Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Казанский государственный аграрный университет»
Институт механизации и технического сервиса

Кафедра физики и математики

Методы оптимизации в задачах математического моделирования

Методические указания
для лабораторных и самостоятельных работ

Казань 2020

УДК 51(07)
ББК 22.01Р

Составитель: Ибятов Р.И.

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор кафедры интеллектуальных систем и управления информационными ресурсами КНИТУ Герасимов А.В.

Кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой эксплуатации машин и оборудования Казанского ГАУ Валиев А.Р.

Ибятов Р.И. Методы оптимизации в задачах математического моделирования: методические указания для лабораторных и самостоятельных работ. – Казань: Изд-во Казанского ГАУ, 2020. – 32 с.

Настоящие методические указания предназначены для выполнения лабораторных и самостоятельных работ по математическому моделированию технологических процессов и направлены на формирование общепрофессиональных и профессиональных компетенций студентов, обучающихся по направлениям: 44.03.04 - Профессиональное обучение (по отраслям). Методические указания содержат примеры построения математических моделей отдельных операций сельскохозяй-ственного производства, которые сводятся к решению оптимизационных задач. Примеры численных расчетов выполнены с помощью электронной таблицы EXCEL. Приведены задания для самостоятельного решения и вопросы для самоконтроля.

УДК 51(07)
ББК 22.01Р

Введение

Любой исследуемый объект или процесс характеризуется своими конкретными параметрами (размерами, свойствами, показателями). При математическом моделировании их обычно записывают в виде вектора $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. Эти параметры всегда бывают связанными между собой и зависят друг от друга. Взаимозависимости между параметрами описываются разнообразными уравнениями, а требования на отдельные показатели объекта задаются неравенствами и функциональными зависимостями.

При проектировании рабочего узла конкретного объекта, или при организации и управления производственным процессом, нас интересует наилучший вариант решения проблемы. Показатель, который характеризует качество выполнения задачи, называется целевой функцией или критерием оптимальности. Общая задача оптимизации формулируется следующим образом: подобрать переменным $x_1,x_2,\cdots,x_n$ такие значения, которые обеспечивают экстремум целевой функции [1].

На языке математики задача оптимизации записывается так:

$$\text{найти} \qquad \max\ (\min) \quad f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{1}$$

$$\text{при условиях} \begin{cases} \varphi_j(x_1,x_2,\ldots,x_n)=b_j, & j=\overline{1,k} \\ \varphi_j(x_1,x_2,\ldots,x_n)\le(\ge)\,b_j, & j=\overline{k+1,m} \end{cases} \tag{2}$$

Если целевая функция (1) и система ограничений (2) линейны, то задача оптимизации (1)-(2) называется *задачей линейного программирования* (ЗЛП). Если среди них имеется хотя бы одна нелинейная функция, то (1)-(2) называется задачей *нелинейного программирования* (НЛП).

В общем случае задача линейного программирования записывается следующим образом:

$$\text{найти} \qquad \max \quad (\min) \quad f(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\text{при условиях} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i=b_j, \qquad j=\overline{1,m_1};$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i\ge b_j, \qquad j=\overline{m_1+1,m_2};$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i\le b_j, \qquad j=\overline{m_2+1,m};$$

$$x_i\ge 0, \qquad i=\overline{1,n}.$$

Систему ограничений вида неравенств всегда можно свести к ограничениям типа равенств с помощью дополнительных переменных. Тогда, задачу линейного программирования можно представить в *канонической* форме:

найти $\min \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

при условиях $\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j,$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

В задачах линейного программирования случай нахождения $\max\ f(x)$ отдельно не выделяется, т.к. он сводится к нахождению $\min\left[-f(x)\right]$, причем

$$\max\ f(x) = -\min\left[-f(x)\right].$$

Универсальным методом решения задач линейного программирования является симплекс-метод, на основе которого лежит многократное решение системы линейных алгебраических уравнений. Простейшие двухмерные задачи линейного программирования могут быть решены графическим способом.

Для решения задач нелинейного программирования используют различные итерационные процедуры поиска оптимума, поскольку для них прямых методов не существуют [2]. Эти итерационные процедуры, как правило, предназначены для решения безусловных задач (метод градиентов, метод покоординатного спуска, метод наискорейшего спуска). Условные задачи предварительно сводятся, например, при помощи штрафных функций, к задачам безусловной оптимизации.

Когда исследуемый объект или процесс характеризуется несколькими целевыми функциями, возникает многокритериальная задача. Многокритериальные задачи очень разнообразны по содержанию, по объему и качеству информации. Считается, что до сих пор нет приемлемой классификации многокритериальных задач и подходов к их решению.

Целевые функции, как правило, бывают противоречивыми и поэтому многокритериальная задача не имеет единственного решения. Решение ищется в виде некоторого компромиссного варианта, то есть наилучшей альтернативы. Основываясь на различных определениях наилучшей альтернативы, можно провести некоторую классификацию известных процедур решения многокритериальных задач. В качестве основных можно привести следующие два подхода:

1. Построение множества оптимальных по Парето альтернатив и выбор из этого множества альтернативы наиболее предпочтительный с точки зрения лица, принимающего решения (ЛПР).

2. Априорные процедуры (сведение многокритериальной задачи к однокритериальной с помощью компромисса и решающих правил).

Тема 1. Математическое моделирование с помощью методов линейного программирования

Моделирование многих производственных ситуаций сводятся к решению оптимизационных задач с линейными функциями [3]. Рассмотрим несколько примеров составления задач линейного программирования.

1.1. Оптимизация количества удобрений, вносимых в поле

Необходимо определить количество органических и сложных минеральных удобрений для разбрасывания на 20 га лугопастбищных угодий таким образом, чтобы полная стоимость вносимых удобрений была минимальной. Стоимость и химический состав удобрений приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Стоимость и химический состав удобрений.

Удобрение	Стоимость, руб/т	Азот, кг/т	Фосфор, кг/т	Калий, кг/т
Органическое удобрение	125	6	1,5	4
Сложное удобрение	6500	250	100	100

Предполагается внести на луг не менее 75 кг/га азота, 25 кг/га фосфора и 35 кг/га калия. Производительность труда при разбрасывании органического удобрения может составлять 8 т/час, а сложного удобрения – 0,4 т/час.

Математическая постановка задачи.

Обозначим через x_1, x_2 – количества вносимых органических и сложных удобрений соответственно. Тогда стоимость вносимых удобрений может быть задана в виде $125x_1 + 6500x_2$.

В 1 т органического удобрения содержится 6 кг, а в 1 т комбинированных удобрений – 250 кг азота. Следовательно, общее количество азота, вносимого на угодья, составляет $6x_1 + 250x_2$. Так как минимальная норма внесения составляет 75 кг/га, а площадь угодий – 20 га, то суммарное количество азота не должно быть меньше 75×20=1500 (кг). Поэтому ограничения по азоту можно записать в виде

$$6x_1 + 250x_2 \geq 1500 .$$

Подобным образом строятся ограничения по фосфору и калию

$$1{,}5x_1 + 100x_2 \geq 500,$$

$$4x_1 + 100x_2 \geq 700.$$

Время для разбрасывания x_1 тонн органического удобрения с производительностью 8 т/час составляет $x_1/8$ час. Для внесения сложных химических удобрений требуется $x_2/0{,}4$ час времени. Общее время, необходимое для выполнения этой работы не должно превышать

$$\frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{0{,}4} \leq 25.$$

Таким образом, математическая постановки задачи будет выглядеть следующим образом:

найти минимум целевой функции

$$F(x_1, x_2) = 125x_1 + 6500x_2$$

с учетом ограничений

$$6x_1 + 250x_2 \geq 1500,$$

$$1{,}5x_1 + 100x_2 \geq 500,$$

$$4x_1 + 100x_2 \geq 700,$$

$$0{,}125x_1 + 2{,}5x_2 \leq 25\,0,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

1.2. Задача о составлении рациона (задача о смесях)

Имеются два вида корма, содержащих питательные вещества: витамины В1, В2, В3 (таблица 1.2). Стоимость одного килограмма первого вида корма – *4* рубля, второго – *6* рублей. Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не менее установленного предела.

Таблица 1.2 – Характеристики вида кормов и необходимый минимум питательных веществ.

Питательное вещество	Необходимый минимум	Число единиц питательных веществ в 1 килограмме корма	
		К1	К2
В1	9	3	1
В2	27	4	2
В3	12	1	6

Математическая формализация задачи.

Пусть x_1, x_2 – количества вида кормов К1 и К2 соответственно. Тогда стоимость дневного рациона составить $4x_1 + 6x_2$ рублей.

Количество питательного вещества В1 в дневном рационе определяется формулой $3x_1 + x_2$ единиц и должно быть не менее необходимого минимума, равного 9 единицам. Ограничения на другие виды питательных веществ определяются аналогично.

Таким образом, математическая формулировка задачи имеет вид:

найти минимум

$$F(x_1, x_2) = 4x_1 + 6x_2$$

при условиях

$$3x_1 + x_2 \ge 9,$$

$$4x_1 + 2x_2 \ge 27,$$

$$x_1 + 6x_2 \ge 12,$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

1.3. Задача об использовании ресурсов при изготовлении изделий

Для изготовления двух видов продукции П1 и П2 используют четыре вида ресурсов Р1, Р2, Р3, Р4. Запасы ресурсов и число единиц ресурсов, затраченных на изготовление одного вида продукции, приведено в таблице 1.3.

Таблица 1.3 – Запасы ресурсов и их расход при изготовлении единицы продукции.

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затраченных на изготовление одной единицы продукции	
		П1	П2
Р1	18	0,5	3
Р2	16	2	1
Р3	25	0	4
Р4	21	3	0

Прибыль, полученная от реализации одного продукта П1 равна *2*, от П2 – *3* условной единицы. Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от реализации была максимальной.

Математическая формализация задачи.

Пусть x_1, x_2 – количества изготавливаемой продукции П1 и П2 соответственно. Тогда прибыль от реализации может быть вычислена по формуле $2x_1 + 3x_2$.

Расход ресурса Р1 составляет $0{,}5x_1 + 3x_2$ единиц, который не должен превышать заданного запаса 18. Аналогично определяются ограничения на другие виды ресурсов. Следовательно, математическая формулировка задачи выглядеть так:

найти максимум

$$F(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

при условиях

$$0{,}5x_1 + 3x_2 \le 18,$$

$$2x_1 + x_2 \le 16,$$

$$4x_2 \le 25,$$

$$3x_1 \le 21,$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

1.4. Задача о наилучшем использовании ресурсов предприятия

Фермер выращивает две культуры *X* и *У* на площади 160 га [3]. Ему необходимо распределить землю, людей и технику таким образом, чтобы прибыль от реализации урожая названных культур была максимальной. В процессе выращивания каждой из культур необходимо выполнять три операции - вспашку, посев и уборку. Ниже, в таблице 1.4, эти операции и время, необходимое для их выполнения, даны в привязке к четырем разным периодам производства. Там же указано время в пределах каждого из периодов, которое может быть использовано в этих целях.

Таблица 1.4 – Время, необходимое для выполнения операций.

Период	Доступное время, ч	Требуемое время, ч/га					
		Культура *X*			Культура *У*		
		вспаш	сев	уборка	вспашка	сев	уборка
1	5	0,5	-	-	-	-	-
2	10	-	0,3	-	0,5	-	-
3	15	-	-	0,75	-	0,6	-
4	20	-	-	0,75	-	-	2,0

Математическая постановка задачи.

Пусть x_3 и x_4 обозначают площади, выделенные по культуру *X*, которые убирают в периоды 3 и 4 соответственно, и пусть *у* есть площадь, выделенная под культуру *У*. Площади, выделяемые под каждую из культур, ограничены общей площадью угодий, т. е.

$$y_1 + x_3 + x_4 \le 160.$$

Для уборки каждой культуры может быть использован самоходный комбайн одного и того же типа. Пусть b_k есть число комбайнов, необходимое для уборки. Это число может быть только целым и неотрицательным. Сформулируем ограничения по общим затратам техники на уборку:

период 3: $0,75x_3 \le 15b_k$,

период 4: $0,75x_4 + 2y \le 20b_k$.

Пусть для вспашки, посева и уборки необходим трактор. Пусть b_m есть неотрицательная целочисленная переменная, обозначающая потребность в тракторах. Тогда ограничения по периодам запишутся так:

период 1: $0,5(x_3 + x_4) \le 5\ b_m$,

период 2: $0,3(x_3 + x_4) + 0,5y \le 10\ b_m$,

период 3: $0,75x_3 + 0,6y \le 15\ b_m$,

период 4: $0,75x_4 + 2y \le 20\ b_m$.

Потребности в трудовых ресурсах рассчитываются следующим образом. Во время вспашки и сева требуется один человек для управления трактором. Чтобы убрать культуру *X*, требуется два человека для управления комбайном и один - для управления трактором. Во время уборки культуры *У* требуется по одному человеку для управления комбайном и трактором. Пусть $b_л$ есть целочисленная переменная, обозначающая полную потребность в людях. Тогда ограничения по труду (в чел.·ч) можно сформулировать следующим образом:

период 1: $0,5(x_3 + x_4) \le 5\ b_л$,

период 2: $0,3(x_3 + x_4) + 0,5y \le 10\ b_л$,

период 3: $0,75x_3 + 0,6y \le 15\ b_л$,

период 4: $0,75x_4 + 2y \le 20\ b_л$.

Культуру *У* можно выращивать на одном и том же поле только один год из двух, а культуру *X* - два года из трех. Фермер намерен выращивать их ежегодно и поэтому должен предусмотреть в своих планах севооборот. Это можно сделать с помощью ограничений:

$y \le 160/2$,

$x_3 + x_4 \le 160 * (2/3)$.

Доход, получаемый от культур X и У, равен 2 и 4 ед./га. Соответствующие ежегодные затраты труда, комбайнов и тракторов равны 15 ед./чел., 3 ед./маш. и 1,5 ед./маш. Целевая функция (функция полезности, доход) *F* (ед./год), которую необходимо максимизировать, имеет вид $2x_3 + 2x_4 + 4y - 1,5b_m - 15b_л - 3b_k$.

Таким образом, ставится следующая частично-целочисленная задача линейного программирования с шестью неизвестными переменными ($x_3, x_4, y, b_m, b_л, b_k$):

найти максимум

$$F = 2x_3 + 2x_4 + 4y - 1{,}5b_m - 15b_л - 3b_k$$

при условиях

$$y_1 + x_3 + x_4 \le 160,$$
$$0{,}75x_3 \le 15b_k,$$
$$0{,}75x_4 + 2y \le 20b_k,$$
$$0{,}5(x_3 + x_4) \le 5\,b_m,$$
$$0{,}3(x_3 + x_4) + 0{,}5y \le 10\,b_m,$$
$$0{,}75x_3 + 0{,}6y \le 15\,b_m,$$
$$0{,}75x_4 + 2y \le 20\,b_m,$$
$$0{,}5(x_3 + x_4) \le 5\,b_л,$$
$$0{,}3(x_3 + x_4) + 0{,}5y \le 10\,b_л,$$
$$0{,}75x_3 + 0{,}6y \le 15\,b_л,$$
$$0{,}75x_4 + 2y \le 20\,b_л,$$
$$y \le 80,$$
$$x_3 + x_4 \le 106{,}66,$$
$$x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ y \ge 0,\ b_m \ge 0,\ b_л \ge 0,\ b_k \ge 0.$$

Решение задач линейного программирования с помощью электронной таблицы

Составление программы для численной реализации симплекс-метода не составляет особого труда. В настоящее время существует большое количество таких программ, которые доступны через Интернет. В стандартных программных пакетах офисного назначения, как правило, в составе электронной таблицы имеется приложение для решения оптимизационных задач. В электронной таблице EXCEL оно называется надстройкой **Поиск решения**, которая вызывается из пункта главного меню **Данные.**

Если в пункте **Данные** надстройка **Поиск решения** отсутствует, то ее следует активизировать. Для этого перейти по адресу **Кнопка “Office” → Параметры EXCEL → Надстройки → Перейти** и поставит галочку напротив **Поиск решения**.

Решим задачу об оптимизации количества удобрений с помощью надстройки **Поиск решения**. Как было показано выше, математическая постановка задачи имеет вид:

найти минимум целевой функции

$$F(x_1, x_2) = 125x_1 + 6500x_2$$

при ограничениях

$$6x_1 + 250x_2 \geq 1500,$$
$$1{,}5x_1 + 100x_2 \geq 500,$$
$$4x_1 + 100x_2 \geq 700,$$
$$x_1 + 20x_2 \leq 200,$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Составим шаблон для решения данной задачи в электронной таблице и введем исходную числовую информацию. В ячейки B5:C5 заносятся значения коэффициентов целевой функции. В ячейки B9:C12 заносятся коэффициенты левых частей ограничений. Значения правых частей ограничений записываются в ячейках G9:G12 соответственно.

Ячейки B4:C4 являются изменяемыми, в них хранятся значения неизвестных переменных x_1, x_2. Посредством изменения значений в этих ячейках надстройка **Поиск решения** будет искать оптимальное значение целевой функции. Само значение целевой функции будет подсчитываться в ячейке G4.

Далее необходимо ввести формулы. Целевую функцию $125x_1 + 6500x_2$ можно рассматривать как скалярное произведение вектора (125, 6500) на вектор (x_1, x_2). Для вычисления скалярного произведения векторов можно воспользоваться функцией СУММПРОИЗВ. Тогда в ячейку G4 нужно записать формулу =СУММПРОИЗВ($B$5:$C$5;$B$4:$C$4), вычисляющую скалярное произведение векторов $B$5:$C$5 и $B$4:$C$4.

В ячейках E9:E12 вычисляются собственно сами левые части ограничений, которые тоже представляют собой произведения двух векторов: соответствующей строки матрицы химического состава удобрений и вектора неизвестных. В ячейке E9, отведенный для формулы левой части первого ограничения, введем формулу =СУММПРОИЗВ($B$9:$C$9;$B$4:$C$4). В три другие ячейки графы «Левая часть» водятся аналогические формулы, используя соответствующую строку матрицы коэффициентов.

После того, как все формулы и числовые значения введены, в меню **Данные** выбираем **Поиск решения**. В появившееся диалоговое окно (рис. 1.1) заносим следующую информацию:

1) В качестве ячейки, содержащей значение целевой функции, указываем ячейку $G$4.

2) Переключатель устанавливаем в положение “Равной минимальному значению”, т.к. в нашем случае решаем задачу на минимум.

3) В поле “изменяя ячейки” заносим $B$4:$C$4.

4) В поле “ограничения” нам необходимо добавить все наши ограничения. Выбираем “Добавить” и в появившееся окно записываем данные первого ограничения (рис. 1.2)

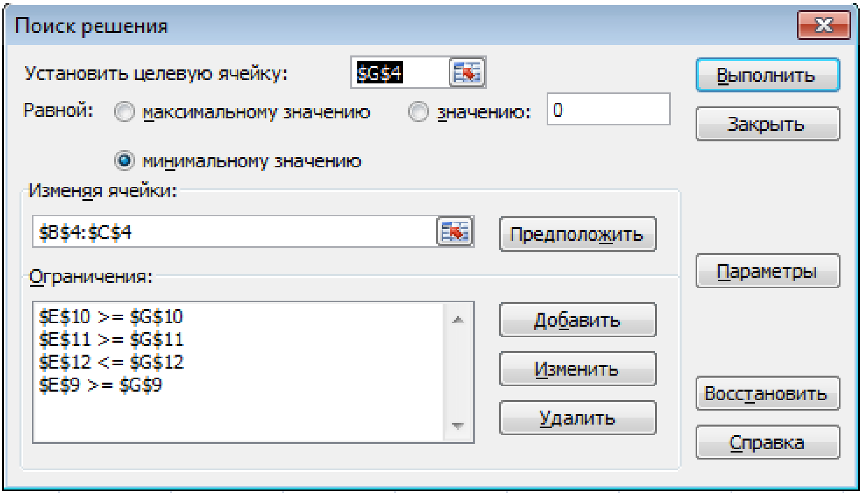

Рисунок 1.1 – Окно надстройки **Поиск решения.**

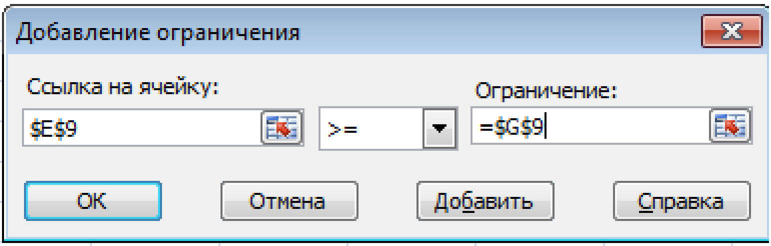

Рисунок 1.2 – Окно **Добавление ограничения**.

Аналогично добавляем остальные ограничения.

Далее необходимо нажать на кнопку **Параметры** и установить флажки «Линейная модель», «Неотрицательные значения». Затем следует нажать «ОК», «Выполнить», после чего появится окно результатов решения (рис. 1.3)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Переменные					
3		Орнаническое удобрение	Сложное удобрение				Целевая функция
4	Кличество удобрений	111,111	3,333				35555,556
5	Коэффициенты ЦФ	125,000	6500,000				
6							
7					Ограничения		
8		Коэфициенты			Левая часть	Знак	Правая часть
9	Азот	6,000	250,000		1500,000	>=	1500
10	Фосфор	1,500	100,000		500,000	>=	500
11	Калий	4,000	100,000		777,778	>=	700
12	Производительность	0,125	2,500		22,222	<=	25

Рисунок 1.3 – Окно результатов решения.

Искомые значения параметров x_1, x_2 хранятся в ячейках $B$4:$C$4. Как видно из рисунка, решением данной задачи являются значения x_1=111,111 и x_2=3,333. Таким образом, оптимальным количеством вносимых органических удобрений составляет 111,111 т, сложных удобрений 3,333 т на 20 гектар площади. Тогда стоимость вносимых удобрений составит 35555 рублей.

Данный пример наглядно иллюстрирует простоту решения задач такого класса с помощью программы Microsoft Excel. Остальные вышеприведенные задачи 1.2, 1.3, 1.4 решаются аналогично.

Задания к самостоятельной работе

Сформулировать задачу оптимизации в виде ЗЛП и решить её при помощи электронной таблицы Excel. Вариант задачи выбирается по номерам групп и студентов: *mn* - двухзначный номер студента, *k* – номер группы.

Задание 1.1

Определить количество органических и сложных минеральных удобрений для разбрасывания на (20+*k*) га лугопастбищных угодий таким образом, чтобы полная стоимость вносимых удобрений была минимальной. Предполагается внести на луг не менее (80-*m*) кг/га азота, (20+*n*) кг/га фосфора и (30+*m*+*n*) кг/га калия. Производительность труда при разбрасывании органического удобрения может составлять (10+*n*) т/час, а сложного удобрения – (0,4+0,1*m*) т/час.

Стоимость и химический состав удобрений приведены в таблице 1.5.

Таблица 1.5 – Стоимость и химический состав удобрений.

Удобрение	Стоимость, руб/т	Азот, кг/т	Фосфор, кг/т	Калий, кг/т
Органическое удобрение	125+k	5+n	1,5	3+m
Сложное удобрение	6500-10k	200+10n	100+5m	100-5m

Задание 1.2

Имеются два вида корма, содержащих питательные вещества: витамины В1, В2, В3. Стоимость одного килограмма первого вида корма – ($4+k$) рубля, второго – ($6+k$) рублей.

Определить оптимальный по стоимости дневной рацион, состоящий из двух видов корма, если их стоимости составляют ($4+k$) рубля и ($6+k$) рублей за килограмм соответственно. Число единиц питательных веществ в 1 килограмме каждого вида кормов и их необходимый минимум выбираются из таблицы 1.6.

Таблица 1.6 – Характеристики вида кормов и необходимый минимум питательных веществ.

Питательное вещество	Необходимый минимум	Число единиц питательных веществ в 1 килограмме корма	
		К1	К2
В1	$9+n$	3	$1+2m$
В2	$8+m$	$1+n$	$2+n$
В3	$12-m$	1	$6+m$

Задание 1.3

Найти оптимальный план выпуска различных видов продукции, если прибыль, полученная от реализации продукта П1 равна ($2+k$), от П2 – ($3+k$) условной единицы. Запасы и число единиц ресурсов, затраченных на изготовление одного вида продукции, заданы в таблице 1.7.

Таблица 1.7 – Запасы ресурсов и их расход при изготовлении единицы продукции.

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затраченных на изготовление одной единицы продукции	
		П1	П2
Р1	$18+n$	1	$3+2m$
Р2	$16+m$	$2+n$	1
Р3	$5+2m$	0	$1+m$
Р4	$21-n$	$3+n$	0

Задание 1.4

Фермер выращивает две культуры X и Y на площади (160+20*m*+10*n*+*k*) га. Распределение ресурсов техники, необходимое при выращивание этих культур заданы в таблице 1.8. Доход, получаемый от культур X и У, равен (2+*n*) и (4+*n*) ед./га. Соответствующие ежегодные затраты труда, комбайнов и тракторов равны (15+*m*) ед./чел., (3+*m*) ед./маш. и (1,5+0,1*m*) ед./маш. Необходимо распределить землю, людей и технику таким образом, чтобы прибыль от реализации урожая названных культур была максимальной.

Таблица 1.8 – Время, необходимое для выполнения операций.

Период	Доступное время, ч	Требуемое время, ч/га					
		Культура *X*			Культура *У*		
		вспашка	сев	уборка	вспашка	сев	уборка
1	5	0,5	-	-	-	-	-
2	10+*m*	-	0,3	-	0,5	-	-
3	15+*n*	-	-	0,75	-	0,6	-
4	20	-	-	0,75	-	-	2,0

Тема 2. Транспортная задача

Одним из разновидностей задачи линейного программирования является транспортная задача. Как любая задача линейного программирования она может быть решена симпликс-методом с помощью электронной таблицы EXCEL. Следует отметить, что в транспортных задачах ограничения записываются в виде равенств, а все элементы матрицы коэффициентов системы ограничений равны единице. Эти особенности позволяют образовать отдельный класс задач, для которых более рациональным способом их решения является метод потенциалов.

2.1. Оптимизация транспортных перевозок

Имеется m поставщиков определенного вида продукции. Максимальные объемы возможных поставок заданы и равны, соответственно, $a_i, (i = 1,2,\ldots,m)$. Эта продукция используется n потребителями. Объемы потребностей заданы и равны, соответственно, $b_j, (j = 1,2,\ldots,n)$. Стоимость перевозок единицы продукции от ***i***-го поставщика к ***j***-му равна c_{ij}. Требуется установить такие объемы перевозок x_{ij} от каждого поставщика к каждому потребителю, чтобы суммарные затраты на перевозки были минимальными и потребности всех потребителей были удовлетворены.

Математическая постановка задачи.

Общие затраты на перевозки определяется как сумма затрат по всем возможным маршрутам. Суммарные затраты должны быть минимальными:

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij} \to \min .$$

По условиям задачи все грузы должны быть вывезены:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad (i = 1,2,\dots,m) ;$$

потребности всех потребителей должны быть удовлетворены:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad (j = 1,2,\dots,n) .$$

Кроме того, обратные перевозки исключаются:

$$x_{ij} \ge 0, \quad (i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4) .$$

Применение электронной таблицы EXCEL для решения транспортной задачи рассмотрим на примере, исходные данные которого представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Запасы продукции, объемы потребностей и стоимости транспортных перевозок.

Поставщики	Потребители				Запасы
	1	*2*	*3*	*4*	
1	5	3	4	2	500
2	1	7	8	10	700
3	4	5	6	9	400
Спрос потребителя	600	200	450	350	1600

Математическая модель этой задачи имеет вид:
найти минимум

$$f(\bar{x}) = 5x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 2x_{14} + x_{21} + 7x_{22} + \\ + 8x_{23} + 10x_{24} + 4x_{31} + 5x_{32} + 6x_{33} + 9x_{34},$$

при условиях

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 500 ,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 700 ,$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 400 ,$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 600 ,$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 200,$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 450,$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 350,$$
$$x_{ij} \geq 0, \quad (i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4).$$

Составим шаблон для решения данной задачи в электронной таблице и введем исходную числовую информацию.

В массив B3:E5 введены значения стоимости перевозок единицы груза. В ячейки B12:E12 введены величины спроса потребителей, в G8:G10 – запасов поставщиков. Ячейки B8:E10 являются изменяемыми, в них хранятся значения неизвестных объемов перевозок x_{ij}.

Целевая функция =СУММПРОИВ(B3:E5; B8:E10), которая отражает сумму произведений стоимости c_{ij} на объемы перевозок x_{ij}, введена в ячейку F11. В массивы F8:F10 и B11:E11 введены левые части ограничений.

Далее в меню **Данные** выбираем **Поиск решения**. В появившееся диалоговое окно заносим необходимую информацию (рис. 2.1).

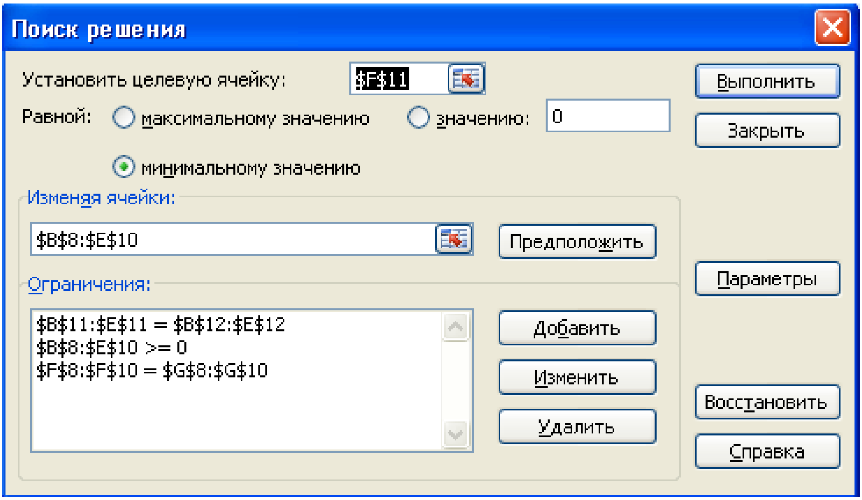

Рисунок 2.1 – Окно надстройки **Поиск решения.**

В диалоговом окне **Параметры** установим флажки «Линейная модель» и «Неотрицательные значения». Затем следует нажать «ОК», «Выполнить», после чего появится окно с результатами решения (рис. 2.2).

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Стоимости перевозок					
3		5	3	4	2		
4		1	7	8	10		
5		4	5	6	9		
6		Объемы перевозок потребителями					
7		*1*	*2*	*3*	*4*		Запасы
8	*1*	0	100	50	350	500	500
9	*2*	600	100	0	0	700	700
10	*3*	0	0	400	0	400	400
11		600	200	450	350	4900	
12	Спрос	600	200	450	350		1600

Рисунок 2.2 – Окно с результатами решения

Из массива ячеек B8:E10 и F11 считываем решение поставленной задачи. Таким образом, оптимальным является следующий план перевозок:

$x_{12}=100$, $x_{13}=50$, $x_{14}=350$, $x_{21}=600$, $x_{22}=100$, $x_{33}=400$.

Суммарная стоимость перевозок составит 4900 условных единиц.

2.2. Задача об оптимальном использовании земельных участков

Имеются пять участков земли для посева: 1) ржи, 2) пшеницы, 3) ячменя, 4) кукурузы. Площади участков соответственно равны 270, 250, 200, 350, 430 га. Стоимость центнера зерна соответствующих культур равны $z_1=5$, $z_2=8$, $z_3=7$, $z_4=3$ единиц. Урожайность культур (ц/га) на соответствующих участках земли представлена матрицей $D=\{d_{ij}\}$:

$$D=\begin{pmatrix} 25 & 20 & 22 & 23 & 20 \\ 21 & 22 & 20 & 25 & 23 \\ 14 & 16 & 18 & 21 & 15 \\ 40 & 50 & 46 & 42 & 48 \end{pmatrix}.$$

Требуется определить, сколько гектаров земли засеять каждой из культур на каждом участке земли, чтобы суммарная стоимость собранного зерна была максимальной, если известно, что из-за ограниченности в семенном фонде можно засеять рожью, пшеницей, ячменем и кукурузой соответственно 200, 500, 350 и 450 га.

Математическая постановка задачи.

Обозначим через x_{ij} – количества гектаров засеянной i -ой культурой земли на j -ом участке. Суммарный вес собранного зерна в центнерах может быть вычислен по формуле:

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} d_{ij} x_{ij} \, .$$

Так как стоимости центнера зерна выращиваемых культур известны, урожайность можно характеризовать в единицах руб/га. Значения стоимостей центнера зерна посеянных культур запишем в виде диагональной матрицы S с элементами:

$$s_{ij} = \begin{cases} z_i, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

При этом урожайность культур на соответствующих участках земли в измерении «руб/га» может быть представлена матрицей C, полученной умножением матрицу D на матрицу S слева:

$$C = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} \end{pmatrix}.$$

Тогда суммарная стоимость собранного зерна в рублях вычисляется по формуле:

$$F(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij} \, .$$

Таким образом, математическая модель задачи примет следующий стандартный вид:

найти максимум

$$\begin{aligned} F(\bar{x}) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{14}x_{14} + c_{15}x_{15} + \\ + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{25}x_{25} + \\ + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} + c_{34}x_{34} + c_{35}x_{35} + \\ + c_{41}x_{41} + c_{42}x_{42} + c_{43}x_{43} + c_{44}x_{44} + c_{45}x_{45}, \end{aligned}$$

при условиях

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 200 \, ,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 500 \, ,$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=350,$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}=450,$$
$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=270,$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=250,$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=200,$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=350,$$
$$x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}=430,$$
$$x_{ij}\ge 0,\quad (i=\overline{1,4};\ j=\overline{1,5}).$$

Задания к самостоятельной работе

Сформулировать задачу оптимизации в виде ЗЛП и решить её при помощи электронной таблицы Excel. Вариант задачи выбирается по номерам групп и студентов: *mn* - двухзначный номер студента, *k* – номер группы.

Задание 2.1

На трех базах A_1, A_2, A_3 находится однородный груз в количестве a_1, a_2, a_3 тонн. Этот груз необходимо развести четырем потребителям B_1, B_2, B_3, B_4, потребности которых в данном грузе составляют b_1, b_2, b_3, b_4 тонн соответственно. Стоимость перевозок единицы продукции от ***i***-го поставщика к ***j***-му потребителю c_{ij} известны (таблица 2.2). Требуется установить такие объемы перевозок x_{ij} от каждого поставщика к каждому потребителю, чтобы суммарные затраты на перевозки были минимальными и потребности всех потребителей были удовлетворены.

Таблица 2.2 – Запасы груза, объемы потребностей потребителей и стоимости транспортных перевозок.

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5 x_{11}	8 x_{12}	15 x_{13}	20–n x_{14}.	140–5m
A_2	7+m x_{21}	10 x_{22}	4+m x_{23}	…5 x_{24}	160+5m
A_3	16-n x_{31}	11+n x_{32}	19-n x_{33}	…10 x_{34}	200

Потреб ности	180 –2n	40+2n	160–3k	120+3k	500

Задание 2.2

Имеются пять участков земли для посева: 1) ржи, 2) пшеницы, 3) ячменя, 4) кукурузы. Площади участков соответственно равны 270+k, 250+5m, 200+10n, 350, 430 га. Стоимость центнера зерна соответствующих культур равны $z_1 = 5$, $z_2 = 8 + n$, $z_3 = 7 + m$, $z_4 = 3$ единиц. Урожайность культур (ц/га) на соответствующих участках земли представлена матрицей $D = \{d_{ij}\}$:

$$D = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 22 & 23 & 20 \\ 21 & 22 & 20 & 25 & 23 \\ 14 & 16 & 18 & 21 & 15 \\ 40 & 50 & 46 & 42 & 48 \end{pmatrix}.$$

Требуется определить, сколько гектаров земли засеять каждой из культур на каждом участке земли, чтобы суммарная стоимость собранного зерна была максимальной, если известно, что из-за ограниченности в семенном фонде можно засеять рожью, пшеницей, ячменем и кукурузой соответственно 200+k, 500+5m, 350+10n и 450 га.

Тема 3. Математическое моделирование с помощью методов многокритериальной оптимизации и нелинейного программирования

При проектировании и эксплуатации рабочих узлов (агрегатов) различного назначения, в отличие от задач планирования и управления производственными ситуациями, возникают нелинейные задачи. Рассмотрим два примера постановки и решения двухкритериальной нелинейной задачи оптимизации.

3.1. Определение оптимальных параметров эксплуатации ротационного конического почвообрабатывающего рабочего органа

Рассматривается ротационный конический рабочий орган [4], предназначенный для поверхностной мульчирующей обработки почвы (рис. 3.1).

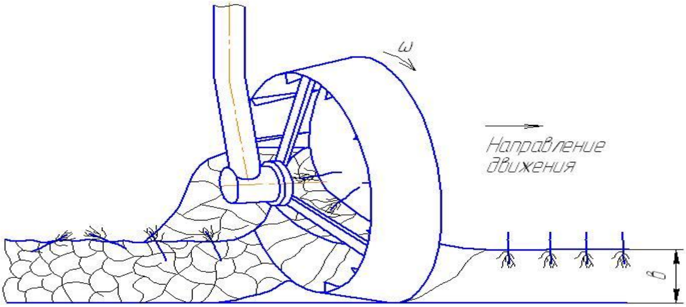

Рисунок 3.1 – Ротационный конический рабочий орган.

При эксплуатации данного рабочего органа важные значения имеют две характеристики – величина тягового усилия F и скорость вращения конического элемента ω. От величины тягового усилия напрямую зависит расход горючесмазочных материалов на обработку единицы площади. Поэтому его необходимо минимизировать. Скорость вращения конического рабочего органа влияет на качество обработки почвы. Она должна быть достаточно большой, чтобы обеспечить необходимую степень крошения.

Независимыми переменными или управляющими факторами являются два конструктивных параметра: угол атаки α и угол наклона оси вращения к горизонту β (рис. 3.2). Предварительными исследованиями были определены диапазоны варьирования угла атаки от 20 до 50, а угла наклона оси вращения к горизонту от 20 до 45 градусов.

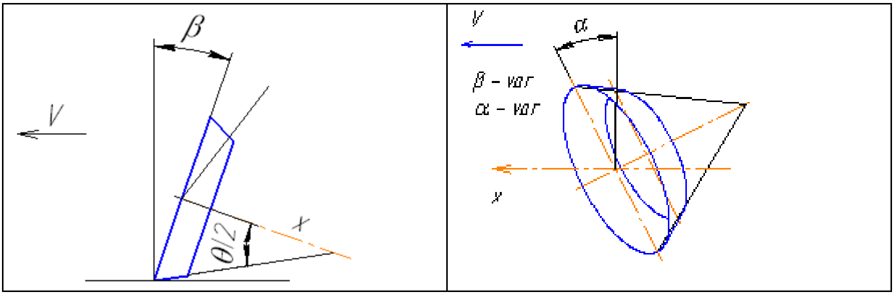

Рисунок 3.2 – Углы атаки α и наклона оси вращения к горизонту β.

Кроме того, предварительными исследованиями была установлена взаимозависимость между функциями отклика F и ω в виде обратной пропорции. При подборе значений углов α и β, обеспечивающие увеличение скорости вращения рабочего органа, одновременно происходил рост тягового усилия.

На основании проведенного эксперимента, результат которого представлен в виде таблицы 3.1, необходимо определить наилучшие значения углов атаки и наклона оси вращения к горизонту, обеспечивающих минимальное тяговое усилие и максимальную скорость вращения рабочего органа.

Таблица 3.1 – Результаты измерений тягового усилия F и скорости вращения конического элемента ω.

α, град	β, град	F, кН	ω, 1/сек
20	20	120	1,9
20	30	92	2
20	40	96	2,4
35	20	98	3,7
35	30	102	5,5
35	40	108	3,3
50	20	100	4,4
50	30	98	5
50	40	105	4

Математическая формализация задачи.

Предварительно необходимо установить функциональные зависимости тягового усилия $F = F(\alpha, \beta)$ и скорости вращения $\omega = \omega(\alpha, \beta)$ конического рабочего органа от конструктивных параметров α и β.

С учетом нелинейности функциональных зависимостей, можно выбрать следующий вид уравнений регрессии

$$F = a_1 + a_2\alpha + a_3\beta + a_4\alpha\beta + a_5\alpha^2 + a_6\beta^2, \qquad (3.1)$$

$$\omega = b_1 + b_2\alpha + b_3\beta + b_4\alpha\beta + b_5\alpha^2 + b_6\beta^2. \qquad (3.2)$$

Значения коэффициентов регрессии a_k, b_k $(k = \overline{1,6})$ определим методом наименьших квадратов. Согласно данного метода, коэффициентам уравнений регрессии подбирают такие значения, которые обеспечивают минимумы суммы квадратов отклонений экспериментальных измерений от соответствующих теоретических значений, вычисленных с помощью искомых функциональных зависимостей (3.1) и (3.2). Другими словами, для нахождения коэффициентов a_k и b_k необходимо найти минимумы следующих функционалов:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_1 + a_2\alpha_i + a_3\beta_i + a_4\alpha_i\beta_i + a_5\alpha_i^2 + a_6\beta_i^2 - F_i\right)^2 \to \min, \qquad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(b_1+b_2\alpha_i+b_3\beta_i+b_4\alpha_i\beta_i+b_5\alpha_i^2+b_6\beta_i^2-\omega_i\right)^2\to\min\ . \qquad (3.4)$$

Приравнивая к нулю частных производных от суммы (3.3) по неизвестным коэффициентам $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ получим систему из шести линейных алгебраических уравнений (3.5). Аналогично, дифференцируя сумму (3.4) по неизвестным $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$, получим систему уравнений (3.6). Решение этих систем уравнений являются искомыми коэффициентами уравнений регрессии $a_k, b_k \quad (k=\overline{1,6})$.

Конкретизацию систем уравнений (3.5) и (3.6) согласно данным из таблицы 3.1, а также их решение будем проводить с помощью электронной таблицы EXCEL. В среде электронной таблицы решение систем линейных алгебраических уравнений удобно выполнить методом обратной матрицы.

В связи с этим запишем системы уравнений (3.5) и (3.6) в матричной форме:

$$C\cdot A=R1,$$
$$C\cdot B=R2.$$

Здесь C – матрица коэффициентов при неизвестных a_k, b_k; $R1, R2$ – вектора свободных членов;

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\a_6\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\\b_5\\b_6\end{pmatrix}$$ - вектора неизвестных.

После конкретизации коэффициентов уравнений с учетом значений $\alpha_i, \beta_i, F_i, \omega_i$ из таблицы 3.1, эти массивы примут вид:

$$C=\begin{pmatrix}
9 & 285 & 300 & 9500 & 9975 & 11400\\
285 & 9975 & 9500 & 332500 & 378375 & 361000\\
300 & 9500 & 11400 & 361000 & 332500 & 480000\\
9500 & 332500 & 361000 & 12635000 & 12612500 & 15200000\\
9975 & 378375 & 332500 & 12612500 & 15211875 & 12635000\\
11400 & 361000 & 480000 & 15200000 & 12635000 & 21660000
\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} na_1 + a_2\sum\alpha_i + a_3\sum\beta_i + a_4\sum\alpha_i\beta_i + a_5\sum\alpha_i^2 + a_6\sum\beta_i^2 = \sum F_i \\ a_1\sum\alpha_i + a_2\sum\alpha_i^2 + a_3\sum\alpha_i\beta_i + a_4\sum\alpha_i^2\beta_i + a_5\sum\alpha_i^3 + a_6\sum\alpha_i\beta_i^2 = \sum\alpha_i F_i \\ a_1\sum\beta_i + a_2\sum\alpha_i\beta_i + a_3\sum\beta_i^2 + a_4\sum\alpha_i\beta_i^2 + a_5\sum\alpha_i^2\beta_i + a_6\sum\beta_i^3 = \sum\beta_i F_i \\ a_1\sum\alpha_i\beta_i + a_2\sum\alpha_i^2\beta_i + a_3\sum\alpha_i\beta_i^2 + a_4\sum\alpha_i^2\beta_i^2 + a_5\sum\alpha_i^3\beta_i + a_6\sum\alpha_i\beta_i^3 = \sum\alpha_i\beta_i F_i \\ a_1\sum\alpha_i^2 + a_2\sum\alpha_i^3 + a_3\sum\alpha_i^2\beta_i + a_4\sum\alpha_i^3\beta_i + a_5\sum\alpha_i^4 + a_6\sum\alpha_i^2\beta_i^2 = \sum\alpha_i^2 F_i \\ a_1\sum\beta_i^2 + a_2\sum\alpha_i\beta_i^2 + a_3\sum\beta_i^3 + a_4\sum\alpha_i\beta_i^3 + a_5\sum\alpha_i^2\beta_i^2 + a_6\sum\beta_i^4 = \sum\beta_i^2 F_i \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} nb_1 + b_2\sum\alpha_i + b_3\sum\beta_i + b_4\sum\alpha_i\beta_i + b_5\sum\alpha_i^2 + b_6\sum\beta_i^2 = \sum\omega_i \\ b_1\sum\alpha_i + b_2\sum\alpha_i^2 + b_3\sum\alpha_i\beta_i + b_4\sum\alpha_i^2\beta_i + b_5\sum\alpha_i^3 + b_6\sum\alpha_i\beta_i^2 = \sum\alpha_i\omega_i \\ b_1\sum\beta_i + b_2\sum\alpha_i\beta_i + b_3\sum\beta_i^2 + b_4\sum\alpha_i\beta_i^2 + b_5\sum\alpha_i^2\beta_i + b_6\sum\beta_i^3 = \sum\beta_i\omega_i \\ b_1\sum\alpha_i\beta_i + b_2\sum\alpha_i^2\beta_i + b_3\sum\alpha_i\beta_i^2 + b_4\sum\alpha_i^2\beta_i^2 + b_5\sum\alpha_i^3\beta_i + b_6\sum\alpha_i\beta_i^3 = \sum\alpha_i\beta_i\omega_i \\ b_1\sum\alpha_i^2 + b_2\sum\alpha_i^3 + b_3\sum\alpha_i^2\beta_i + b_4\sum\alpha_i^3\beta_i + b_5\sum\alpha_i^4 + b_6\sum\alpha_i^2\beta_i^2 = \sum\alpha_i^2\omega_i \\ b_1\sum\beta_i^2 + b_2\sum\alpha_i\beta_i^2 + b_3\sum\beta_i^3 + b_4\sum\alpha_i\beta_i^3 + b_5\sum\alpha_i^2\beta_i^2 + b_6\sum\beta_i^4 = \sum\beta_i^2\omega_i \end{cases} \tag{3.6}$$

$$R1=\begin{pmatrix}916,7702\\29049,76\\30541,45\\971370,1\\1019129\\1161775\end{pmatrix},\quad R2=\begin{pmatrix}31,76\\998,45\\1156,6\\36246\\34545,25\\46922\end{pmatrix}.$$

Решения матричных уравнений вычисляются по формулам:

$$A=C^{-1}\cdot R1,$$

$$B=C^{-1}\cdot R2,$$

где C^{-1} – обратная матрица матрицы C. Реализация этих матричных вычислений дает следующие значения для коэффициентов уравнений регрессии (3.1) и (3.2):

$a_1=169{,}67;\ a_2=-2{,}61;\ a_3=-3{,}91;\ a_4=0{,}031;\ a_5=0{,}022;\ a_6=0{,}046;$

$b_1=-4{,}97;\ b_2=0{,}32;\ b_3=0{,}129;\ b_4=0{,}0004;\ b_5=-0{,}0038;\ b_6=-0{,}0024.$

Следовательно, влияния углов α и β на тяговое усилие F и скорость вращения конического элемента ω могут быть описаны уравнениями регрессии

$$F=169{,}67-2{,}61\alpha-3{,}91\beta+0{,}031\alpha\beta+0{,}022\alpha^2+0{,}046\beta^2,$$

$$\omega=-4{,}97+0{,}32\alpha+0{,}129\beta+0{,}0004\alpha\beta-0{,}0038\alpha^2-0{,}0024\beta^2.$$

Таким образом, расчет рациональных параметров эксплуатации ротационного конического почвообрабатывающего рабочего органа сводится к решению следующей двухкритериальной задачи оптимизации:

найти

$$\min F(\alpha,\beta)=169{,}67-2{,}61\alpha-3{,}91\beta+0{,}031\alpha\beta+0{,}022\alpha^2+0{,}046\beta^2,$$

$$\max \omega(\alpha,\beta)=-4{,}97+0{,}32\alpha+0{,}129\beta+0{,}0004\alpha\beta-0{,}0038\alpha^2-0{,}0024\beta^2.$$

при ограничениях

$$20\le\alpha\le 50,$$

$$20\le\beta\le 45.$$

Решение задачи оптимизации

Данную двухкритериальную задачу можно свести к однокритериальной, если в качестве целевой функции принять отношения построенных критериев:

$$\Phi(\alpha,\beta)=\frac{F(\alpha,\beta)}{\omega(\alpha,\beta)}$$

Тогда получим следующую однокритериальную задачу:

найти

$$\min \Phi(\alpha,\beta)=(169{,}67-2{,}61\alpha-3{,}91\beta+0{,}031\alpha\beta+0{,}022\alpha^2+0{,}046\beta^2)/$$
$$(-4{,}97+0{,}32\alpha+0{,}129\beta+0{,}0004\alpha\beta-0{,}0038\alpha^2-0{,}0024\beta^2),$$

при ограничениях

$$20\le\alpha\le 50,$$
$$20\le\beta\le 45.$$

Составим шаблон для решения данной задачи в электронной таблице и введем исходную числовую информацию. В ячейки B7:C7 запишем построенные выше выражения для функциональных зависимостей тягового усилия $F(\alpha,\beta)$ и скорости вращения $\omega(\alpha,\beta)$. Значение целевой функции будет подсчитываться в ячейке F4 по формуле = \$B\$7/\$C\$7. В ячейки D11:F14 запишем ограничения оптимизационной задачи.

Пусть ячейки B4:C4 являются изменяемыми и в них хранятся значения неизвестных углов α, β. Посредством изменения значений в этих ячейках надстройка **Поиск решения** будет искать оптимальное значение целевой функции.

После того, как все формулы и ограничения введены, в меню **Данные** выбираем **Поиск решения**. В появившееся диалоговое окно заносим необходимую информацию (рис. 3.3).

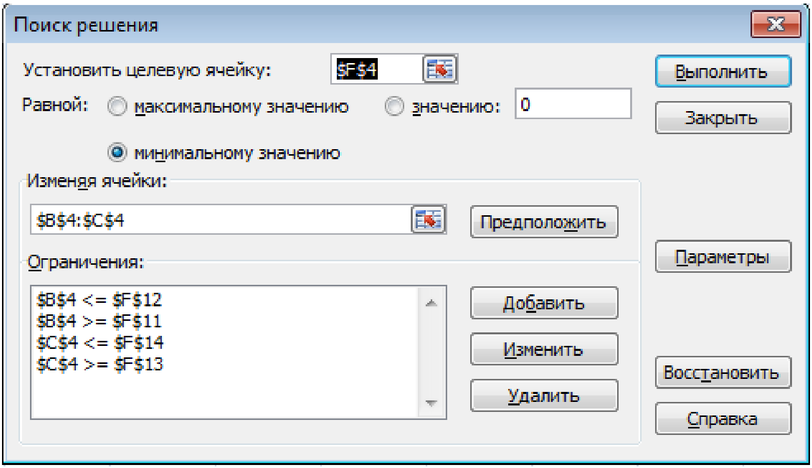

Рисунок 3.3 – Окно надстройки **Поиск решения.**

Далее необходимо нажать на кнопку **Параметры** и убедится отсутствия флажка в пункте «Линейная модель». Затем следует нажать «ОК», «Выполнить».

Искомые значения углов появятся в ячейках B4:C4, величины тягового усилия и скорости вращения - в ячейках B7:C7 (рис. 3.4).

	A	B	C	D	E	F
1						
2		Переменные				
3		Угол алфа	Угол вета			Целевая функция
4		42,31	29,21			15,57
5						
6		Тяговое усилие	Скорость вращения			
7		61,97	3,98			
8						
9					Ограничения	
10				Левая часть	Знак	Правая часть
11				$B$4	>=	20
12				$B$4	<=	50
13				$C$4	>=	20
14				$C$4	<=	45

Рисунок 3.4 – Окно с результатами решения

Таким образом, оптимальное значение угла атаки составляет α =42 градуса, значение угла наклона оси вращения к горизонту - β =29 градуса. При этом ожидаемое тяговое усилие составит F=61,97 кН, а скорость вращения конического элемента ω=3,98 сек$^{-1}$.

3.2. Проектирование полого вала с оптимальными характеристиками

Проектируется полый вал из прочного металлического сплава для передачи крутящего момента. По практическим соображениям, обусловленным функциональными особенностями устройства, максимальное значение радиуса r не должно превышать 0,1 м. Кроме того, согласно технологическим требованиям, толщина стенки вала t должна быть не менее 0,002 м. Длина вала составляет L = 0,5 м, максимальный крутящий момент - T = 60 Н·м. Материал сплава имеет следующие свойства: плотность ρ = 437 кг/м^3; модуль упругости E=12,1$\cdot$10^9 Н/м^2, предел прочности на сдвиг S= 0,014$\cdot$10^9 Н/м^2, коэффициент Пуассона μ =0,3.

Требуется выбрать такие значения для радиуса поперечного сечения вала r и толщины его стенки t, которые обеспечивают необходимую прочность при наименьшем весе и наибольшей жесткости.

Математическая формализация задачи.

Рассматриваемый вал может разрушиться либо под действием сдвиговых напряжений, либо в результате потери устойчивости при кручении. Сдвиговое напряжение, создаваемое крутящим моментом, определяется по формуле:

$$S_{cd} = \frac{T}{2\pi r^2 t}.$$

Чтобы вал не разрушился под действием сдвиговых напряжений, S_{cd} не должно превышать предел прочности на сдвиг используемого материала:

$$S_{cd} \le S.$$

Кроме того, чтобы он не потерял устойчивость при кручении, должно удовлетворяться условие

$$S_{cd} \le S_{kp},$$

где S_{kp} - критическое напряжение сдвига при кручении, для определения которого приводятся следующие формулы [5]:

$$S_{kp} = E\left(\frac{T}{L}\right)^2 \left[3 + \sqrt{\left(3{,}4 + \frac{0{,}24 \cdot L}{\sqrt{r \cdot T}}\right)^3}\right], \qquad \text{при } \frac{L}{r} \le 7{,}72\sqrt{\frac{r}{t}};$$

$$S_{kp} = 0{,}272E\sqrt{\left(\frac{t}{r}\right)^3}, \qquad \text{при } \frac{L}{r} > 7{,}72\sqrt{\frac{r}{t}}.$$

Другой характеристикой, определяющей работоспособность и материалоемкость вала, является жесткость. Большие деформации могут нарушить нормальную работу конструкции задолго до возникновения опасных для прочности напряжений. Нарушая равномерное распределение нагрузки, они вызывают сосредоточение усилий на отдельных участках деталей, в результате чего возникают местные, высокие напряжения, иногда значительно превосходящие величину номинального напряжения.

Жесткость - это способность системы сопротивляться действию внешних нагрузок с наименьшими деформациями. Жесткость оценивают коэффициентом жесткости, представляющим отношение силы, приложенной к системе, к максимальной деформации, вызываемой этой силой. В данной задаче под деформацией понимается угол закручивания (взаимного поворота концевых сечений), который для случая кручения вала постоянного сечения определяется формулой:

$$\theta = (T \cdot L)/(G \cdot J_{kp}),$$

где J_{kp} - момент инерции при кручении (полярный момент инерции сечения вала), $G = E/2(1+\mu)$ - модуль сдвига.

Поскольку угол закручивания берется в качестве целевой функции, при постановке задачи оптимизации можно использовать относительную деформацию вала единичной длины ($L = 1$):

$$\theta = \frac{T \cdot (1+\mu)}{2\pi r^3 t \cdot E}$$

Вес вала вычисляется формулой:

$$W = 2\pi r t L \rho \ .$$

Таким образом, можно сформулировать следующим двухкритериальную нелинейную задачу оптимизации:

найти

$$\theta(r,t) = \frac{T \cdot (1+\mu)}{2\pi r^3 t \cdot E} \to \min \ ,$$

$$W(r,t) = 2\pi r t L \rho \to \min \ ,$$

при условиях

$$\frac{T}{2\pi r^2 t} \le S \ ,$$

$$\frac{T}{2\pi r^2 t} \le S_{kp} \, ,$$

$$r \ge t \ ,$$

$$r \le 0{,}1 \, ,$$

$$t \ge 0{,}002 \, .$$

Задания к самостоятельной работе

Сформулировать двухкритериальную задачу оптимизации, свести ее к задаче нелинейного программирования с одним критерием и решить при помощи электронной таблицы Excel. Вариант задачи выбирается по номерам групп и студентов: *mn* - двухзначный номер студента, *k* – последнее число номера группы.

Задание 3.1

На основании проведенного эксперимента по изучению работы ротационного конического рабочего органа необходимо определить наилучшие значения углов атаки и наклона оси вращения к горизонту, обеспечивающих минимальное тяговое усилие и максимальную скорость вращения. Результаты экспериментов приведены в виде таблицы 3.2.

Таблица 3.2 – Результаты измерений тягового усилия F и скорости вращения конического элемента ω.

α, град	β, град	F, кН	ω, 1/сек
20	20	120+n	1,9
20	30	92	2+m
20	40	96	2,4
35	20	98-n	3,7
35	30	102	5,5+m
35	40	108	3,3
50	20	100+n	4,4
50	30	98	5
50	40	105	4

Задание 3.2

Проектируется полый вал из прочного металлического сплава для передачи крутящего момента. При этом максимальное значение радиуса r не должно превышать (0,1+0,05n) м., толщина стенки вала t должна быть не менее (0,002+0,001m) м. Длина вала составляет L = 0,5 м, максимальный крутящий момент - T = 60 Н·м. Материал сплава имеет следующие свойства: плотность ρ = 437 кг/м^3; модуль упругости E=$12{,}1 \cdot 10^9$ Н/м^2, предел прочности на сдвиг S=$0{,}014 \cdot 10^9$ Н/м^2, коэффициент Пуассона μ =0,3.

Требуется выбрать оптимальные значения r и нки t, которые обеспечивают необходимую прочность при наименьшем весе и наибольшей жесткости.

Порядок выполнения самостоятельной работы

Во время подготовки и выполнения самостоятельной работы студент должен:

1) изучить методы математического моделирования производственных задач в виде линейного и нелинейного программирования;

2) в соответствии с вариантом, выданным преподавателем, выполнить задание самостоятельной работы;

3) оформить отчет по выполненному заданию самостоятельной работы и защитить его.

Отчет по самостоятельной работе должен содержать:

1) задание;

2) результаты решения задачи с помощью электронной таблицы Excel;

3) анализ полученных результатов.

Вопросы для самоконтроля и подготовки к зачетам

1. Оптимизационные модели и их классификация.
2. Условные и безусловные задачи оптимизации.
3. Задача линейного программирования.
4. Графический метод решения задачи линейного программирования.
5. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования.
6. Транспортная задача.
7. Метод потенциалов для решения транспортной задачи.
8. Задача нелинейной оптимизации.
9. Прямые методы поиска оптимума.
10. Градиентные методы поиска оптимума.
11. Методы решения условных задач нелинейной оптимизации.
12. Представление типовых производственно-экономических задач в виде оптимизационных моделей.
13. Надстройка «Поиск решения» электронной таблицы EXCEL.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сдвижков О.А. Практикум по методам оптимизации: Практикум. – М.: Вузовский учебник, НИЦ ИНФРА-М, 2014. – 231 с.
2. Мастяева И.Н., Горемыкина Г.И., Семенихина О.Н. Методы оптимальных решений: Учебник. – М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. – 384 с.
3. Гордеев А.С. Моделирование в агроинженерии. – Санкт-Петербург: Изд-во ЛАНЬ, 2014. – 384 с.
4. Валиев А.Р., Яруллин Ф.Ф., Ибятов Р.И., Шириязданов Р.Р. Результаты экспериментальных исследований ротационного конического рабочего органа в почвенном канале // Вестник Казанского ГАУ. – 2014, № 3. С. 78-85.
5. Щуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ: Перевод с англ. – М.: Изд-во Мир, 1982. – 236 с.