin(\sin t), \\ y=\arccos(\cos t), \end{cases}$

д) $2x+y+e^{xy}=2$.

148. а) $y=\dfrac{4}{x}-\sqrt[3]{x^7}-2x^6+\dfrac{2}{x^3}$,

б) $y=ctg4x\cdot\sqrt[3]{x}$,

в) $y=\dfrac{\arcsin^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$,

г) $\begin{cases} x=\cos\ln t, \\ y=\sin^2 t, \end{cases}$

д) $xy=arctg(x^2-y^2)$.

149. а) $y=\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{2}{x}+5x^4+\dfrac{5}{x^3}$,

б) $y=2^{ctg2x}(5x^3+\sqrt[3]{x})$,

в) $y=\dfrac{8tg3x}{1+e^{4x}}$,

г) $\begin{cases} x=\ln tgt, \\ y=\dfrac{1}{\sin^2 t}, \end{cases}$

д) $y^2=x+\ln xy$.

150. а) $y=\sqrt[5]{x^3}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{5}{x}+8x^5$,

б) $y=e^{-2x}arctge^{3x}$,

в) $y=\dfrac{\lg(x+2)}{\sin 2x}$,

г) $\begin{cases} x=\arccos 2t, \\ y=(5t^2+3)+\arcsin 3t. \end{cases}$

д) $\sin y=xy^2+5$.

Задачи №151-180:

Построить график функции $y = f(x)$, используя общую схему исследования.

151. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$

152. $y = (2 - x)(x + 1)^2$

153. $y = \frac{1}{18}(x^3 - 9x^2)$

154. $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

155. $y = (x - 6)(x - 3)^2$

156. $y = 0{,}25(x^3 - 3x^2 - 9x + 27)$

157. $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 8$

158. $y = (1 - x)(x + 2)^2$

159. $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 5$

160. $y = x^3 - 3x^2 - 24x - 28$

161. $y = (x + 4)(x - 2)^2$

162. $y = \frac{1}{18}(-x^3 - 9x^2)$

163. $y = x^3 + 12x^2 + 45x + 50$

164. $y = (x + 2)(x - 1)^2$

165. $y = x^3 - 4{,}5x^2 + 6x - 2$

166. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

167. $y = -(x + 1)(x - 2)^2$

168. $y = \frac{1}{8}(-x^3 - 3x^2 + 9x + 27)$

169. $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

170. $y = (x + 5)(x + 2)^2$

171. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 4$

172. $y = x^3 - 6x^2 - 15x - 8$

173. $y = -(x + 2)(x - 1)^2$

174. $y = \frac{1}{8}(x^3 - 6x^2)$

175. $y = x^3 + 3x^2 - 24x + 28$

176. $y = (5 - x)(x - 2)^2$

177. $y = \frac{1}{4}(x^3 + 3x^2 - 9x - 27)$

178. $y = x^3 - 12x^2 + 45x - 50$

179. $y = (x - 4)(x + 2)^2$

180. $y = 0{,}25(x^3 + 6x^2)$

ТЕМА 6. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

6.1. Неопределенный интеграл. Основные понятия

Определение. *Неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ называется выражение вида $\int f(x)dx = F(x)+C,$ если $F'(x) = f(x)$. Функция $F(x)$ называется первообразной для заданной функции $f(x)$.

Например, если $f(x) = 3x^2$, то $F(x) = x^3$.

6.2. Свойства неопределенного интеграла

1) $(\int f(x)dx)' = f(x).$

2) $d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$

3) $\int df(x) = f(x)+C.$

4) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$, где $A \neq 0.$

5) $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$

6.3. Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C,$ где $n \neq -1,$ ($\int dx = x+C$).

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|+C.$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C.$

4. $\int e^x dx = e^x+C.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x+C.$

6. $\int \cos x dx = \sin x+C.$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx+C.$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx+C.$

9. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C.$

10. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C.$

12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arcctgx + C.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

14. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C.$

15. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C.$

6.4. Методы интегрирования

При интегрировании наиболее часто используются следующие методы.

1) Если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ то

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C; \qquad \int f(x+b)dx = F(x+b) + C,$$

где a и b–некоторые постоянные.

2) Подведение под знак дифференциала:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)),$$

так как $\varphi'(x)dx = d\varphi(x).$

3) Формула интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Обычно выражение dv выбирается так, чтобы его интегрирование не вызывало особых затруднений. За u, как правило, принимается такая функция, дифференцирование которой приводит к ее упрощению. К классам функций, интегрируемых по частям, относятся, в частности, функции вида

$P(x)e^{ax}$, $P(x)\sin ax$, $P(x)\cos ax$, $P(x)\ln x$, $P(x)\arcsin x$, $P(x)arctgx$, где $P(x)$ – многочлен от x.

4) Интегрирование рациональных дробей, т.е. отношений двух многочленов $P_k(x)$ и $Q_n(x)$ (соответственно $k-$й и $n-$й степени): $R(x)=P_k(x)/Q_n(x)$, сводится к разложению подынтегральной функции $R(x)$ на элементарные, всегда интегрируемые дроби вида:

$$\frac{A}{(x-a)^l},\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},$$

где l и m –целые положительные числа, а трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней. При этом в случае неправильной дроби ($k\geq n$) должна быть предварительно выделена целая часть.

5) ***Интегрирование методом замены переменной*** (способом подстановки) является одним из эффективных приемов интегрирования. Его сущность состоит в переходе от переменной x к новой переменой *t:* $x=\varphi(t)$. Наиболее целесообразная для данного интеграла замена переменной, т.е. выбор функции $\varphi(t)$, не всегда очевидна. Однако для некоторых часто встречающихся классов функций можно указать такие стандартные подстановки:

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{ax+b}}\right)dx,\quad \sqrt[n]{\frac{ax+b}{ax+b}}=t;\qquad \int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx,\quad x=atgt;$$

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,\quad x=a\sin t;\qquad \int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx,\quad x=\frac{a}{\sin t},$$

где *R*– символ рациональной функции.

6.5. ***Формула Ньютона-Лейбница*** для вычисления определенного интеграла имеет вид:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

если $F'(x)=f(x)$ и первообразная $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$.

Определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$ и частью графика функции $y=f(x)$, взятой со знаком плюс, если $f(x)\geq 0$, и со знаком минус, если $f\ \ x\ \le 0$.

6.6. Решение типового задания

Пример 1. Найти $\int\frac{dx}{(x-3)^2}$.

Решение. Так как $\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C$, то получим

$$\int\frac{dx}{(2x-3)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d\ \ 2x}{2x-3\ \ ^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d\ \ 2x-3}{2x-3\ \ ^2}=-\frac{1}{2\ \ 2x-3}+C.$$

Проверка:

$$\left(-\frac{1}{2\ \ 2x-3}+C\right)'=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x-3}\right)'=-\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{2x-3\ \ ^2}=\frac{1}{(2x-3)^2}.$$

Пример 2. Найти $\int\cos xe^{\sin x}dx$.

Решение. Так как $\cos xdx=d(\sin x)$, то подведя под знак дифференциала, находим

$$\int\cos xe^{\sin x}dx=\int e^{\sin x}d\ \ \sin x\ \ =e^{\sin x}+C.$$

Пример 3. Найти $\int x\cos 2xdx$.

Решение. Применим метод интегрирования по частям. Положим $u=x$, $dv=\cos 2xdx;$ тогда $du=dx, v=\frac{1}{2}\sin 2x$. Используя формулу интегрирования по частям, имеем

$$\int x\cos 2xdx=\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2xdx=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C\ .$$

Пример 4. Найти $\int\frac{3x^2-7x+10}{x^2+4\ \ \ x-2}dx$.

Решение. Подынтегральная рациональная дробь является правильной и разлагается на элементарные дроби вида:

$$\frac{3x^2-7x+10}{x^2+4 \quad x-2}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{C}{x-2}.$$

Освобождаясь от знаменателей в обеих частях этого равенства и приравнивая числители, получаем тождество для вычисления неопределенных коэффициентов A, B, C :

$$3x^2-7x+10=Ax \;\; x-2 \;\; +B \;\; x-2 \;\; +Cx^2+4C.$$

Составим систему трех уравнений с тремя неизвестными. Одно уравнение получим, полагая x=2 (корень знаменателя подынтегральной функции). Два других получим, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества, например x^2 и x^0 при:

$x=2$: $\quad 8=4C+4C,$

x^2 : $\quad 3=A+C,$

x^0 : $\quad 10=-2B+4C$

Решение этой системы дает: $A=2, B=-3, C=1$. Таким образом,

$$\int\frac{3x^2-7x+10}{x^2+4 \quad x-2}dx=\int\left(\frac{2x-3}{x^2+4}+\frac{1}{x-2}\right)dx=$$

$$=\int\frac{2xdx}{x^2+4}-3\int\frac{dx}{x^2+4}+\int\frac{dx}{x-2}=\ln \;\; x^2+4 \;\; -\frac{3}{2}arctg\frac{x}{2}+\ln|x-2|+C$$

.

Пример 5. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_4^9\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}dx$.

Решение. Применим метод замены переменной; положим $\sqrt{x}=t$, откуда $dx=2tdt$. Найдем пределы интегрирования по переменой t: при $x=4$ имеем $t=2$, а при $x=9$ имеем $t=3$. Переходя в исходном интеграле к новой переменной t и применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int\limits_4^9\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}dx=\int\limits_2^3\frac{t-1}{t+1}2tdt= \;\; t^2-4t+4\ln|t+1| \;\; \Big|_2^3=$$

$$= \;\; 9-12+4\ln 4 \;\; - \;\; 4-8+4\ln 3 \;\; =2{,}15.$$

Задачи 181-210:

Вычислите неопределенные интегралы:

181. а) $\int\frac{xdx}{7+x^2}$ б) $\int\frac{(x+18)dx}{x^2-4x-12}$ в) $\int(3-x)\cos xdx$

182. а) $\int\frac{dx}{5x\cdot\ln^3 x}$ б) $\int\frac{(x+4)dx}{x^2-2x-8}$ в) $\int x\ln(1-3x)dx$

183. а) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2-5x)^4}}$ б) $\int\frac{(x+6)dx}{x^2+x-20}$ в) $\int xe^{-7x}dx$

184. а) $\int\frac{x^2dx}{(2x^3+3)^8}$ б) $\int\frac{(x+12)dx}{x^2-x-6}$ в) $\int arctg4xdx$

185. а) $\int\sin(2-3x)dx$ б) $\int\frac{(x+19)dx}{x^2-2x-15}$ в) $\int(5-x)\ln xdx$

186. а) $\int 3xe^{x^2}dx$ б) $\int\frac{(5x+6)dx}{x^2+4x-12}$ в) $\int x\sin 5xdx$

187. а) $\int\frac{dx}{x(\ln^2 x-4)}$ б) $\int\frac{(5x-7)dx}{x^2-x-20}$ в) $\int(2x+5)\sin xdx$

188. а) $\int\cos^4 x\cdot\sin xdx$ б) $\int\frac{5xdx}{x^2+x-6}$ в) $\int\frac{\ln xdx}{\sqrt{x}}$

189. а) $\int x(1+x^2)^{12}dx$ б) $\int\frac{(5x+2)dx}{x^2+2x-8}$ в) $\int\arcsin\frac{x}{3}dx$

190. а) $\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{\cos^2 x+3}}$ б) $\int\frac{(5x+1)dx}{x^2+2x-15}$ в) $\int xe^{3x}dx$

191. а) $\int\frac{e^x dx}{\sqrt[3]{1-e^x}}$ б) $\int\frac{(x-4)dx}{x^2+2x-3}$ в) $\int(6x-2)\ln xdx$

192. а) $\int x\sqrt{3-x^2}dx$ б) $\int\frac{(2x+9)dx}{x^2+5x+6}$ в) $\int x\cos 2xdx$

193. а) $\int\frac{arctg^3 xdx}{1+x^2}$ б) $\int\frac{(x+9)dx}{x^2+2x-3}$ в) $\int(2x-1)e^x dx$

194. а) $\int \sin^3 x \cdot \cos^5 x dx$ б) $\int \frac{(2x+27)dx}{x^2 - x - 12}$ в) $\int x \arcsin x dx$

195. а) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-\cos x}}$ б) $\int \frac{(6x+1)dx}{x^2 - 3x - 4}$ в) $\int (2 - x) \sin x dx$

196. а) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x} dx}{x}$ б) $\int \frac{(11x-2)dx}{x^2 + x - 2}$ в) $\int (x+5) \ln x dx$

197. а) $\int \frac{\sqrt{1 - tgx}}{\cos^2 x} dx$ б) $\int \frac{(17-2x)dx}{x^2 - 5x + 4}$ в) $\int (3x + 4) \cos x dx$

198. а) $\int \frac{x^2 dx}{9 + x^3}$ б) $\int \frac{(9-2x)dx}{x^2 - 5x + 6}$ в) $\int arcctg 4x dx$

199. а) $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 5}$ б) $\int \frac{(3x+2)dx}{x^2 - 2x - 8}$ в) $\int (2x - 7) \ln x dx$

200. а) $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2 x^3}$ б) $\int \frac{(x-3)dx}{x^2 + 6x + 8}$ в) $\int (x+3) \sin 3x dx$

201. а) $\int x^2 (2x^3 - 4)^{10} dx$ б) $\int \frac{(4x+5)dx}{x^2 + x - 12}$ в) $\int \arcsin 2x dx$

202. а) $\int \sin^5 x \cdot \cos x dx$ б) $\int \frac{(7x-2)dx}{x^2 + 7x + 10}$ в) $\int \arccos x dx$

203. а) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 \sin x + 3}}$ б) $\int \frac{(5-3x)dx}{x^2 + 8x + 7}$ в) $\int \sqrt{x} \ln x dx$

204. а) $\int e^{-x^3} \cdot x^2 dx$ б) $\int \frac{(4x+3)dx}{x^2 + 8x + 15}$ в) $\int x e^{-5x} dx$

205. а) $\int \frac{dx}{x(1 + \ln x)^5}$ б) $\int \frac{(4x-7)dx}{x^2 - 8x + 12}$ в) $\int x arctg x dx$

206. а) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \sqrt[4]{ctgx}}$ б) $\int \frac{(3-2x)dx}{x^2 + 3x - 4}$ в) $\int (x+4) \cos 3x dx$

207. а) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ б) $\int \frac{(5x+4)dx}{x^2+4x+3}$ в) $\int (3x^2+2)\ln 5x dx$

208. а) $\int \frac{\cos 3x dx}{\sqrt[3]{3+\sin 3x}}$ б) $\int \frac{(2x-1)dx}{x^2+8x-9}$ в) $\int \arccos x dx$

209. а) $\int \frac{x^2 dx}{(2-x^3)^4}$ б) $\int \frac{(3+2x)dx}{x^2-6x+8}$ в) $\int (2-3x)\sin x dx$

210. а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{3-tgx}}$ б) $\int \frac{(5-7x)dx}{x^2+6x+5}$ в) $\int (x+9)\cos 7x dx$

Задачи 211-240:

Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями: Сделать чертеж и заштриховать искомую площадь.

211. $y=2(x-1)^2,$ $y=2x+2.$

212. $y=2(x+3)^2,$ $y=2x+10.$

213. $y=-x^2-4x-3,$ $y=2x+10.$

214. $y=x^2,$ $y=2-x.$

215. $y=x^2-4x+3,$ $y=3-x.$

216. $y=(x-3)^2,$ $y=x+3.$

217. $y=x^2-4x,$ $y=x.$

218. $y=x^2+1,$ $y=3-x.$

219. $y=x^2-5x+4,$ $y=2x-2.$

220. $y=(x-3)^2,$ $y=9-x.$

221. $y=x^2+1,$ $y=-4x-2.$

222. $y=x^2-x,$ $y=3x-3.$

223. $\begin{cases} y = x^2 - 1, \\ y = 1 - x. \end{cases}$

224. $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3, \\ y = -4x - 3. \end{cases}$

225. $\begin{cases} y = -x^2 + 5x - 6, \\ y = 4x - 6. \end{cases}$

226. $\begin{cases} y = x^2 + 5x + 4, \\ y = 3x + 7. \end{cases}$

227. $\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = 1 - 2x. \end{cases}$

228. $\begin{cases} y = x^2 + x, \\ y = 3 - x. \end{cases}$

229. $\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = 4 - 5x. \end{cases}$

230. $\begin{cases} y = 1 - x^2, \\ y = 4 - 4x. \end{cases}$

231. $\begin{cases} y = 2x^2 - 2x + 1, \\ y = 2x + 1. \end{cases}$

232. $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3, \\ y = -2x + 3. \end{cases}$

233. $\begin{cases} y = (x - 1)^2, \\ y = -4x + 9. \end{cases}$

234. $\begin{cases} y = x^2 + 4x + 5, \\ y = -x - 1. \end{cases}$

235. $\begin{cases} y = 6x - x^2, \\ y = x + 4. \end{cases}$

236. $\begin{cases} y = -x^2 + x + 4, \\ y = -x + 1. \end{cases}$

237. $\begin{cases} y = -0{,}5x^2 + 2x + 6, \\ y = x + 2. \end{cases}$

238. $\begin{cases} y = (x + 1)^2, \\ y = 3x + 7. \end{cases}$

239. $\begin{cases} y = (x + 2)^2, \\ y = x + 8. \end{cases}$

240. $\begin{cases} y = 4x - x^2, \\ y = 4 - x. \end{cases}$

ТЕМА 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

7.1. Функция нескольких переменных. Основные понятия

Определение. Пусть даны два непустых множества *D* и *U*. Если каждой паре действительных чисел (*x*; *y*), принадлежащей множеству *D*, по определенному правилу ставится в соответствии один и только один элемент *u* из *U*, то говорят, что на множестве *D* задана ***функция*** *f* (или ***отображение***) со множеством значений *U*. При этом пишут $D \xrightarrow{f} U$, или $f : D \to U$, или $u = f(x, y)$. Множество *D* называется областью определения функции, а множество *U*, состоящее из всех чисел вида $f(x, y)$, где $(x; y) \in D$, – ***множеством значений*** функции. Значение функции $u = f(x, y)$ в точке $M(x_0; y_0)$ называется ***частным значением функции*** и обозначается $f(x_0; y_0)$ или $f\;\;M$.

7.2. Частные производные первого порядка

Частной производной от функции $z = f\;\;x, y$ по независимой переменной x называется конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\;\;x + \Delta x, y\;\; - f\;\;x, y}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x'\;\;x, y\;\;,$$

вычисленный при постоянном y.

Частной производной по y называется конечный предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\;\;x, y + \Delta y\;\; - f\;\;x, y}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f_y'\;\;x, y\;\;,$$

вычисленный при постоянном x.

Для частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования.

7.3. Полный дифференциал

Полным приращением функции $z = f\;\;x, y$ в точке $M(x; y)$ называется разность $\Delta z = f\;\;x + \Delta x, y + \Delta y\;\; - f\;\;x, y$, где Δx и Δy – произвольные приращения аргументов.

Функция $z = f\;\;x, y$ называется дифференцируемой в точке (x, y), если в этой точке полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + 0\ \ \rho\ \ , \text{ где } \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\ .$$

Полным дифференциалом функции $z = f\ \ x, y$ называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy, т.е. $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т.е. $dz = \Delta x$ и $dy = \Delta y$.

Полный дифференциал функции $z = f\ \ x, y$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\ .$$

Аналогично, полный дифференциал функции трех аргументов $u = f\ \ x, y, z$ вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\ .$$

При достаточно малом $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ для дифференцируемой функции $z = f\ \ x, y$ справедливы приближенные равенства

$$\Delta z \approx dz; \qquad f\ \ x + \Delta x, y + \Delta y\ \ \approx f\ \ x, y\ \ + dz\ .$$

7.4. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Частными производными второго порядка от функции $z = f\ \ x, y$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка .

Обозначение частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}\ \ x, y\ \ ; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}\ \ x, y\ \ ;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}\ \ x, y\ \ ; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}\ \ x, y\ \ .$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьих и высших порядков, например:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=f'''_{xxx}(x,y);\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=f'''_{xxy}(x,y) \text{ и т.д.}$$

Так называемые «смешанные» производные, отличающиеся друг от друга лишь последовательностью дифференцирования, равны между собой, если они непрерывны, например:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

Дифференциалом второго порядка от функции $z=f(x,y)$ называется дифференциал от ее полного дифференциала, т.е. $d^2z=d(dz)$.

Аналогично определяются дифференциалы третьего и высших порядков: $d^3z=d(d^2z)$; вообще $d^n z=d(d^{n-1}z)$.

Если x и y – независимые переменные и функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные, то дифференциалы высших порядков вычисляются по формулам:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2;$$

$$d^3z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

7.5. Дифференцирование неявных функций

Производная неявной функции $y=y(x)$, заданной с помощью уравнения $F(x,y)=0$, где $F(x,y)$ – дифференцируемая функция переменных x и y, может быть вычислена по формуле

$$y'=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} \text{ при условии } \frac{\partial F}{\partial y}\neq 0.$$

Производные высших порядков неявной функции можно найти последовательным дифференцированием указанной формулы, рассматривая при этом y как функцию от x.

Аналогично, частные производные неявной функции двух переменных $z=\varphi(x,y)$, заданной с помощью уравнения $F(x,y,z)=0$, где $F(x,y,z)$ – дифференцируемая функция переменных x,y и z, могут быть вычислены по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} \text{ при условии } \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$$

7.6. Экстремум функции

Функция $z = f(x, y)$ имеет ***максимум*** (***минимум***) в точке $M_0(x_0; y_0)$, если значение функции в этой точке больше (меньше), чем ее значение в любой другой точке $M(x; y)$ некоторой окрестности точки M_0, т.е. $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ [соответственно $f(x_0, y_0) < f(x, y)$] для всех точек $M(x; y)$, удовлетворяющих условию $|M_oM| < \delta$, где δ – достаточно малое положительное число.

Максимум или минимум функции называется ее ***экстремумом***. Точка M_0, в которой функция имеет экстремум, называется ***точкой экстремума***.

Если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0; y_0)$, то ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю, т.е.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

(***необходимые условия экстремума***).

Точки, в которых частные производные равны нулю, называются ***стационарными точками***. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Пусть $M_0(x_0; y_0)$ – стационарная точка функции $z = f(x, y)$. Обозначим

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \ B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \ C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$

и составим ***дискриминант*** $\Delta = AC - B^2$. Тогда:

а) если $\Delta > 0$, то функция имеет в точке M_0 экстремум, а именно максимум при $A < 0$ (*или* $C < 0$) и минимум при $A > 0$ (*или* $C > 0$);

б) если $\Delta < 0$, то в точке M_0 экстремума нет (достаточные условия наличия или отсутствия экстремума);

в) если $\Delta = 0,$ то требуется дальнейшее исследование (сомнительный случай).

7.7. Решение типового задания

Пример 1. Дана функция $z = e^{x^z + y^2}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2} \left(x^2 + y^2\right)'_x = 2xe^{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2} \left(x^2 + y^2\right)'_y = 2ye^{x^2+y^2}.$$

Пример 2. Дана функция $z = arctg\,\dfrac{x+y}{x-y}$. Найти dz.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{-2y}{\left(x-y\right)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{2x}{\left(x-y\right)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Следовательно, $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}.$

Пример 3. Вычислить приближенно $\sqrt{\sin^2 1{,}55 + 8e^{0{,}015}}$, исходя из значения функции $z = \sqrt{\sin^2 x + 8e^y}$ при $x = \pi/2 \approx 1{,}571,\ y = 0.$

Решение. Искомое число есть наращенное значение функции z при $\Delta x = 0{,}021,\ \ \Delta y = 0{,}015.$ Найдем значение z при $x = \pi/2,\ y = 0;$ имеем

$$z = \sqrt{\sin^2\left(\pi/2\right) + 8e^0} = 3.$$

Находим приращение функции:

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = \frac{\sin 2x\Delta x + 8e^y\Delta y}{2\sqrt{\sin^2 x + 8e^y}} = \frac{8 \cdot 0{,}015}{6} = 0{,}02.$$

Следовательно, $\sqrt{\sin^2 1{,}55 + 8e^{0{,}015}} \approx 3{,}02.$

Пример 4. Вычислить приближенно $arctg\left(1{,}02/0{,}95\right)$, исходя из значения функции $z = arctg\left(y/x\right)$ при $x = 1,\ y = 1$.

Решение. Значение функции z при x=1, y=1 есть $z = arctg\left(1/1\right) = \pi/4 \approx 0{,}785.$

Найдем приращение функции Δz при $\Delta x = -0{,}05,\ \Delta y = 0{,}02$:

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = -\frac{y\Delta x}{x^2+y^2} + \frac{x\Delta y}{x^2+y^2} = \frac{x\Delta y - y\Delta x}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{1\cdot 0{,}02 + 1\cdot 0{,}05}{2} = 0{,}035.$$

Следовательно, $arctg\left(1{,}02/0{,}95\right) = z + \Delta z \approx 0{,}785 + 0{,}035 = 0{,}82.$

Пример 5. $\cos\left(x+y\right) + y = 0.$ Найти y'.

Решение. Здесь $F\left(x,y\right) = \cos\left(x+y\right) + y.$

Найдем $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -\sin\left(x+y\right)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -\sin\left(x+y\right) + 1.$

Следовательно,

$$y' = -\frac{-\sin\left(x+y\right)}{1-\sin\left(x+y\right)} = \frac{\sin\left(x+y\right)}{1-\sin\left(x+y\right)}.$$

Пример 6. $z^3 - 3xyz = a^3.$ Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}.$

Решение. Здесь $F\left(x,y,z\right) = z^3 - 3xyz - a^3.$

Находим $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -3yz,\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = -3xz,\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy.$

Тогда $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{-3yz}{3z^2-3xy} = \dfrac{yz}{z^2-xy};\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{-3xz}{3z^2-3xy} = \dfrac{xz}{z^2-xy}.$

Пример 7. Найти экстремум функции $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$

Решение. Находим частные производные первого порядка: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6.$ Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума, находим стационарные точки:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + 2y - 6 = 0, \end{cases} \text{откуда } x = 0,\ y = 3;\ M\left(0;3\right).$$

Находим значения частных производных второго порядка в точке M:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=1$$

и составляем дискриминант $\Delta = AC - B^2 = 2\cdot 2 - 1 = 3 > 0;\ A > 0$. Следовательно, в точке $M\ \ 0;3$ заданная функция имеет минимум. Значение функции в этой точке $z_{\min} = -9$.

Пример 8. Найти экстремум функции

$$z=\frac{1}{2}xy+\ \ 47-x-y\ \ \left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right).$$

Решение. Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{12}y-\frac{2}{3}x+\frac{47}{3},\ \ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{2}y-\frac{1}{12}x+\frac{47}{4}.$$

Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума, находим стационарные точки:

$$\begin{cases} -\frac{1}{12}y-\frac{2}{3}x+\frac{47}{3}=0, \\ -\frac{1}{2}y-\frac{1}{12}x+\frac{47}{4}=0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 8x+y=188, \\ x+6y=141. \end{cases}$$

Отсюда $x = 21$, $y = 20$; стационарная точка $M\ \ 21;20$.

Найдем значения вторых производных в точке M:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{3},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-\frac{1}{12}.$$

Тогда $\Delta = AC - B^2 = \ -2/3\ \ -1/2\ -\ \ -1/12\ ^2 = 1/3 - 1/144 > 0$.

Так как A<0, то в точке $M\ \ 21;20$. функция имеет максимум: $z_{\max} = 282$.

Задачи № 241-270:

Найти частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

241. $z = \ln(16x - x^2 - 4y^2)$

242. $z = 2\ln x - \ln(2x - y^2 - 1)$

243. $z = \ln(x^2 + 4y^2 - 4) - \ln x$

244. $z = x + 2\sqrt{45 - x^2 - y^2}$

245. $z = \ln(13 + 12y - y^2 - x^2)$

246. $z = x + y - \sqrt{15 + 2xy}$

247. $z = \sqrt{5 + 2x + y^2} - 3x^2 y$

248. $z = 3\ln y - \ln(2y - 3x^2 - 4)$

249. $z = \sqrt{y^2 + 6x - x^2}$

250. $z = \ln(x^5 + \ln y)$

251. $z = \ln(\sin x + \cos y)$

252. $z = \ln(\sqrt{x} + 2^{\cos y})$

253. $z = \ln(x\sqrt{y} + \frac{y}{2x})$

254. $z = \arccos\left(\ln \frac{x}{y}\right)$

255. $z = arctg \frac{\sqrt{y}}{x^2}$

256. $z = \arcsin(y\sqrt{x})$

257. $z = \cos y + y \cdot e^x$

258. $z = \ln(\cos y + x^{5y})$

259. $z = x^4 y^2 + \ln(2x + 5y - 3)$

260. $z = e^{tgx} \cdot \sin 3y$

261. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

262. $z = \ln\sin(2x - 3y)$

263. $z = \cos^2(4x^3 - 3\sqrt{y})$

264. $z = \ln(\sin x + tgy)$

265. $z = 6x^2 y^3 + \sqrt{7 + 2x^2 + y^5}$

266. $z = \arccos\sqrt{y^2 - x^2}$

267. $z = (x^3 + y^2) \cdot e^{xy}$

268. $z = \sin xy^2 + \ln\sqrt{3x^3 + 7y^5}$

269. $z = tg^2(3x - 5\sqrt{xy})$

270. $z = \ln(y + \sqrt{x^2 + 8y^3})$

Задачи № 271-300:

Вычислить приближенное значение функции $z(x; y)$ в точке A.

271. $z = \sqrt{x^2 + 2xy}$,
$A(1,94; 3,02)$

272. $z = 5 + 2xy - x^2$,
$A(1,98; 3,92)$

273. $z = 3x^2 - xy + x + y$,
$A(1,06; 2,92)$

274. $z = \sqrt{x + 7y}$,
$A(1,94; 1,03)$

275. $z = e^{4x^2 - y^2}$,
$A(0,98; 2,03)$

276. $z = x^2 + 2y\sin(xy)$,
$A(0,05; 1,96)$

277. $z = \ln(3x^2 - 2xy)$,
$A(1,03; 0,98)$

278. $z = x^2 + 3xy - 6y$,
$A(3,96; 1,03)$

279. $z = e^{x^2 - 2xy}$,
$A(0,05; 2,97)$

280. $z = x^2 - y^2 + 6x + 3y$,
$A(2,02; 2,97)$

281. $z = \sqrt{x^3 + y^2 + xy}$,
$A(2,06; 1,96)$

282. $z = x^2 + y^2 + 2x + y$,
$A(1,98; 3,91)$

283. $z = 2x^2 + \cos(xy) + 5y$,
$A(1,99; 0,02)$

286. $z = e^y \ln(x + 2y)$,
$A(0,98; 0,03)$

287. $z = \ln(x + e^{-y})$,
$A(1,04; 0,05)$

288. $z = x^2 + 2xy + 3y^2$,
$A(1,96; 1,04)$

289. $z = \sqrt{x^2 + 2y + 3}$,
A(2,02; 0,97)

290. $z = e^{2x^2 - xy}$,
$A(2,03; 3,94)$

291. $z = x^2 + 3xy + 3y^2$,
$A(1,98; 1,02)$

292. $z = 5xy + 2\cos(xy) + 4y^2$,
$A(0,05; 2,98)$

293. $z = \ln(4x^2 - 3xy)$,
$A(0,96; 1,02)$

294. $z = 2x^2 y + 3y^3 - 5x$,
$A(2,04; 1,96)$

295. $z = \sqrt{2x + 5y}$,
$A(1,97; 1,05)$

296. $z = \sqrt{5e^x + y^2}$,
$A(0,02; 2,03)$

297. $z = \ln(\sqrt{x} - \sqrt[3]{y})$,
$A(4,03; 0,98)$

298. $z = xy + 2y^2 - 2x$,
$A(0,97; 2,03)$

284. $z = x^2 - y^2 + 5x + 4y$,
$A(3{,}05;\ 1{,}98)$

285. $z = 2xy + 3y^2 - 5x$,
$A(2{,}04;\ 3{,}95)$

299. $z = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)$,
$A(1{,}03;\ 0{,}98)$

300. $z = \sqrt{x^2 + 5e^y}$,
$A(2{,}04;\ 0{,}02)$

Задачи № 301-330:

Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ от неявной функции, заданной уравнением.

301. $x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$

302. $1 + xy - \ln\left(e^{xy} + e^{-xy}\right) = 0$

303. $y \sin x - tg\,(y - x) = 0$

304. $x \sin y + y \sin x - 8 = 0$

305. $\sin x \cdot \ln y + \cos y \cdot \ln x = 0$

306. $\ln(x^2 - tgy) - e^{y+1} = 0$

307. $x^2 - y^2 + arctg(xy) = 0$

308. $x \cos y - \sin(y - x) = 0$

309. $2x \cdot e^{xy} - y \cdot e^x + x^2 = 0$

310. $x^2 y + \arg\sin(x / y) = 0$

311. $x \cdot \ln(x - y) - (y / x) = 0$

312. $\sqrt{x} + \ln y - \arg tg(xy) = 0$

313. $x \sin y - \cos 2y = 0$

314. $x^2 + y^2 + \ln(x^2 + y^2) = 0$

315. $xy^3 - \sin(xy) + e^{2x} = 0$

316. $x^2 \cos y + 3x^3 y + 5 = 0$

317. $y - x^4 y + \sin(xy) = 0$

318. $y \cdot \cos x - x^2 y + xy^5 - 3 = 0$

319. $6x^2 - \sqrt{y^2 + 3x^2} = 0$

320. $(x^2 / 5) + (y^2 / 7) + e^{xy^2} = 0$

321. $y \ln x + 3x \ln y = 0$

322. $e^{x+y} + \ln(xy) = 0$

323. $x \cos y + y \cos x - 7 = 0$

324. $x + y^2 + \ln(x + y^2) = 0$

325. $\sin x + \cos y + \cos(x - 3y) = 0$

326. $(x^3 / 3) + 3x^2 e^y - e^{y^2} = 0$

327. $x^2 + 5y^2 - 6\ln(xy^3) = 0$

328. $\sqrt{xy} + 2x \cos y + e^{2x+3y} = 0$

329. $e^{3x} + (y^2 / 4x) + (x / y) - (5 / x) = 0$

330. $\ln(x^2 + 2y^2) - tg\,(xy) = 0$

Задачи №331-360:

Найти экстремум функции двух переменных $z(x;y)$.

331. $z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 7$

332. $z = x^3 + 2y^2 - 27x - 24y$

333. $z = 5x + 6y - 20\ln x - 12\ln y$

334. $z = 4x + y + 16/x + 1/y$

335. $z = -2x^3 - 2y^3 + 24x + 6y$

336. $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y + 1$

337. $z = 4\sqrt{x} + 15\ln y - 2x - 5y$

338. $z = 3x^2 + y - 24\ln x - 8\ln y$

339. $z = 5x + 3y + 5/x + 27/y$

340. $z = 3xy - x^2 - 4y^2 + 4x - 6y - 3$

341. $z = 5x^3 + 4y^3 - 15x - 48y$

342. $z = x^3 + y^2 - 3\ln x - 50\ln y$

343. $z = 3x^2 + \sqrt{y} - 36x - 0{,}25y$

344. $z = x^2 + y^3 - 8\ln x - 81\ln y$

345. $z = 3x^2 + 3y^2 + 5xy + 4x + 7y + 5$

346. $z = x^2 + xy - 4x + 8y + 9$

347. $z = x^3 + 4y^2 - 27\ln x - 32\ln y$

348. $z = 9\ln x + 8\sqrt{x} - 3x - 4y$

349. $z = 3x + 4y + 27/x + 16/y$

350. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$

351. $z = x^2 + 3xy + y^2 - x - 4y + 1$

352. $z = 6\ln x + 32\sqrt{y} - 3x - 8y$

353. $z = 2x^3 + y^2 - 48\ln x - 18\ln y$

354. $z = 2x + 5y + 18/x + 20/y$

355. $z = xy + x^2 + y^2 - 6x - 9y$

356. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 2$

357. $z = x^2 + y^3 - 32\ln x - 24\ln y$

358. $z = 3\sqrt{x} + 21\ln y - 0{,}5x - 7y$

359. $z = 3xy - x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 4$

360. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 6x - 10y + 1$

Литература

1. Шипачев, В.С. Высшая математика: Учебник / В.С. Шипачев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 479 с.: 60x90 1/16. (переплет) ISBN 978-5-16-010072-2, 1000 экз.

2. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов. Практикум [Электронный ресурс]: практикум для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Н.Ш. Кремер и др.; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. - 479 с. - (Серия «Золотой фонд российских учебников»). - ISBN 978-5-238-01122-6.

3. Лунгу, К.Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. Т.1: Учебное пособие / Лунгу К.Н., Макаров Е.В., - 3-е изд. - М.:ФИЗМАТЛИТ, 2013. - 216 с.: ISBN 978-5-9221-1500-1

4. Макаров С.И. Математика для экономистов. Задачник: учебно-практическое пособие / кол. авторов; под ред. С.И. Макарова, М.В. Мищенко. – М.: КНОРУС, 2008. – 360 с.

5. Ильин, В.А. Высшая математика: учебник / В.А. Ильин, А.В. Куркина. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Проспект, 2012. – 592 с.

6. Попов, А.М. Высшая математика для экономистов : учеб. для бакалавров / А.М. Попов, В.Н. Сотников ; под ред. А.М. Попова. – М. : Юрайт, 2012. – 564 с.

7. Журбенко Л.Н. Математика в примерах и задачах: Учеб. пособие / Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова, Н.В. Никонова, О.М. Дегтярева. - М.: ИНФРА-М, 2009. - 373 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование). (переплет) ISBN 978-5-16-003449-2

8. Черняк А.А. Высшая математика для инженерно-экономических специальностей вузов: учебно-методический комплекс / А.А. Черняк, Ж.А. Черняк. – Минск: Харвест, 2008. – 704 с.

9. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2 ч. / Д.Т. Письменный – 3-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 1 ч. – 288 с.

10. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Часть 1: Учеб. Пособие для втузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.:ОНИКС, 2005. – 304 с.