Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Казанский государственный аграрный университет
Институт механизации и технического сервиса
Кафедра физики и математики

Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии

Казань
2020

УДК 512
ББК 22.1я7
Г 137

Составители: Газизов Е.Р., Зиннатуллина А.Н., Ибятов Р.И., Киселева Н.Г.

Рецензенты:

кандидат технических наук, доцент Шайхутдинов Р.Р.,
кандидат технических наук, доцент Горская Т.Ю.

Печатается по решению методической комиссии ИМ и ТС Казанского ГАУ (протокол № 7 от 23 апреля 2020 г.)

Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии: практикум/ Газизов Е.Р., Зиннатуллина А.Н., Ибятов Р.И., Киселева Н.Г.. – Казань: Изд-во Казанского государственного агарного университета, 2020. – 76с.

Практикум предназначен для изучения линейной алгебры и аналитической геометрии на практических занятиях и для самостоятельной работы студентов первого курса очной и заочной форм обучения КазанскогоГАУ. В практикуме приведены систематически подобранные задания и кратко изложены теоретические вопросы по основам линейной алгебры и аналитической геометрии.

УДК 512
ББК 22.1я7
Г 137

ISBN

Содержание

Введение

Настоящий практикум предназначен студентам Казанского государственного аграрного университета очной и заочной форм обучения, изучающим линейную алгебру и аналитическую геометрию в рамках дисциплин «Математика», «Математика (геометрия)» и «Высшая математика» по направлениям подготовки: 35.03.06 – «Агроинженерия», 23.03.03 – «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», 20.03.01 – «Техносферная безопасность», 23.05.01 – «Наземные транспортно-технологические средства», 44.03.04 – «Профессиональное обучение», 38.03.01 – Экономика, 38.03.02 – Менеджмент, 27.03.02 – Управление качеством, 38.03.04 – Государственное и муниципальное управление, 05.03.06 – Экология и природопользование, 35.03.06 – Лесное дело, 35.03.10 – Ландшафтная архитектура, 21.03.02 – Землеустройство и кадастры, 35.03.03 – Агрохимия и агропочвоведение, 35.03.04 – Агрономия, 35.03.05 – Садоводство, 35.03.07 – Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции. Практикум содержит системно подобранные задачи к основным разделам названного курса. Особенностью данного практикума является разработка заданий для пошагового освоения материала. Для удобства работы весь материал курса разбит на темы. Каждая тема начинается с необходимого теоретического минимума, включающая основные формулы. Эти материалы, а также наличие большого количества задач и приведенные в конце практикума ответы на все задания не только облегчают задачу усвоения материала на занятиях с преподавателем, но и позволяют студентам эффективно изучать предмет самостоятельно. Кроме того, приведенная подборка задач может служить базой для самостоятельной подготовки к зачетам и семестровым экзаменам, а также для выполнения контрольных работ. Решение задач данного практикума закрепляет базовые навыки, расширяет кругозор, повышает уровень мышления и общую культуру будущих специалистов. При изложении материала применялись традиционные обозначения и терминология. Часть задач взята из известных задачников. Все они приведены в списке литературы. Другая часть задач была составлена авторами пособия.

Тема 1. Определители

Таблица №1.1. Основные понятия.

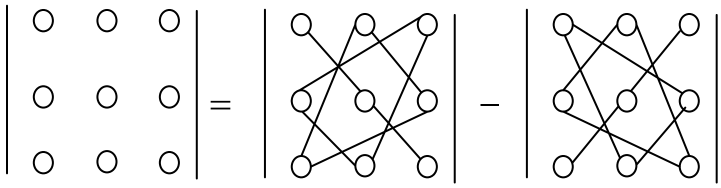
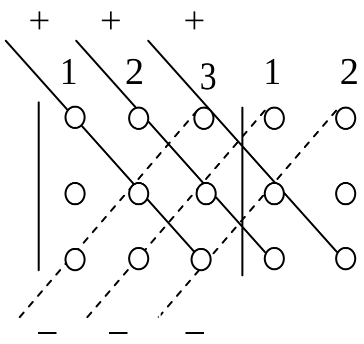
Понятия	Определения, обозначения, формулы
1. Определитель 1-го порядка	$A=(a_1)$, $\det A = a_1$
2. Определитель 2-го порядка	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
3. Определитель 3-го порядка	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{32}a_{21}a_{13} - - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$
4. Правило треугольников (Правило Саррюса)	
5. Правило «диагональных» элементов	
5. Минор m_{ij} элемента a_{ij}	$a_{ij} = a_{23}$ $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $m_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$
6. Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij}	$A_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$

Таблица №1.2. Основные свойства определителей.

Действия, признак	Результат
1. В определителе строки заменить столбцами	Определитель не изменится
2. В определителе переставить местами два параллельных ряда (строки или столбца)	Определитель меняет знак
3. Определитель имеет два одинаковых ряда	Определитель равен нулю.
4. Какой-либо ряд определителя имеет общий множитель	Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.
5. Если к элементам одного ряда определителя прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженного на любое число.	Определитель не изменится.
6. Разложить определитель по элементам ряда, например	а) по элементам второй строки $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{21}a_{21} + A_{22}a_{22} + A_{23}a_{23}$ б) по элементам третьего столбца $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{13}a_{13} + A_{23}a_{23} + A_{33}a_{33}$

№1.1. Вычислить определители второго порядка:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -8 & 6 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} -3 & -9 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} a-1 & b+1 \\ b-1 & a+1 \end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$;

10) $\begin{vmatrix} \log_a b & 1 \\ 1 & \log_b a \end{vmatrix}$; 11) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; 12) $\begin{vmatrix} a-b & b+a \\ b+a & a-b \end{vmatrix}$;

13) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$; 14) $\begin{vmatrix} x & y \\ x-y & x+y \end{vmatrix}$.

№1.2. Вычислить определители третьего порядка:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ -6 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 10 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -4 & -4 & 7 \\ 7 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;

10) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$; 11) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$; 12) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$;

13) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; 14) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; 15) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

№1.3. Найти миноры m_{ij} и алгебраические дополнения A_{ij}:

1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$, m_{12}, $m_{23}, m_{31}, A_{12}, A_{23}, A_{31}$;

2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, m_{11}, $m_{21}, m_{33}, A_{11}, A_{21}, A_{33}$;

3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}$, m_{13}, $m_{21}, m_{34}, m_{44}, A_{13}, A_{21}$, A_{34}, A_{44};

3) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$, m_{14}, $m_{32}, m_{23}, m_{43}, A_{14}, A_{32}$, A_{23}, A_{43}.

№1.4. Вычислить определители, разложив их по элементам какого-либо ряда:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -5 & 2 & -6 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -5 & -3 \\ 2 & -4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$;

10) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$.

№1.5. Решить уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 2x-1 & x+1 \\ x+2 & x-1 \end{vmatrix} = -6$ 2) $\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 7-x & x-1 \end{vmatrix} = 0$

3) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0$ 4) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2x+3 \\ 3-x & 1 & 1 \\ 2x+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

5) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & x-1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 4 & x+2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ 6) $\begin{vmatrix} -3 & x-1 & 1 \\ x+2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 6$

7) $\begin{vmatrix} x-2 & 3 & x \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 8) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & x-1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$

9) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 6$

Дополнительные задания

№1.6. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} x+y & -y \\ x & -x \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

10) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; 11) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; 12) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

$$13)\ \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};\quad 14)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix};\quad 15)\ \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$16)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix};\quad 17)\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix};\ 18)\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix};$$

$$19)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix};\qquad 20)\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$21)\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix};\qquad 22)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

№1.7. Решить уравнения:

$$1)\ \begin{vmatrix} 3x & 2-x^2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;\qquad 2)\ \begin{vmatrix} 2 & x^2-9 \\ 1 & 4x \end{vmatrix} = 0;$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 3x & 2 & 1 \\ 1 & -1 & x-1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;\qquad 4)\ \begin{vmatrix} 4 & x-2 & 3 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Тема 2. Матрицы

Таблица №2.1. Матрицы

Понятия	Определения, обозначения, формулы
1. Матрица	Прямоугольная таблица чисел $$A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
2. Транспонированная матрица к матрице A	$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
3. Треугольная матрица	$$A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - снизу $$A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - сверху
4. Единичная матрица	$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$
5. Сумма матриц $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и $B=(b_{ij})_{m\times n}$	Матрица $$C=(c_{ij})_{m\times n}=A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$
6. Произведение матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ на число λ	Матрица $$C=(c_{ij})_{m\times n}=\lambda A=(\lambda a_{ij})_{m\times n}$$
7. Произведение матриц $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и $B=(b_{ij})_{n\times k}$	Матрица $C=(c_{ij})_{m\times k}=AB,$ где $$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}$$

8. Обратная матрица к матрице $A=(a_{ij})_{n\times n}$	Матрица A^{-1} такая, что $$AA^{-1}=A^{-1}A=E$$
9. Ранг матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$	Целое число $r_A \geq 0$ – наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля

Таблица №2.2. Основные задачи

Задача	Способ решения
1. Найти определитель матрицы $A=(a_{ij})_{n\times n}$	$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ Если $\det A\neq 0$, то A называется невырожденной
2. Найти обратную матрицу A^{-1} к невырожденной матрице $A=(a_{ij})_{n\times n}$	Алгоритм: 1) Проверяем $\det A\neq 0$ 2) Составляем матрицу $(A_{ij})_{n\times n}$ A_{ij} – алгебраическое дополнение a_{ij} 3) Транспонируя полученную матрицу, получаем матрицу $\tilde{A}$ 4) $A^{-1}=\dfrac{1}{\lvert A\rvert}\tilde{A}$
3. Найти r_A ранг матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$	Преобразуем матрицу A к ступенчатому виду $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$ с помощью элементарных преобразований строк: 1) Перемена строк местами 2) Умножение всех элементов строки на число 3) Прибавление ко всем элементам строки соответствующих элементов параллельной строки, умноженных на число $r_A=k$

№2.1. Найти линейную комбинацию $C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$ матриц A и B

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, $\alpha = 1, \beta = -2;$

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $\alpha = 3, \beta = -2;$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\alpha = 4, \beta = 2;$

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & -5 \\ -8 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $\alpha = 4, \beta = -7.$

№2.2. Найти произведения матриц AB и BA, если это возможно

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -1\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & 0\\ 5 & 1\end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 5 & 4 & 0\\ 2 & -1 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -3 & 1\\ 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$

№2.3. Найти произведения матриц $(AB)\cdot C$ и $A\cdot(BC)$

1) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$;

3) $A=(1 \quad -3)$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ -2 & 5 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 5 & -2\\ 3 & -1 & 2 & 4\end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 3\\ 4 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}$.

№2.4. Выполнить действия над матрицами:

1) $AB+2C$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -3 & -1\\ 4 & -5\end{pmatrix}$;

2) $AB-3C$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -5 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$;

3) $AB+2C^{\mathrm{T}}$, если $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$;

4) $AB^{\mathrm{T}}+2C$, если $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -5\\ 4 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ -1 & 4 & 5\end{pmatrix}$;

5) $AB^{\mathrm{T}}-3C$, если $A=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 2 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -2 & -4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-4 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$;

6) $A^{\mathrm{T}}B+3C$, если $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$;

7) $AB-2C$, если $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$;

8) $AB+3C^{\mathrm{T}}$, если $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 1\\ 0 & -3 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$.

№2.5. Найти ранг матрицы методом окаймления миноров

1) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 8 & -4 & -6 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -12 & 10 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 3 \\ 3 & 15 & 5 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & -5 & 4 \\ -5 & 5 & -8 & -3 \end{pmatrix}$.

№2.6. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований

1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ -4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

№2.7. Найти обратную матрицу

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

№2.8. Решить матричные уравнения

1) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

5) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Дополнительные задания:

№2.9. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислить: **1)** $AC - 2B$; **2)** $B^T + 3C^T$; **3)** $C \cdot B \cdot A$.

№2.10. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Вычислить: **1)** $3A + BE$; **2)** $2A^T - 4B$; **3)** $A \cdot B \cdot E$.

№2.11. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислить: **1)** $a_{23} + a_{13} + a_{33}$; **2)** $b_{12} + b_{23} + b_{31}$; **3)** сумму элементов побочной (вспомогательной) диагонали матрицы E.

№2.12. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Вычислить: **1)** $A^T + 3B$; **2)** $A \cdot B$; **3)** $B^T \cdot C$.

№2.13. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Вычислить: **1)** $A \cdot B + C^T$; **2)** $A^T \cdot B$; **3)** $C^T + 3B$.

№2.14. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислить: **1)** $B \cdot E$; **2)** $A^T + 3B$; **3)** $A \cdot B - 4E$.

№2.15. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Вычислить: **1)** $A \cdot B$; **2)** $B^T - 5C$; **3)** $B \cdot C + A^2$.

Тема 3. Системы линейных алгебраических уравнений

Системой m линейных уравнений с n переменными, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

Таблица №3.1 Произвольная система линейных уравнений

Название, свойства	Определения, обозначения, формулы
1. Основная матрица системы	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$
2. Расширенная матрица системы	$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc\|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$
3. Решение системы	n значений неизвестных $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, …, $x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.
4. Совместная система уравнений	Система имеет хотя бы одно решение
5. Несовместная система уравнений	Система не имеет решений
6. Определенная совместная система уравнений	Система имеет единственное решение
7. Неопределенная совместная система уравнений	Система имеет более одного решения
8. Условие совместности системы (3.1)	Ранги основной и расширенной матриц равны: $r(A) = r(\overline{A}) = r$
9. Система (3.1) имеет единственное решение	$r(A) = r(\overline{A}) = r = n$
10. Система (3.1) имеет бесчисленное множество	$r(A) = r(\overline{A}) = r < n$.

решений	
11. Базисные переменные (при $r<n$ в системе уравнений (3.1))	Неизвестные $x_1, x_2, ..., x_r$, коэффициенты при которых входят в базисный минор $M_r \neq 0$,
12. Свободные переменные	Остальные переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$
13. Общее решение	Совокупность равенств, в которых базисные переменные линейно выражены через свободные

Таблица №3.2. Решение произвольной совместной системы линейных уравнений

Название	Действия
1. Метод Гаусса	1. Записать расширенную матрицу системы $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc\|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ 2. С помощью элементарных преобразований привести $\overline{A}$ к ступенчатому (в частности, треугольному) виду $\left(\begin{array}{cccccc\|c} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1r} & ... & c_{1n} & d_1 \\ & c_{22} & ... & c_{2r} & ... & c_{2n} & d_2 \\ & & ... & ... & ... & ... & ... \\ & & & c_{rr} & ... & c_{rn} & d_r \end{array}\right)$ где $\mathrm{r} \leq n, c_{ii} \neq 0, i = \overline{1,r}.$ 3. Записать систему с полученной расширенной матрицей и решить ее.

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.2}$$

Основная матрица такой системы квадратная. Ее определитель Δ называется определителем системы. Если определитель системы отличен от нуля, то система называется невырожденной. Невырожденная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение.

Таблица №3.3. Методы решения невырожденных систем линейных уравнений

Название	Определения, обозначения и формулы
1. Метод Крамера	$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ – определитель системы Из определителя Δ путем замены первого столбца столбцом свободных членов, получим определители $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$ $\dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$ Тогда решение системы (3.2) определяется по формулам: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$
2. Матричный метод	Система в матричной форме имеет вид $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ − основная матрица системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ − матрица-столбец неизвестных,

	$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_3 \end{pmatrix}-$ матрица-столбец свободных членов. Тогда решение системы определяется по формуле $X=A^{-1}B$, где $A^{-1}-$обратная матрица к основной матрице.

Система называется однородной, если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}. \qquad (3.3)$$

Таблица №3.2 Однородная система линейных уравнений

Название, свойства	Определения, обозначения, формулы
1. Нулевое или тривиальное решение	Однородная система всегда совместна, то есть имеет хотя бы одно решение: $x_1=0$, $x_2=0$, …, $x_n=0$
2. Условие для того, чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевые решения,	Необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, то есть $\det A=0$.
3. Условие для того, чтобы произвольная система однородных уравнений (3.3) имела ненулевые решения,	Необходимо и достаточно, чтобы ранг r ее основной матрицы был меньше числа n неизвестных, то есть $r<n$.
4. Свойства решений однородной системы	1) Если система (3.3) имеет ненулевое решение $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, то она имеет и бесконечное множество решений $(k\alpha_1,k\alpha_2,\ldots,k\alpha_n)$, где $k-$ любое число. 2) Если система (3.3) имеет p ненулевых решений $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\ldots,(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, то она имеет и бесконечное множество решений вида $(k_1\alpha_1+\ldots+k_p\beta_1,\ldots,k_1\alpha_n+k_p\beta_n)$, где $k_i, i=\overline{1,p}-$ любые числа (не все равные нулю).

5. Линейная комбинация выражений $(\alpha_1,...,\alpha_n),...,(\beta_1,...,\beta_n)$	Выражение $\left(k_1\alpha_1+...+k_p\beta_1,...,k_1\alpha_n+k_p\beta_n\right)$
6. Решения $(\alpha_1,...,\alpha_n),...,(\beta_1,...,\beta_n)$ линейно независимые	Ни одно из них не является линейной комбинацией остальных
4. Фундаментальная система решений	Совокупность p линейно независимых решений $(\alpha_1,...,\alpha_n),...,(\beta_1,...,\beta_n)$, если любое другое решение системы является линейной комбинацией этих решений. Состоит из $n-r$ решений.
5. Алгоритм нахождения фундаментальной системы решений	1. Выражаем r основных (базисных) переменных (с неравным нулю базисным минором) через неосновные (свободные). 2. Поочередно заменяем $n-r$ неосновных переменных элементами каждой строки невырожденной квадратной матрицы порядка $n-r$, например, единичной E_{n-r}.

№3.1. Решить системы уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$;

5) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$;

7) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$; 8) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$;

9) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$; 10) $\begin{cases} 6x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 10, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -6. \end{cases}$;

11) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = -5, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -9. \end{cases}$; 12) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$;

13) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -3, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = -8. \end{cases}$; 14) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 2, \\ -4x_1 - 6x_2 + 8x_3 = -1. \end{cases}$;

15) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 20 \end{cases}$; 16) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -16 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 24 \end{cases}$;

17) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -6. \end{cases}$; 18) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$;

19) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -8, \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = -11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$; 20) $\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 4x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$;

21) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$; 22) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -7, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$;

23) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$;

24) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 7, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases}$;

25) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = -9, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases}$;

26) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -7, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -3. \end{cases}$;

27) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5, \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -7, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -9, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 8. \end{cases}$.

№3.2. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4,; \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \; ; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2,; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \; ; \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \; ; \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3,; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -3. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -9, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = 3,; \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 8, \; ; \\ -4x_1 + 3x_2 - x_3 = -7. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = -5, \\ 6x_1 - x_2 + 4x_3 = -4. \end{cases}$;

10) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ -3x_1 + x_2 + 5x_3 = 2, \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$;

11) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$;

12) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 20. \end{cases}$;

13) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 11, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$;

14) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -10, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -6, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -8. \end{cases}$;

15) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 4, \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$;

16) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_5 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 5, \\ -2x_1 + 7x_2 + 7x_3 + x_5 = 2. \end{cases}$;

17) $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 8, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$;

18) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$;

19) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$;

20) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 - 8x_3 + x_4 + 3x_5 = 3, \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 = -1. \end{cases}$;

21) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$;

22) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3. \end{cases}$;

23) $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18. \end{cases}$;

24) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \quad + 3x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + \quad = 0, \\ 3x_1 + \quad + x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + \quad + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$;

25) $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$;

26) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$;

27) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$;

28) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 7. \end{cases}$.

№3.3. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для однородной системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ -x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 = 0. \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$;

5) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$;

6) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$;

7) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$;

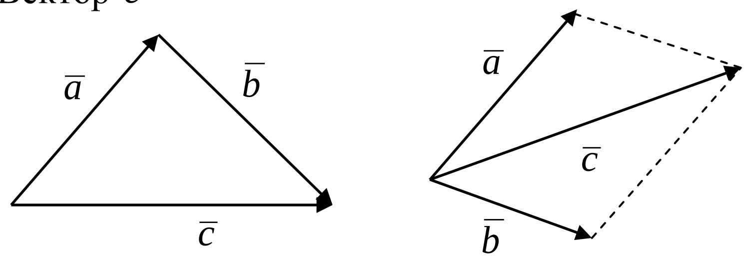
8) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$;

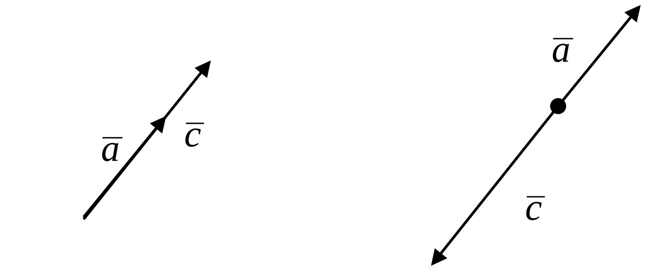
9) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$;

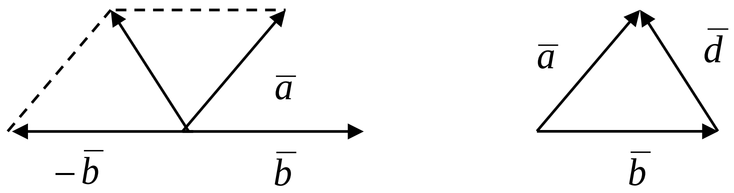
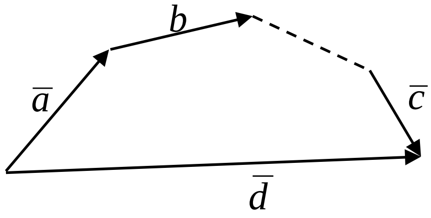
10) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$.

Тема 4. Векторы

Таблица №4.1. Линейные операции над векторами

<table>
<tr><th>Операция</th><th>Результат</th></tr>
<tr><td>1. Сумма $\overline{a}+\overline{b}$</td><td>Вектор $\overline{c}$


Правило треугольника Правило параллелограмма</td></tr>
<tr><td>2. Произведение вектора $\overline{a}$ на число λ</td><td>Вектор $\overline{c}=\lambda\overline{a}$


$\lambda>0$, $c=\lambda a$ $\lambda<0$, $c=|\lambda|a$</td></tr>
<tr><td>3. Разность $\overline{a}-\overline{b}$</td><td>Вектор $\overline{d}$
$\overline{d}=\overline{a}+(-\overline{b})$

</td></tr>
<tr><td>4. Сумма $\overline{a}+\overline{b}+...+\overline{c}$</td><td>Вектор $\overline{d}$


Правило многоугольника</td></tr>
</table>

Таблица №4.2. Операции над векторами в координатах

Пусть $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\bar{c} = (x_3, y_3, z_3)$

Операция, определение	Выражение в координатах
1. Сумма $\bar{a} + \bar{b}$	$\bar{a} + \bar{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
2. Разность $\bar{a} - \bar{b}$	$\bar{a} - \bar{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$
3. Произведение вектора $\bar{a}$ на число λ	$\lambda\bar{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$
4. Скалярное произведение векторов – число $\bar{a} \cdot \bar{b} = ab\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$	$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$
5. Векторное произведение векторов – вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ 5.1. $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$ 5.2. $c = ab\sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$ 5.3. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – правая тройка	$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ $\bar{a} \times \bar{b} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$
6. Смешанное произведение векторов – число $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

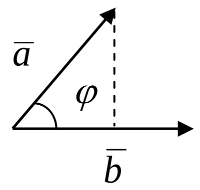
Таблица №4.3. Взаимное расположение векторов

Пусть $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\bar{c} = (x_3, y_3, z_3)$

Расположение векторов	Условие
1. Коллинеарные векторы (лежат на одной прямой или параллельных прямых)	$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$
2. Перпендикулярные векторы (лежат на перпендикулярных прямых)	$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$
3. Компланарные векторы (лежат в одной плоскости)	$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$, $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$

Таблица №4.4. Основные формулы

Пусть даны точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$

Понятие	Формула
1. Координаты вектора $\overline{AB}$	$\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$
2. Длина (модуль, норма) вектора $\overline{AB}$	$\lvert AB\rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
3. Координаты точки $C(x_0, y_0, z_0)$, делящей отрезок $[AB]$ в отношении $\lambda : \frac{\lvert AC\rvert}{\lvert CB\rvert} = \lambda$	$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$
4. Модуль (длина) вектора $\overline{a} = (x, y, z)$	$\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
5. Направляющие косинусы вектора $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$	$\cos(\widehat{x, \overline{a}}) = \frac{a_x}{\lvert\overline{a}\rvert}$, $\cos(\widehat{y, \overline{a}}) = \frac{a_y}{\lvert\overline{a}\rvert}$, $\cos(\widehat{z, \overline{a}}) = \frac{a_z}{\lvert\overline{a}\rvert}$
6. Проекция вектора $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ на направление вектора $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$	$Пр_{\overline{b}}\overline{a} = a\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$ 
7. Орты осей координат Ox, Oy и Oz	$\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – единичные векторы, совпадающие с положительным направлением осей Ox, Oy и Oz соответственно
8. Разложение вектора $\overline{a} = (x, y, z)$ по векторам $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$,	$\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$
7. Площадь треугольника ABC	$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\lvert\overline{AB} \times \overline{AC}\rvert$
9. Площадь параллелограмма $ABCD$	$S_{ABCD} = \lvert\overline{AB} \times \overline{AC}\rvert$
10. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.	$V = \lvert\overline{a}\overline{b}\overline{c}\rvert$

11. Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.	$V = \frac{1}{6}\left\|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right\|$

№4.1. Найти длину и направление радиус-вектора точки $A(5;-3;4)$.

№4.2. Даны векторы $\overline{a} = (3,-1)$, $\overline{b} = (1,-2)$ и $\overline{c} = (-1,7)$. Построить вектор и $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$, найти его длину и разложить вектор $\overline{p}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

№4.3. Даны два вектора $\overline{a} = (2,1,1)$ и $\overline{b} = (-3,0,2)$. Найти длину и направление вектора $\overline{c} = 2\overline{a} + 3\overline{b}$.

№4.4. Разложить вектор $\overline{c} = (3,4)$ по векторам $\overline{a} = (3,-1)$ и $\overline{b} = (1,-2)$.

№4.5. Определить угол между векторами $\overline{a} = -\overline{i} + \overline{j}$ и $\overline{b} = \overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}$.

№4.6. Раскрыть скобки в выражении $(2\overline{i} - \overline{j}) \cdot \overline{j} + (\overline{j} - 2\overline{k}) \cdot \overline{k} + (\overline{i} - 2\overline{k})^2$.

№ 4.7. На плоскости Oxy построить векторы $\overline{OA} = \overline{a} = 2\overline{i}$, $\overline{OB} = \overline{b} = 3\overline{i} + 4\overline{j}$ и $\overline{OC} = \overline{c} = 3\overline{i} + 5\overline{j}$. Разложить геометрически и аналитически вектор $\overline{c}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

№4.8. Даны координаты точек $A(2;-1;3)$, $B(1;1;1)$, $C(0;0;5)$. Найти углы ΔABC.

№4.9. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол $\varphi = \pi/3$. Найти длину вектора $\overline{c} = 2\overline{a} - 3\overline{b}$, если $a = 2$, $b = 1$.

№4.10. Даны векторы $\overline{a} = 2\overline{m} + 4\overline{n}$ и $\overline{b} = \overline{m} - \overline{n}$, где $\overline{m}$ и $\overline{n}$ – единичные векторы, образующие угол в 120°. Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

№4.11. В плоскости находятся три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$. Известно, что $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$, $(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = 60^\circ$, $(\widehat{\overline{b},\overline{c}}) = 60^\circ$. Найти длину вектора $\overline{d} = -\overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$.

№4.12. Даны векторы $\overline{a} = (1,-2,2)$ и $\overline{b} = (2,-2,-1)$. Найти $2\overline{a}^2 - 4\overline{a}\overline{b} + 5\overline{b}^2$.

№4.13. Найти $(3\overline{a} - 5\overline{b})(2\overline{a} + 7\overline{b})$, если $a = 3$, $b = 1$, $\overline{a} \perp \overline{b}$.

№4.14. Даны длины векторов $a = 11$, $b = 23$, $|\bar{a} - \bar{b}| = 30$. Определить $|\bar{a} + \bar{b}|$.

№4.15. При каких значениях α и β векторы $\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + \beta\bar{k}$ и $\bar{b} = \alpha\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$

а) коллинеарны, б) ортогональны?

№4.16. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны, а вектор $\bar{c}$ образует с ними углы, равные $\pi/3$. Зная, что $a = 1$, $b = 1$, $c = 4$, найти $(\bar{a} - 2\bar{b})(\bar{c} - \bar{a})$.

№4.17. Даны векторы $\bar{a} = (3,-6,-1)$, $\bar{b} = (1,4,-5)$, $\bar{c} = (3,-4,-12)$. Найти проекцию вектора $\bar{a} + \bar{b}$ на вектор $\bar{c}$.

№4.18. Даны вершины четырехугольника $A(-4;-3;-2)$, $B(2;-2;-3)$, $C(-8;-5;1)$, $D(4;-3;1)$. Найти длины его диагоналей.

№4.19. Даны векторы $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - 4\bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$. Найти вектор $\bar{d}$, если $\bar{d} \cdot \bar{a} = 4$, $\bar{d} \cdot \bar{b} = -3$, $\bar{d} \cdot \bar{c} = 6$.

№4.20. Найти вектор $\bar{m}$, зная что $\bar{m} \perp \bar{c}$, $\bar{m} \cdot \bar{a} = 4$, $\bar{m} \cdot \bar{b} = 35$, где $\bar{a} = (3,-2,4)$, $\bar{b} = (5,1,6)$, $\bar{c} = (-3,0,2)$.

№4.21. Даны векторы $\bar{a} = 6\bar{i} - 8\bar{j} + 5\sqrt{2}\bar{k}$ и $\bar{b} = 2\bar{i} - 4\bar{j} + \sqrt{2}\bar{k}$. Найти угол, образуемый вектором $\bar{a} - \bar{b}$ с осью Oz.

№.4.22. При каком значении m векторы $\bar{a} = m\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - m\bar{k}$ перпендикулярны?

№4.23. Найти проекцию вектора $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ на направление вектора $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$.

№4.24. Найти векторное произведение векторов: а) $\bar{a} = (2,3,5)$, $\bar{b} = (1,2,1)$; б) $\bar{a} = (5,-4,7)$, $\bar{b} = (1,1,-2)$.

№4.25. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах:

а) $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j}$, $\overline{b} = \overline{i} - 2\overline{j}$;

б) $\overline{a} = 3\overline{i} + \overline{j}$, $\overline{b} = \overline{i} + 4\overline{k}$.

№4.26. Угол между векторами $\overline{m}$ и $\overline{n}$ составляет 45°. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{m} - 3\overline{n}$ и $3\overline{m} + 4\overline{n}$, если $m = n = 2$.

№4.27. Найти площадь треугольника с вершинами $A(2;2;2)$, $B(1;3;3)$, $C(3;4;2)$.

№4.28. Даны вершины треугольника $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

№4.29. Зная две стороны $\overline{AB} = (1,2,3)$ и $\overline{BC} = (3,2,1)$ треугольника ABC, вычислить длину высоты AD.

№4.30. Найти длины диагоналей и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = \overline{i} - \overline{j}$, $\overline{b} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$.

№4.31. Найти смешанное произведение векторов:

а) $\overline{a} = (1,1,2)$, $\overline{b} = (1,-2,3)$, $\overline{c} = (2,1,1)$;

б) $\overline{a} = 5\overline{i} - 2\overline{j} - \overline{k}$, $\overline{b} = 4\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{c} = \overline{i} + 2\overline{j} - 2\overline{k}$.

№4.32. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a} = (3,2,1)$, $\overline{b} = (1,0,-1)$, $\overline{c} = (1,-2,1)$

№4.33. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(0;0;1)$, $B(7;-1;-2)$, $C(3;2;1)$, $D(-4;2;1)$. Найти длину высоты, опущенной на грань ABC.

№4.34. В тетраэдре с вершинами $A(3;1;1)$, $B(1;4;1)$, $C(1;1;6)$, $D(3;4;9)$ найти:

а) длину ребра AC;

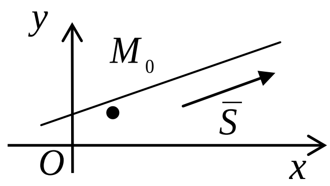
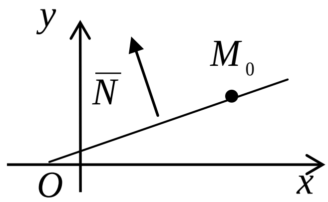
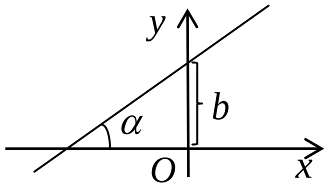
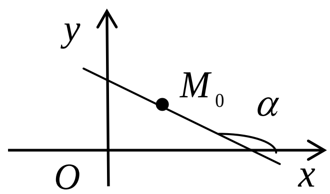
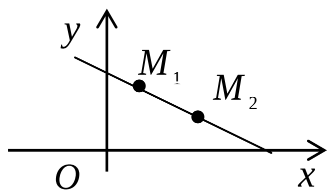
б) площадь грани ABC;

в) длину высоты, проведенной к грани ABC.

Тема 5. Прямая на плоскости

Таблица №5.1. Уравнение прямой на плоскости

$Ax + By + C = 0$ – общее уравнение прямой, $A^2 + B^2 \neq 0$.

Название уравнения	Уравнение	Расшифровка параметров	Изображение
1. Каноническое уравнение прямой	$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$	$\overline{S} = (m, n)$ – направляющий вектор прямой, $M_0(x_0, y_0)$ – точка на прямой	
2. Уравнение прямой с нормальным вектором	$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$	$\overline{N} = (A, B)$ – нормальный вектор прямой, $M_0(x_0, y_0)$ – точка на прямой	
3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом	$y = kx + b$	$k = tg\alpha$ – угловой коэффициент, b – отрезок, отсекаемый на оси Oy	
4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении	$y - y_0 = k(x - x_0)$	$k = tg\alpha$ – угловой коэффициент, $M_0(x_0, y_0)$ – точка на прямой	
5. Уравнение прямой, проходящей через две точки	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	$M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ – точки прямой	

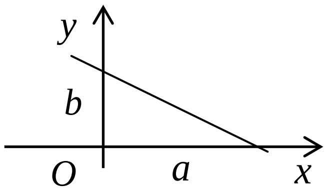
6. Уравнение прямой в отрезках	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	a, b – отрезки, отсекаемые на осях координат	

Таблица №5.2. Основные задачи на прямую в плоскости

Задача	Решение
1. Проверить принадлежность точки $M(x_1, y_1)$ прямой $Ax+By+C=0$	Точка $M(x_1, y_1)$ принадлежит прямой, если выполняется равенство $Ax_1+By_1+C=0$
2. Найти расстояние d от точки $M(x_1, y_1)$ до прямой $Ax+By+C=0$	$d=\frac{\lvert Ax_1+By_1+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$
3. Найти угол φ между прямыми а) $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ б) $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ в) $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}$	а) $\cos\varphi=\frac{\overline{N}_1\overline{N}_2}{\lvert\overline{N}_1\rvert\cdot\lvert\overline{N}_2\rvert}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$ б) $tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ в) $\cos\varphi=\frac{\overline{S}_1\overline{S}_2}{\lvert\overline{S}_1\rvert\cdot\lvert\overline{S}_2\rvert}=\frac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2}}$
4. Проверить параллельность прямых	а) $(\overline{N}_1 \parallel \overline{N}_2)\Rightarrow\left(\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\right)$ б) $k_1=k_2$ в) $(\overline{S}_1 \parallel \overline{S}_2)\Rightarrow\left(\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}\right)$
5. Проверить перпендикулярность прямых	а) $(\overline{N}_1 \perp \overline{N}_2)\Rightarrow(A_1A_2+B_1B_2=0)$ б) $k_1\cdot k_2=-1$ в) $(\overline{S}_1 \perp \overline{S}_2)\Leftrightarrow(m_1m_2+n_1n_2=0)$

6. Найти точку пересечения непараллельных прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$	Решить систему уравнений $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$ $x=\dfrac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$, $y=\dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$

№5.1. Найти точки равноудаленные от точек $A(2;3)$ и $B(4;7)$.

№5.2. Проверить, лежат ли на одной прямой точки $A(2;0)$, $B(6;4)$ и $C(11;9)$.

№5.3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(5;-1)$ под углом 45° к оси Ox.

№5.4. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(-4;1)$ параллельно осям координат.

№5.5. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $A(-4;2)$ и $B(3;-1)$.

№5.6. Найти точку пересечения и угол между прямыми $y=2x-3$ и $y=0{,}5x+1$.

№5.7. Даны вершины треугольника $A(7;9)$, $B(2;-3)$ и $C(3;6)$. Найти длину высоты AD.

№5.8. Дана прямая $2x+5y-1=0$. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;3)$: а) параллельно данной прямой; б) перпендикулярно данной прямой.

№5.9. Даны середины сторон треугольника $P(1;2)$, $Q(5;-1)$ и $R(-4;3)$. Найти уравнения его сторон.

№5.10. Даны вершины треугольника $A(-1;3)$, $B(3;-2)$, $C(5;3)$. Составить уравнения: а) трех его сторон, б) медианы, проведенной из вершины B, в) высоты, опущенной из вершины C на сторону AB.

№5.11. Указать какие из следующих прямых параллельны и перпендикулярны?

1) $2x-7y+3=0$; 2) $4x-14y+1=0$;

3) $7x+2y-5=0$; 4) $3x+6y-2=0$.

№5.12. На прямой $x+y-6=0$ найти точку *M*, равноудаленную от точек $A(3;5)$ и $B(2;6)$.

№5.13. На оси абсцисс найти такую точку *M*, расстояние которой до точки $N(2;-3)$ равнялось бы 5.

№5.14. На оси ординат найти такую точку *M*, расстояние которой до точки $N(-8;13)$ равнялось бы 17.

№5.15. Найти точку, симметричную точке $M(4;5)$ относительно прямой $8x+6y-37=0$.

№5.16. Найти угол между двумя прямыми $y=2x-1$ и $y=-3x+1$.

№5.17. Вершинами треугольника *ABC* являются точки $A(4;-2)$, $B(10;6)$, $C(5;-4)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины *C*.

№5.18. Даны координаты вершин треугольника $A(-1;3)$, $B(4;-2)$, $C(0;-5)$. Составить уравнения его сторон.

№5.19. Вершины четырехугольника имеют координаты $A(1;0)$, $B(4;2)$, $C(6;-1)$, $D(3;-2)$. Найти точку пересечения его диагоналей.

№5.20. В параллелограмме *ABCD* даны три вершины $A(-1;3)$, $B(4;6)$, $D(1;-5)$. Составить уравнения его сторон.

№5.21. В треугольнике *ABC* известны вершины $A(-3;-4)$, $B(1;-2)$, $C(7;-2)$. Составить уравнение средней линии, параллельной стороне *AC*.

№5.22. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x+2y+7=0$ и $4x+3y+9=0$ и параллельной прямой $2x+y-3=0$.

№5.23. Зная уравнения двух сторон параллелограмма $x-y+1=0$ и $2x+3y-6=0$ и одну из его вершин $C(7;1)$, составить уравнения двух других сторон.

№5.24. Даны координаты двух противоположных вершин ромба $M(-3;2)$ и $N(7;-6)$. Составить уравнения диагоналей ромба.

№5.25. Найти точку, равноудаленную от трех данных точек $P(2;-3)$, $Q(6;-1)$, $R(7;2)$.

№5.26. Найти точку, симметричную точке $(-2;-2)$ относительно прямой $x+y-3=0$.

№5.27. Даны вершины треугольника $A(10;4)$, $B(6;8)$, $C(-1;-4)$. Найти уравнения медиан треугольника.

№5.28. Даны стороны треугольника $(AB)\,x+y-6=0$, $(BC)\,3x-5y+14=0$, $(AC)\,5x-3y-14=0$. Найти уравнения медиан треугольника.

№5.29. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $8x+3y+1=0$, $2x+y-1=0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x+2y+3=0$. Определить координаты вершин этого параллелограмма.

№5.30. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $2x-3y+5=0$, $3x+2y-7=0$ и одна из его вершин $A(2;-3)$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.

№5.31. Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника $A(5;-4)$, $B(-1;3)$, $C(-3;-2)$ параллельно противоположным сторонам.

№5.32. Даны последовательные вершины выпуклого четырехугольника $A(-3;-1)$, $B(3;9)$, $C(7;6)$ и $D(-2;-6)$. Определить точку пересечения его диагоналей.

№5.33. Даны две вершины треугольника $M_1(-10;2)$ и $M_2(6;4)$; его высоты пересекаются в точке $N(5;2)$. Определить координаты третьей вершины M_3.

№5.34. Составить уравнения сторон треугольника, если даны одна из его вершин B (–4; –5) и уравнения двух высот: $5x+3y-4=0$ и $3x+8y+13=0$.

№5.35. В прямоугольном треугольнике известны уравнения гипотенузы $x-3y+7=0$ и катета $x+y-9=0$. Найти уравнение второго катета, если известны координаты середины гипотенузы (2; 3).

№5.36. Точки $A(1;3)$ и $B(3;1)$ являются концами одной из диагоналей ромба, длина другой диагонали равна $4\sqrt{2}$. Написать уравнения сторон ромба.

№5.37. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $C(4;-1)$, а также уравнения высоты $2x-3y+12=0$ и медианы $2x+3y=0$, проведенной из другой вершины.

№5.38. Даны вершины треугольника $A(1;-1)$, $B(-2;1)$ и $C(3;5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B.

№5.39. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x-12y-65=0$, $5x-12y+26=0$. Вычислить его площадь.

№5.40. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения медиан треугольника, стороны которого лежат на прямых $2x+3y-18=0$, $x-2y-2=0$, $6x-5y+2=0$.

Тема 6. Линии второго порядка

Таблица №6.1. Окружность

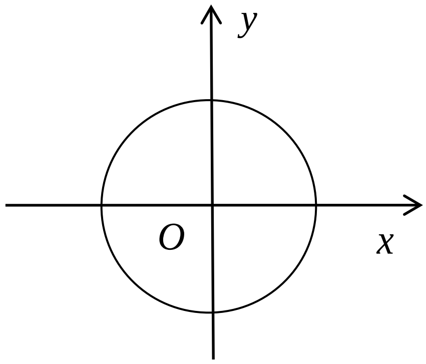
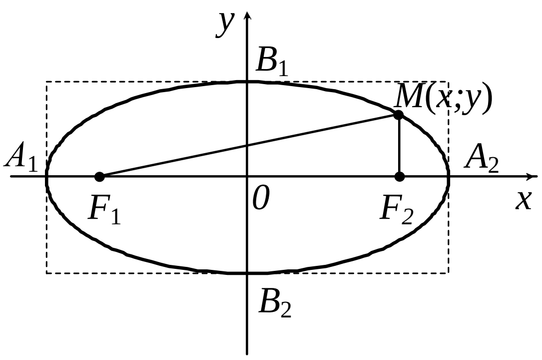
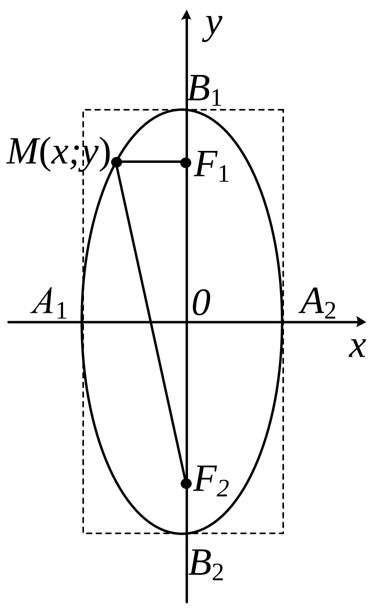
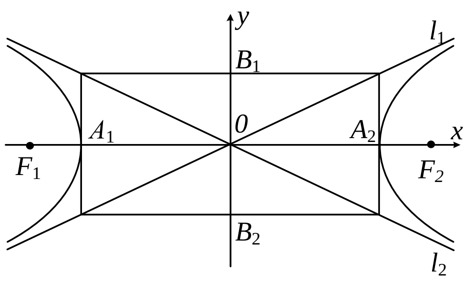
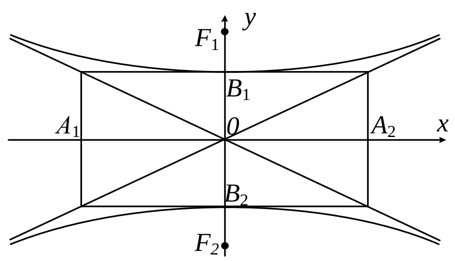
<table>
<tr><th>Понятие, свойство</th><th>Вид, формулы</th></tr>
<tr><td>1. График</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2. Каноническое уравнение</td><td>$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, где $O(x_0;y_0)$ – центр окружности, R – радиус окружности.</td></tr>
</table>

Таблица №6.2. Эллипс

<table>
<tr><th>Понятие, свойство</th><th colspan="2">Вид, формулы</th></tr>
<tr><td>1. График</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2. Каноническое уравнение</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$</td><td>$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$</td></tr>
</table>

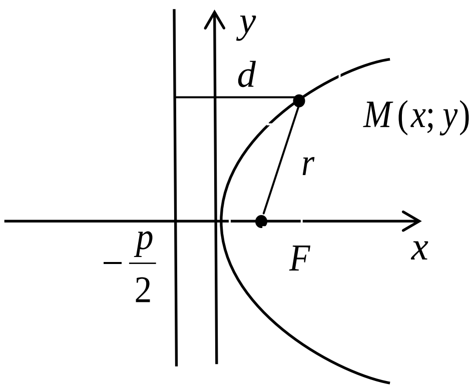
3. Верши-ны, оси	$A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ $2a$ – большая ось $2b$ – малая ось $(a > b)$	$A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ $2b$ – большая ось $2a$ – малая ось $(a < b)$
4. Фокусы	$F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$F_1(0;c)$, $F_2(0;-c)$ $c = \sqrt{b^2 - a^2}$
5. Фокаль-ные радиу-сы	$r_1 = \lvert F_1M \rvert$, $r_2 = \lvert F_2M \rvert$ $M(x, y)$ – произвольная точка эллипса	
6. Основное (фокальное) свойство	$r_1 + r_2 = 2a$ $r_1 = a + \varepsilon x$ $r_2 = a - \varepsilon x$	$r_1 + r_2 = 2b$ $r_1 = b - \varepsilon y$ $r_2 = b + \varepsilon y$
7. Эксцен-триситет	$\varepsilon = c/a$, $\varepsilon < 1$	$\varepsilon = c/b$, $\varepsilon < 1$

Таблица №6.3. Гипербола

Понятие, свойство	Вид, формулы	
1. График		
2. Канони-ческое уравнение	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
3. Верши-ны, оси	$A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ $2a$ – действительная ось $2b$ – мнимая ось	$B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ $2a$ – мнимая ось $2b$ – действительная ось
4. Фокусы	$F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$F_1(0;c)$, $F_2(0;-c)$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
5. Фокаль-ные радиу-сы	$r_1 = \lvert F_1M \rvert$, $r_2 = \lvert F_2M \rvert$ $M(x;y)$ – произвольная точка гиперболы	

6. Основное (фокальное) свойство	$\lvert r_1 - r_2 \rvert = 2a$ $r_1 = \lvert \varepsilon x + a \rvert$ $r_2 = \lvert \varepsilon x - a \rvert$	$\lvert r_1 - r_2 \rvert = 2b$ $r_1 = \lvert \varepsilon y - b \rvert$ $r_2 = \lvert \varepsilon y + b \rvert$
7. Эксцентриситет	$\varepsilon = c/a$, $\varepsilon > 1$	$\varepsilon = c/b$, $\varepsilon > 1$
8. Дополнительные свойства	$y = \pm \frac{b}{a} x$ – асимптоты	

Таблица №6.4. Парабола

Понятие, свойство	Вид, формулы
1. График	
2. Каноническое уравнение	$y^2 = 2px$, p – параметр параболы
3. Вершина, директриса	$O(0;0)$, $x = -\frac{p}{2}$
4. Фокус	$F_1(p/2;0)$,
5. Основное фокальное свойство	$\lvert FM \rvert = \lvert MN \rvert$, $M(x, y)$ – произвольная точка параболы

№6.1. Составить уравнение окружности, проходящей через точки а) $A(1;5)$, $B(-4;0)$, $C(4;-4)$, б) $A(-1;3)$, $B(-2;-4)$, $C(6;2)$.

№6.2. Найти центр и радиус окружности

а) $x^2 + y^2 + 12x - 10y + 45 = 0$,

б) $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0$,

в) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$,

г) $x^2 + y^2 + 10x + 4y + 13 = 0$,

д) $9x^2 + 9y^2 + 36x - 18y + 20 = 0$,

е) $4x^2 + 4y^2 - 16x + 8y + 15 = 0$,

ж) $6x^2 + 6y^2 + 48x + 24y + 29 = 0$,

з) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 8y = 0$.

№6.3. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(5;3)$ с центром в точке пересечения прямых $5x - 3y - 13 = 0$ и $x + 4y + 2 = 0$.

№6.4. Составить уравнение окружности, если она проходит через точки $A(3;1)$ и $B(-1;3)$, а центр лежит на прямой $3x - y - 2 = 0$.

№6.5. Построить окружности: а) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$, б) $x^2 + y^2 - 8x = 0$, в) $x^2 + y^2 + 4y = 0$.

№6.6. Найти фокусы и эксцентриситет эллипса а) $x^2 + 4y^2 = 16$, б) $4x^2 + 9y^2 = 36$; в) $25x^2 + 9y^2 = 900$.

№6.7. Определить эксцентриситет эллипса, если его большая ось втрое больше малой.

№6.8. Составить каноническое уравнение эллипса, если его большая полуось равна 12, а эксцентриситет – 0,8. Найти расстояние между фокусами эллипса.

№6.9. Эллипс проходит через точки $A(2;\sqrt{3})$ и $B(0;2)$. Составить уравнение эллипса и найти расстояние от точки $A(2;\sqrt{3})$ до фокусов.

№6.10. На эллипсе $9x^2+25y^2=225$ найти точку, расстояние от которой до правого фокуса в четыре раза больше расстояния от нее до левого фокуса.

№6.11. Определить эксцентриситет эллипса, если расстояние между фокусами равно расстоянию между вершинами его большой и малой осей.

№6.12. 2. Найти малую ось и эксцентриситет эллипса $2x^2+9y^2=18$.

№6.13. 3. Найти большую ось и эксцентриситет эллипса $8x^2+y^2=16$.

№6.14. 4. Составить уравнение эллипса, фокусы которого имеют координаты $(-\sqrt{5};0)$ и $(\sqrt{5};0)$, а большая ось равна $2\sqrt{6}$.

№6.15. 5. Составить уравнение эллипса, если известно, что один из его фокусов находится в точке $(6;0)$, а эксцентриситет $\varepsilon=2/3$.

№6.16. 6. Расстояние между фокусами равно 30, а большая ось, лежащая на оси *Ox*, равна 34. Написать уравнение эллипса и найти его эксцентриситет.

№6.17. 7. Написать уравнение эллипса, у которого сумма полуосей равна 36, а расстояние между фокусами, лежащими на оси *Oy,* равно 48.

№8.18. 8. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси *Ox*, если известно, что он проходит через точки $M_1(1;-1{,}5)$, $M_2(-2;0)$. Найти координаты фокусов эллипса.

№6.19 9. Малой осью эллипса служит отрезок B_1B_2, где $B_1(5;1)$, $B_2(5;-7)$, расстояние между фокусами равно 10. Составить уравнение эллипса и найти координаты фокусов.

№6.20. Составить каноническое уравнение гиперболы $9x^2-16y^2=144$. Найти координаты ее фокусов и вершин, эксцентриситет и уравнения асимптот.

№6.21. Составить каноническое уравнение гиперболы, если она проходит через точки $A(2;1)$ и $B(-4;\sqrt{7})$.

№6.22. Дан эллипс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. Составить уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах данного эллипса.

№6.23. Найти фокусы, оси, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы:

а) $16x^2-9y^2-144=0$;

б) $25x^2-16y^2-400=0$;

в) $4y^2-8x^2-32=0$.

№6.24. Написать уравнение гиперболы и ее асимптоты, если ее вершины находятся в точках $(0;4)$ и $(0;-4)$, а эксцентриситет равен 3/2.

№6.25. Уравнения асимптот гиперболы имеют вид $y=\pm\frac{4}{3}x$, а одним из его фокусов является точка $(0;5\sqrt{2})$. Составить уравнение гиперболы и найти ее эксцентриситет.

№6.26. Точка $M(6;-2\sqrt{2})$ лежит на гиперболе, уравнения асимптот которой $y=\pm\frac{2}{3}x$. Составить уравнение гиперболы с фокусами на оси *Ox*.

№6.27. Составить уравнение гиперболы с фокусами на оси *Oy*, если действительная ось равна $4\sqrt{5}$, а эксцентриситет $\varepsilon=\sqrt{5}/2$.

№6.28. Эксцентриситет гиперболы равен $\sqrt{7}$. Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(\sqrt{5};\sqrt{2})$, с фокусами на оси *Ox*.

№6.29. Сумма полуосей гиперболы равна 17, а эксцентриситет $\varepsilon=13/5$. Написать уравнение гиперболы и найти координаты ее фокусов, лежащих на оси *Oy*.

№6.30. Составить уравнение гиперболы, действительная ось которой лежит на оси абсцисс, если известно, что гипербола проходит через точки

$M_1(3;-2)$, $M_2(-6;2\sqrt{10})$. Найти эксцентриситет и координаты фокусов гиперболы.

№6.31. Составить уравнение гиперболы, зная фокусы $F_1(-10;\ 0)$, $F_2(10;\ 0)$ и одну из точек гиперболы $M(12;3\sqrt{5})$.

№6.32. Привести уравнения к каноническому виду. Найти центр и координаты фокусов гиперболы:

а) $9x^2-4y^2-54x+16y+29=0$;

б) $9x^2-4y^2-72x+24y+72=0$.

№6.33. Известно, что фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, а эксцентриситет $\varepsilon=2$. Составить каноническое уравнение гиперболы.

№6.34. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку $A(9;-4)$, если ее действительная полуось $a=3$.

№6.35. Найти точки пересечения прямой $2x-y-10=0$ и гиперболы $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$.

№6.36. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если дана точка $M_1(-5;3)$ гиперболы и эксцентриситет $\sqrt{2}$.

№6.37. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ и прямой $9x+2y-24=0$.

№6.38. Парабола с вершиной в точке $O(0,0)$ симметрична относительно оси Ox и проходит через точку $A(2,4)$. Найти фокус и уравнение параболы.

№6.39. Дано уравнение параболы. Найти координаты ее фокуса, уравнение директрисы.

а) $y^2 = 16x$;

б) $x^2 = -14y$;

в) $y^2 = -30x$;

г) $x^2 = 4y$.

№6.40. Парабола симметрична относительно оси Oy, проходит через точку $(4;-2)$, вершина ее лежит в начале координат. Составить ее уравнение.

№6.41. Парабола $y^2 = 2px$ проходит через точку $(4; 6)$. Определить ее параметр p.

№6.42. Составить уравнение параболы, зная, что, вершина ее находится в начале координат, а расстояние от фокуса до вершины равно 5, а осью симметрии служит ось Ox.

№6.43. Известно, что фокус параболы находится в точке $F(-6; 0)$, вершина параболы в начале координат. Составить уравнение параболы.

№6.44. Составить уравнение параболы, если известны ее фокус $F(4; 6)$ и уравнение директрисы $y + 2 = 0$.

№6.45. Составить уравнение параболы, если известны ее фокус $F(-7; 0)$ и уравнение директрисы $x - 7 = 0$.

№6.46. Составить уравнение параболы, имеющей вершину $O(1; 2)$ и проходящей через точку $A(4; 8)$, если ось симметрии параболы параллельна оси Ox.

№6.47. Дано уравнение параболы. Найти координаты вершины параболы и уравнение ее директрисы.

а) $y^2 - 4y - 20x + 24 = 0$;

б) $x^2 - 6x - y + 13 = 0$

в) $4x^2+8x-y+7=0$;

г) $5y^2-10y-x+6=0$

№6.48. Составить уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точку пересечения прямой $x+y=0$ и окружности $x^2+y^2-4x=0$ и симметрична относительно оси OY.

№6.49. Найти уравнения параболы и её директрисы, если известно, что парабола имеет вершину в начале координат и симметрична относительно оси Ox и что точка пересечения прямых $y=x$ и $x+y-2=0$ лежит на параболе.

№6.50. Составить уравнение прямой, которая касается параболы $y^2=8x$ и параллельна прямой $2x+2y-3=0$.

№6.51. Составить уравнение прямой, которая касается параболы $x^2=16y$ и перпендикулярна к прямой $2x+4y+7=0$.

№6.52. Дана парабола $y^2=12x$. Провести к ней касательную в точке с абсциссой $x=3$.

№6.53. Через точку $P(5;-7)$ провести касательную к параболе $y^2=8x$.

Тема 7. Плоскость и прямая в пространстве
Таблица №7.1. Плоскость в пространстве

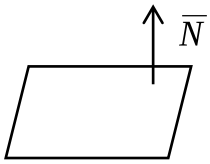
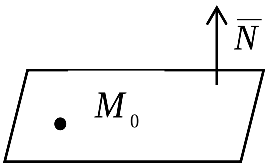
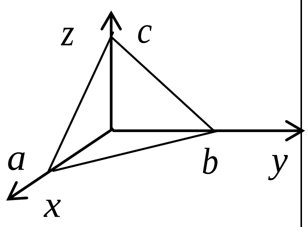
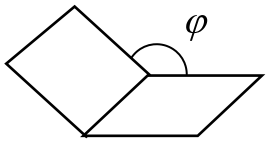
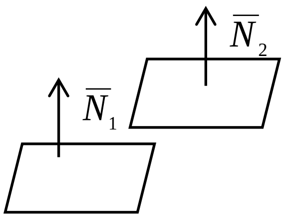
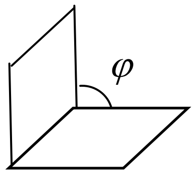
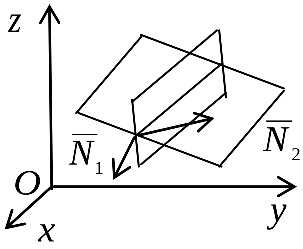
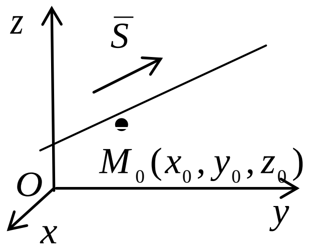
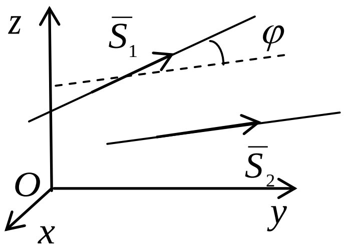
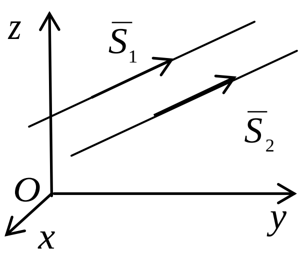
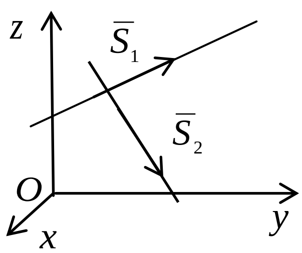
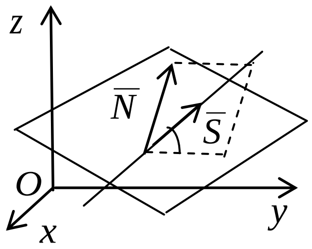
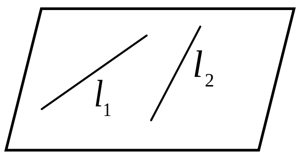
Понятие	Изображение	Уравнение, формула
1. Общее уравнение плоскости		$\overline{N}=(A,B,C)$ – нормальный вектор плоскости $Ax+By+Cz+D=0$
2. Нормальное уравнение плоскости		$\overline{N}=(A,B,C)$ – нормальный вектор плоскости, $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка на плоскости $A(x-x_0)+B(y-y_0)+$ $+C(z-z_0)=0$
3. Уравнение плоскости в отрезках		$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, где a,b,c – величины отрезков, отсекаемых на осях координат (с учетом знака)
4. Угол между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$		$\cos\varphi=\frac{\overline{N}_1\overline{N}_2}{\lvert\overline{N}_1\rvert\lvert\overline{N}_2\rvert}=$ $=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$
5. Условие параллельности плоскостей		$(\overline{N}_1\parallel\overline{N}_2)\Leftrightarrow(\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2})$
6. Условие перпендикулярности плоскостей		$(\overline{N}_1\perp\overline{N}_2)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0)$

Таблица №7.2. Прямая в пространстве

Понятия	Изображение	Уравнение, формула
1. Общие уравнения прямой		$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_1x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ $\overline{N}_1=(A_1,B_1,C_1)$, $\overline{N}_2=(A_2,B_2,C_2)$ – нормальные векторы плоскостей
2. Канонические уравнения прямой		$\overline{S}=(m,n,p)$ – направляющий вектор, $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка на прямой $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$
3. Угол между прямыми		$\cos\varphi=\dfrac{\overline{S}_1\overline{S}_2}{\lvert\overline{S}_1\rvert\lvert\overline{S}_2\rvert}$
4. Условие параллельности прямых		$\overline{S}_1=(m_1,n_1,p_1)$, $\overline{S}_2=(m_2,n_2,p_2)$. $(\overline{S}_1\parallel\overline{S}_2)\Leftrightarrow(\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2})$
5. Условие перпендикулярности прямых		$(\overline{S}_1\perp\overline{S}_2)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0)$

6. Угол между прямой и плоскостью		$\sin\varphi = \dfrac{\overline{S}\cdot\overline{N}}{\lvert\overline{S}\rvert\lvert\overline{N}\rvert}$
7. Условие расположения двух прямых в одной плоскости		$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$

№7.1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;-2;3)$ и а) перпендикулярной вектору $\overline{N}=(3,-4,5)$; б) точку $M_1(0;2;5)$ и параллельной оси Oy; в) проходящей через ось Oz.

№7.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через а) точку $M(1;2;3)$ параллельно двум данным векторам $\overline{a}=(6,-8,10)$ и $\overline{b}=(4,-3,5)$; б) точки $M_1(1;2;3)$, $M_2(4;-1;-2)$ и $M_3(4;0;3)$.

№7.3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1;-2;0)$ и $M_2(1;1;2)$ и перпендикулярной к плоскости $x+2y+2z-4=0$.

№7.4. Найти расстояние от точки $E(4;3;0)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1;3;0)$, $M_2(4;-1;2)$ и $M_3(3;0;1)$.

№7.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ и точку $M(3;4;0)$.

№7.6. Найти проекцию точки $M(3;1;-1)$ на плоскость $x+2y+3z-30=0$.

№7.7. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{-1}$ и точку $M(2;0;1)$.

№7.8. Составить уравнение плоскости, проходящей через а) ось Ox и точку $A(1;-1;3)$; б) ось Oy и точку $B(2;1;-1)$.

№7.9. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4;-4;2)$ и параллельной плоскости Oxz.

№7.10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;3;4)$ и отсекающей на осях Ox и Oy отрезки $a=1$, $b=-1$.

№7.11. Из точки $M(-1;-1;4)$ опущен перпендикуляр на плоскость, его основание $M_1(2;1;3)$. Составить уравнение плоскости.

№7.12. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1;0;5)$ и: а) образующей с осями координат углы $\alpha=\pi/3$, $\beta=\pi/4, \gamma=2\pi/3$; б) параллельной прямой $\frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{4}=\frac{z}{-2}$.

№7.13. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1;1;-3)$ параллельно вектору $\overline{S}=(1,-3,4)$.

№7.14. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2;-1;-1)$ и $M_2(3;3;-2)$.

№7.15. Найти проекцию точки $M(1;2;1)$ на прямую $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$.

№7.16. Найти угол между: а) прямыми $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-2}$ и $\frac{x+1}{1}=\frac{y+11}{2}=\frac{z+6}{1}$, б) прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-2}$ и плоскостью $2x+3y-6z+2=0$.

№7.17. Найти отрезки, отсекаемые плоскостью $3x-12y-8z+6=0$ на осях координат.

№7.18. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки:

а) 2.1. $A(1;-3;4)$, $B(0;-2;-1)$, $C(1;1;-1)$

б) 2.2. $A(0;1;0)$, $B(-2;1;4)$, $C(3;2;5)$

№7.19. Вычислить расстояние от точки до плоскости:

а) 3.1. $M(5;-1;3)$, $2x-y+2z+1=0$

б) 3.2. $M(2;-1;3)$, $11x-2y+10z+6=0$

№7.20. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Ox и проходящей через точки M и N:

а) $M(2;-1;4)$, $N(5;2;-3)$

б) $M(1;-1;-3)$, $N(-5;4;-2)$

№7.21. Написать уравнение плоскости, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку $K(4;-1;-6)$.

№7.22. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $M(5;-2;7)$.

№7.23. Через точку $A(2;-1;3)$ провести плоскость, параллельную плоскости $x-2y+4z-5=0$.

№7.24. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка с концами в точках $A(3;-2;-4)$, $B(5;4;2)$ и перпендикулярно ему.

№7.25. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1;4;-5)$, $N(4;2;-3)$ и перпендикулярной плоскости $3x+5y-6z-8=0$.

№7.26. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-1;4)$ перпендикулярно плоскостям $x+3y-5z-1=0$ и $x+y+2z-9=0$.

№7.27. Найти точку пересечения плоскостей $x-2y+z-7=0$, $2x+y-z+2=0$, $x-3y+2z-11=0$.

№7.28. Напишите уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+y+5z+3=0$, $2x+3y-z+2=0$ и через точку $M(3;2;1)$.

№7.29. Составить уравнение плоскости, поведенной через точку $A(-2;4;1)$ параллельно плоскости *BCD*, где $B(0;-3;2)$, $C(4;-6;1)$, $D(-7;5;-2)$.

№7.30. Найти проекцию точки $M(1;2;3)$ на плоскость $x-2y+z-6=0$.

№7.31. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями $5x+2y-3z-7=0$ и $5x+2y-3z+4=0$.

№7.32. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами $A(7;2;-6)$, $B(11;-3;5)$, $C(-3;4;-2)$.

№7.33. Тремя вершинами параллелограмма служат точки $A(-2;8;-4)$, $B(9;-5;6)$, $C(-6;-2;10)$. Составить уравнения его диагоналей.

№7.34. Определить при каком значении *a* перпендикулярны прямые:

$$\frac{x+5}{a}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z-1}{3},\ \frac{x+3}{2}=\frac{y+7}{5}=\frac{z-5}{-2}$$

№7.35. Определить при каком значении *c* прямая $\frac{x+3}{3}=\frac{y+7}{6}=\frac{z-5}{-2}$ параллельна плоскости $cx-y-6z+5=0$.

№7.36. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

а) $\frac{x+3}{3}=\frac{y-7}{1}=\frac{z+2}{-2}$, $2x-y-z+4=0$

б) $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{3}$, $2x+y-z-7=0$

№7.37. Найти расстояние от точки $M(1;2;-1)$ до прямой

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-4}{2}.$$

№7.38. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(4;-1;5)$ параллельно прямой $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+7}{1}$.

№7.39. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M(1;-5;3)$ и образует с осями координат углы, соответственно равные 60^0, 45^0, 120^0.

№7.40. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;-1;4)$ перпендикулярно плоскости $2x+3y-6z+5=0$.

№7.41. Написать каноническое уравнение прямой: $\begin{cases}2x+3y+z+6=0,\\ x-3y-2z+3=0.\end{cases}$

№7.42. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую: $\begin{cases}8x+2y+3z+6=0,\\ 3x+4y+z+1=0\end{cases}$ параллельно прямой $\frac{x+1}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-1}{-2}$.

№7.43. Составить уравнение прямой в пространстве, перпендикулярной плоскости $2x-3y+4z-8=0$ и проходящей через точку пересечения этой плоскости с осью Oz.

№7.44. Найти острый угол между прямыми: $\frac{x-4}{6}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{3}$, $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z+1}{-2}$.

№7.45. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M(2;-4;3)$ и параллельна прямой: $\begin{cases}x=4-5t,\\ y=2t,\\ z=-5+8t.\end{cases}$

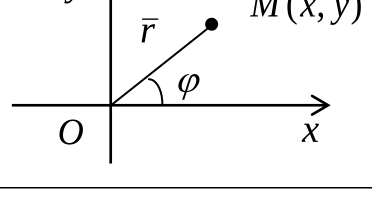
№7.46. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(-2;1;-3)$ и $B(5;4;6)$.

Тема 8. Комплексные числа

Таблица №8.1. Основные понятия и задачи.

Понятия	Определения, обозначения, формулы
1. Комплексное число	$z = x + iy$ (алгебраическая форма комплексного числа), где x и y – действительные числа, i – мнимая единица ($i^2 = -1$).
2. Действительная и мнимая часть комплексного числа z	$x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.
3. $z_1 = z_2$ ($z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$)	Если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.
4. Сопряженное число $\bar{z}$ к числу $z = x + iy$	$\bar{z} = x - iy$
5. Сумма комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$	Комплексное число $z = z_1 + z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$.
6. Произведение комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$	Комплексное число $z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.
7. Частное от деления комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$	Комплексное число $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0)$.

Таблица №9.2. Различные формы записи комплексных чисел.

Понятия	Формы представления, изображения
1. Ось абсцисс (Ox) называется действительной осью, ось ординат (Oy) – мнимой осью. Плоскость Oxy называется комплексной плоско-	

стью.	
2. Тригонометрическая форма комплексного числа.	$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = \lvert z \rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль комплексного числа. φ – аргумент комплексного числа ($\cos\varphi = \dfrac{x}{r}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{r}$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$).
3. Формула Эйлера	$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
4. Показательная форма комплексного числа	$z = re^{i\varphi}$.
5. Формула Муавра	$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
6. Произведение комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$	$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.
7. Частное от деления двух комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$	$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.
8. Корень из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,	$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n})$, где $k = \overline{0, n-1}$.

№8.1. Изобразить комплексные числа на плоскости и записать их в тригонометрической и показательной формах

1) $z = 2 + 2i$;

2) $z = -5i$;

3) $z = -1 + \sqrt{3}i$;

4) $z = -3 + 2i$;

5) $z = 6i$;

6) $z = -\sqrt{3} + i$;

7) $z = -2$;

8) $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$;

9) $z = 8$;

10) $z = -2\sqrt{3} - 6i$.

№8.2. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, если

1) $z_1 = -2 - 3i$, $z_2 = 1 + 2i$;

2) $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 2 - i$;

3) $z_1 = 2 + 4i$, $z_2 = -2 - 3i$;

4) $z_1 = -3 + 4i$, $z_2 = 1 + 3i$;

5) $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 3 - 3i$;

6) $z_1 = -1 - 3i$, $z_2 = -3 + 2i$;

7) $z_1 = 4 + i$, $z_2 = 1 - 3i$;

8) $z_1 = -4 + i$, $z_2 = -1 - 3i$;

9) $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = 4 + 2i$;

10) $z_1 = -3 - 3i$, $z_2 = 2 - 3i$;

№8.3. Вычислить

1) $i^6 + i^{20} + i^{30} + i^{36} + i^{54}$;

2) $i^{52} + 2i^{83} - 3i^{61} + 5i^{38}$;

3) $i^{42} + 2i^{53} - 3i^{71} + 5i^{108}$;

4) $\frac{(1+i)(2+i)}{3-2i}$;

5) $\frac{2+3i}{(4+i)(2-2i)}$;

6) $\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+3i)(1+i)}$;

7) $\dfrac{2+3i}{4-2i}+\dfrac{1-3i}{2i}$;

8) $\dfrac{1+i}{(\sqrt{3}+i)(1+\sqrt{3}i)}$;

9) $\dfrac{1+2i}{3-i}+(1-i)^2$;

10) $\dfrac{3+4i}{i}+\dfrac{4-i}{3+2i}$.

№8.4. Возвести в степень

1) $(-1+\sqrt{3}i)^{50}$;

2) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)^{12}$;

3) $(1+i)^5\cdot(\sqrt{3}-i)^6$;

4) $(\sqrt{3}-i)^{20}$;

5) $(2-2i)^7$;

6) $(\sqrt{3}-3i)^6$;

7) $(-1-\sqrt{3}i)^{15}$;

8) $(-1+i)^5$;

9) $(1+\sqrt{3}i)^6$;

10) $\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right)^6$.

№8.5. Найти все значения и изобразить в комплексной плоскости

1) $\sqrt[4]{-1}$;

2) $\sqrt[4]{-i}$;

3) $\sqrt{3+4i}$;

4) $\sqrt{-8i}$;

5) $\sqrt[3]{i}$;

6) $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$;

7) $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$;

8) $\sqrt[3]{-2+2i}$;

9) $\sqrt{1-i}$;

10) $\sqrt[5]{1+i}$.

№8.6. Найти корни уравнения и изобразить их на координатной плоскости

1) $z^2+4z+5=0$;

2) $z^2+8z+41=0$;

3) $z^2-4z+8=0$;

4) $z^2+2iz+2=0$;

5) $z^2-(1+i)z+5i=0$;

6) $z^2-8iz-15=0$;

7) $z^5+32=0$;

8) $z^6-1=0$;

9) $z^3-8i=0$;

10) $z^6+8=0$.

Ответы.

Тема 1.

№ 1.1 1) 14, 2) -45, 3) 0, 4) 15, 5) -13, 6) 3, 7) $-\sin\alpha$, 8) a^2-b^2, 9) $\sin(\alpha-\beta)$, 10) 0, 11) 1, 12) $-4ab$, 13) $4ab$, 14) x^2+y^2

№1.2 1) 46, 2) -18, 3) 0, 4) 18, 5) 0, 6) 0, 7) 20, 8) 36, 9) 69, 10) -21, 11) -44, 12) 0, 13) -39, 14) 3.

№1.3. 1) $m_{12}=3$, $m_{23}=-2$, $m_{31}=-3$, $A_{12}=-3$, $A_{23}=2$, $A_{31}=-3$;

2) $m_{11}=12$, $m_{21}=4$, $m_{33}=9$, $A_{11}=12$, $A_{21}=-4$, $A_{33}=9$;

3) $m_{13}=32$, $m_{21}=-130$, $m_{34}=8$, $m_{44}=28$, $A_{13}=32$, $A_{21}=130$, $A_{34}=-8$, $A_{44}=28$.

4) $m_{14}=-7$, $m_{32}=34$, $m_{23}=-32$, $m_{43}=2$, $A_{14}=7$, $A_{32}=-34$, $A_{23}=32$, $A_{43}=-2$.

№1.4. 1) 40, 2) -8, 3) 60, 4) -72, 5) -12, 6) 0, 7) -6, 8) 150, 9) 5, 10) 52

№1.5. 1) 1; 5, 2) 1; 2, 3) 5, 4) -3; -2,5, 5) -4; 1; 2, 6) 1, 7) -3, 8) 2, -1, 9) 3, -2.

№1.6. 1) -17, 2) 7, 3) 14, 4) 19, 5) $-x^2$, 6) $\cos 2\alpha$, 7) 20, 8) -45, 9) 5, 10) 21, 11) 19, 12) -41, 13) 22, 14) -22, 15) -28, 16) -74, 17) 65, 18) 2, 19) 5, 20) -304, 21) 50, 22) 80.

№1.7. 1) (1;-2), 2) (-1; 9), 3) ($1/3$; $1/2$), 4) (6;2)

Тема 2.

№2.1. 1) $\begin{pmatrix} -4 & -1 & -7 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 2 & 8 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} 8 & -6 & -4 \\ 12 & 4 & 20 \\ 2 & 16 & -18 \end{pmatrix}$,

4) $\begin{pmatrix} 4 & -22 & -29 & 47 \\ 64 & -7 & -33 & 4 \\ -8 & -18 & 14 & -19 \end{pmatrix}$.

№2.2.

1) $AB=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$; 2) $AB=(-1)$, $BA=\begin{pmatrix} 5 & -10 & 15 & 0 \\ -3 & 6 & -9 & 0 \\ -4 & 8 & -12 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $AB=\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, BA - не существует; 4) $AB=\begin{pmatrix} -14 & 11 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} 14 & 2 & -2 \\ -9 & -15 & 3 \\ 17 & 23 & -5 \end{pmatrix}$;

5) $AB=\begin{pmatrix} 2 & -9 & 14 \\ 5 & -22 & -11 \\ -18 & 19 & -32 \end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix} -18 & 2 & -2 \\ -9 & -15 & 3 \\ 17 & 23 & -5 \end{pmatrix}$.

№2.3.

1) $(AB)\cdot C = A\cdot(BC) = \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -13 & 8 \end{pmatrix}$;

2) $(AB)\cdot C = A\cdot(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;

3) $(AB)\cdot C = A\cdot(BC) = (3 \quad -17 \quad -68 \quad 38)$;

4) $(AB)\cdot C = A\cdot(BC) = \begin{pmatrix} 33 \\ -18 \\ -31 \\ 32 \end{pmatrix}$.

№2.4.

1) $\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 1 & 6 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} -3 & 8 & -7 \\ -1 & -23 & 3 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} 15 & -5 & 12 \\ 9 & 1 & 10 \end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix} 9 & 10 & 14 \\ -1 & 16 & 14 \end{pmatrix}$,

5) $\begin{pmatrix} 12 & -15 & 3 \\ -21 & 15 & 0 \end{pmatrix}$, 6) $\begin{pmatrix} 15 & -2 \\ -4 & 11 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, 7) $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, 8) $(-10 \quad -6 \quad 11)$.

№2.5. 1) 2, 2) 2, 3) 1, 4) 2, 5) 2, 6) 3.

№2.6. 1) 3, 2) 1, 3) 3, 4) 2, 5) 3, 6) 4.

№2.7. 1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -1 & 0{,}5 \\ -2 & 1{,}5 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0 \\ -0{,}6 & 2{,}4 & 2 \\ -0{,}2 & 0{,}8 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -18 & 32 & -13 \end{pmatrix}$.

№2.8.

1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) X не существует; 3) $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 5/2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 15/7 \\ -16/7 \\ -11/7 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} -1/7 & 4/7 & 1 \\ 2/7 & -1/7 & -1 \\ 4/7 & -2/7 & -1 \end{pmatrix}$.

№2.9. 1) $\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 23 & -1 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} -16 & -15 \\ 31 & 103 \end{pmatrix}$.

№2.10. 1) $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 14 & -10 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} -8 & 9 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

№2.11. 1) 5, 2) 13, 3) 1.

№2.12. 1) $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 14 \\ 8 & 2 & 10 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 14 & -7 & 11 \\ 5 & 3 & 11 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} -5 & 15 \\ 4 & 2 \\ -2 & 24 \end{pmatrix}$.

№2.13 1) $\begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$.

№2.14. 1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 7 & -1 & 11 \\ -2 & 6 & 12 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 \\ -5 & -1 & 9 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

№2.15. 1) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 11 \\ 7 & -1 & 11 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} -18 & -9 \\ -17 & -14 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 17 & 19 \end{pmatrix}$.

Тема 3.

№3.1. 1) $(3;1;1)$, 2) $(-1;-3;4)$, 3) $(2;-2;3)$, 4) $(-1;3;1)$, 5) $(1;2;-2)$, 6) $(3;4;5)$, 7) $(-9;-10;13)$, 8) $(-7;7;5)$, 9) $(1;1;2)$, 10) $(1;-2;-3)$, 11) $(-1;2;1)$, 12) $(1;1;3)$, 13) $(-2;1;1)$, 14) система несовместна, 15) $(-1;3;9)$, 16) $(5;-11;-13)$, 17) $(2;-3;1)$, 18) $(1;1;2)$, 19) $(3;-2;-3)$, 20) $(2;1;2)$, 21) $(-1;5;2)$, 22) $(1;2;1;-3)$, 23) $(2;2;-1;1)$, 24) $(1;2;3;4)$, 25) $(1;-2;1;3)$, 26) $(1;-1;1;-2)$, 27) $(1;2;-3;-1)$.

№3.2. 1) $(1;1;1)$, 2) $(2;3;5)$, 3) $(2;-1;-3)$, 4) $(1;-1;2)$, 5) $(-2;2;3)$, 6) $(1;4;2)$, 7) $(-1;-2;1)$, 8) $(3;2;1)$, 9) $(1;-2;-3)$, 10) система несовместна, 11) $\left(\frac{8}{5}-\frac{11}{5}C;-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}C;C\right)$, 12) $(-1;3;9)$, 13) $(1;-1;2;3)$, 14) $(-2;1;1;-2)$, 15) $(1;2;-3;5)$, 16) $\left(\frac{19}{2}-\frac{7}{2}C_1+\frac{29}{2}C_2;\frac{9}{2}-\frac{1}{2}C_1+\frac{1}{2}C_2;-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}C_1+\frac{7}{2}C_2;C_1;C_2\right)$, 17) $(4;1;1;6)$, 18) $\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{5}C_2;-\frac{17}{5}+C_1-\frac{7}{5}C_2;C_1;C_2\right)$, 19) система несовместна, 20) $\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}C_1-\frac{5}{4}C_2;\frac{3}{4}+\frac{1}{4}C_1-\frac{3}{4}C_2;-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}C_1+\frac{1}{4}C_2;C_1;C_2\right)$, 21) $(1;-1;2;0)$, 22) $\left(-\frac{1}{2}-C_1+\frac{1}{2}C_2;2+C_1-2C_2;C_1;C_2\right)$, 23) $(3;0;-5;11)$, 24) $(1;-1;0;1)$, 25) $(C;3C-13;-7;0)$, 26) $\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}C_1-\frac{1}{3}C_2;C_1;C_2;1\right)$, 27) система несовместна. 28) $(1+2C_1+C_2-3C_3;C_1;1;C_2;C_3)$.

№3.3. 1) (0;0), фундаментальной системы решений нет, 2) $(-k;k)$, (-1;1), 3) $(3k;2k)$, (3;2), 4) $(0;k;k)$, (0;1;1), 5) $(k;-2k;k)$, (1;-2;1), 6) $(k_1;k_2;k_2-2k_1)$, (1;0;-2), (0;1;1), 7) $(-2k/5,3k/5,k)$, $(-2/5,3/5,1)$, 8) (0;0;0), фундаментальной системы решений нет, 9) $(8k_1-7k_2;-6k_1+5k_2;k_1;k_2)$, (8;-6;1;0), (-7;5;0;1), 10) $(-2k;7k;0;9k)$, (-2;7;0;9).

Тема4.

4.1. $r=5\sqrt{2}$, $\cos\alpha=0{,}5\sqrt{2}$, $\cos\beta=-0{,}3\sqrt{2}$, $\cos\gamma=0{,}4\sqrt{2}$,

4.2. $p=5$, $\overline{p}=2\overline{a}-3\overline{b}$,

4.3. $|\overline{c}|=\sqrt{93}$, $\cos\alpha=-5/\sqrt{93}$, $\cos\beta=2/\sqrt{93}$, $\cos\gamma=8/\sqrt{93}$,

4.4. $\overline{c}=2\overline{a}-3\overline{b}$,

4.5. 135°,

4.6. 2,

4.7. $\overline{c}=2\overline{b}-2\overline{a}$,

4.8. $\hat{B}=\hat{C}=45^\circ$,

4.9. $\sqrt{13}$,

4.10. 120°,

4.11. $\sqrt{17}$,

4.12. 47,

4.13. 19,

4.14. 20,

4.15. а) $\alpha=4$, $\beta=-1$, б) $\alpha=c$, $\beta=c+9$, где c – любое действительное число,

4.16. -3,

4.17. -4,

4.18. $|AC|=\sqrt{29}$, $|BD|=3$,

4.19. $(2,2,1)$,

4.20. $(2,7,3)$,

4. 21. 45°,

4.22. -6,

4.23. $4\sqrt{2}/3$,

4.24. а) $(-7,3,1)$, б) $(1,17,9)$,

4.25. а) 3 (кв.ед.), б) $\sqrt{161}$ (кв.ед.),

4.26. $13\sqrt{2}$ (кв.ед.),

4.27. $0{,}5\sqrt{14}$ (кв.ед.),

4.28. 5,

4.29. $4\sqrt{21}/7$,

4.30. $\sqrt{5}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ (кв.ед.),
4.31. а) 10, б) -18,
4.32. 12 (куб.ед),
4.33. $43\sqrt{105}/105$,
4.34. а) $\sqrt{29}$, б) 9,5 (кв.ед), в) $78/19$,

Тема 5.

5.1. Точки, лежащие на прямой $y = -0{,}5x + 6{,}5$,
5.2. Лежат на одной прямой,
5.3. $y = x - 6$,
5.4. $y - 1 = 0$, $x + 4 = 0$,
5.5. $3x + 7y - 2 = 0$,
5.6. $M(8/3; 7/3)$, $\arccos 0{,}8$,
5.7. $33/\sqrt{82}$,
5.8. а) $2x + 5y - 13 = 0$, б) $5x - 2y + 11 = 0$,
5.9. $4x + 9y - 22 = 0$, $x + 5y = 0$, $3x + 4y = 0$,
5.10. а) (AB): $5x + 4y - 7 = 0$, (BC): $5x - 2y - 19 = 0$, (AC): $y - 3 = 0$, б) $5x + y - 13 = 0$, в) $4x - 5y - 5 = 0$,
5.11. (1) и (2) параллельны, (1) и (3) перпендикулярны, (2) и (3) перпендикулярны,
5.12. $M(1; 4)$,
5.13. $M_1(6; 0)$ и $M_2(-2; 0)$,
5.14. $M_1(0; 28)$ и $M_2(0; -2)$,
5.15. (0; 2),
5.16. $\alpha = 45^{c}$,
5.17. $h = 2$,
5.18. (AB) $x + y - 2 = 0$, (BC) $3x - 4y - 20 = 0$, (AC) $8x + y + 5 = 0$,
5.19. $\left(\frac{71}{21}; -\frac{10}{21}\right)$,
5.20. (AB) $3x - 5y + 18 = 0$, (BC) $4x + y - 22 = 0$, (CD) $3x - 5y - 28 = 0$, (AD) $4x + y + 1 = 0$,
5.21. $x - 5y - 14 = 0$,
5.22. $2x + y + 5 = 0$,
5.23. $x - y - 6 = 0$, $2x + 3y - 17 = 0$,
5.24. $4x + 5y + 2 = 0$, $5x - 4y - 18 = 0$,
5.25. (2; 2),
5.26. (5; 5),
5.27. $4x - 15y + 20 = 0$, $16x - 3y - 72 = 0$, $10x - 9y - 26 = 0$,

5.28 $5x+3y-26=0$, $3x+5y-26=0$, $x-y=0$,
5.29. (1; –3), (–2; 5), (5; –9), (8; –17),
5.30. $3x+2y=0$; $2x-3y-13=0$,
5.31. $5x-2y-33=0$; $x+4y-1=0$; $7x+6y+33=0$,
5.32. (1; 3),
5.33. M_3 (6; –6),
5.34. $3x-5y-13=0$; $8x-3y+17=0$; $5x+2y-1=0$,
5.35. $x-y+3=0$,
5.36. (AC) $3x-y=0$, (BC) $x-3y=0$, (BD) $3x-y-8=0$, (AD) $x-3y+8=0$,
5.37. (AB) $9x+11y+5=0$, (BC) $3x+7y-5=0$, (AC) $3x+2y-10=0$,
5.38. $4x-y+3=0$,
5.39. 49 (кв.ед.),
5.40. $4x-7y=0$

Тема 6.

6.1. а) $(x-1)^2+y^2=25$,
б) $(x-2)^2+(y+1)^2=25$,
6.2. а) $(-6;5)$, $R=4$,
б) $(-4;2)$, $R=5$,
в) $(3;5)$, $R=2$,
г) $(-5;-2)$, $R=4$,
д) $(-2;1)$, $R=5/3$,
е) $(2;-1)$, $R=\sqrt{5}/2$,
ж) $(-4;-2)$, $R=3\sqrt{6}/2$,
з) $(1;-4/3)$, $R=5/3$,
6.3. $(x-2)^2+(y+1)^2=25$,
6.4. $(x-2)^2+(y-4)^2=10$,
6.5. а) $(x-2)^2+(y+3)^2=16$, б) $(x-4)^2+y^2=16$, в) $x^2+(y+2)^2=4$,
6.6. а) $F_1(-2\sqrt{3};0)$, $F_2(2\sqrt{3};0)$, $\varepsilon=\sqrt{3}/2$,
б) $F_1(-\sqrt{5};0)$, $F_2(\sqrt{5};0)$, $\varepsilon=\sqrt{5}/3$,
в) $F_1(0;8)$, $F_2(0;-8)$, $\varepsilon=4/5$,
6.7. $\varepsilon=2\sqrt{2}/3$,
6.8. $x^2/144+y^2/108=1$, $2c=12$,
6.9. $x^2/16+y^2/4=1$, $\varepsilon=\sqrt{3}/2$, $r_1=4-\sqrt{3}$, $r_2=4+\sqrt{3}$,
6.10. $(-15/4;\pm\sqrt{63}/4)$,

6.11. $\varepsilon = \sqrt{0{,}4}$,

6.12. $2\sqrt{2}$, $\varepsilon = \sqrt{7}/3$

6.13. 8, $\varepsilon = \sqrt{14}/4$

6.14. $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{1} = 1$

6.15. $\dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{45} = 1$

6.16. $\dfrac{x^2}{289} + \dfrac{y^2}{64} = 1$, $\varepsilon = 15/17$

6.17. $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{676} = 1$

6.18. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$, $F_1(-1;\,0)$, $F_2(1;\,0)$

6.19. $\dfrac{(x-5)^2}{41} + \dfrac{(y+3)^2}{16} = 1$, $F_1(0;-3)$, $F_2(10;-3)$

6.20. $x^2/16 - y^2/9 = 1$, $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$, $\varepsilon = \sqrt{3}/2$, $A_1(-4;0)$ и $A_2(4;0)$,

6.21. $x^2/2 - y^2/1 = 1$,

6.22. $x^2/4 - y^2/5 = 1$,

6.23. а). $F_1(-5;\ 0)$, $F_2(5;\ 0)$, действительная ось $2a = 6$, мнимая ось $2b = 8$, $\varepsilon = 5/3$, $y = \pm\dfrac{4}{3}x$

б) $F_1(-\sqrt{41};\ 0)$, $F_2(\sqrt{41};\ 0)$, действительная ось $2a = 8$, мнимая ось $2b = 10$, $\varepsilon = \sqrt{41}/4$, $y = \pm\dfrac{5}{4}x$

в) $F_1(0;\ 2\sqrt{3})$, $F_2(0;\ -2\sqrt{3})$, действительная ось $2b = 4\sqrt{2}$, мнимая ось $2a = 4$, $\varepsilon = \sqrt{6}/2$, $y = \pm\sqrt{2}x$

6.24. $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{20} = 1$, $y = \pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}x$

6.25. $\dfrac{y^2}{32} - \dfrac{x^2}{18} = 1$, $\varepsilon = 5/4$

6.26. $\dfrac{x^2}{18} - \dfrac{y^2}{8} = 1$

6.27. $\dfrac{y^2}{20} - \dfrac{x^2}{5} = 1$

6.28. $\dfrac{x^2}{14/3} - \dfrac{y^2}{28} = 1$

6.29. $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{144}=1,\ F_1(0;\ 13),\ F_2(0;\ -13)$

6.30. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{8}=1,\ \varepsilon=\sqrt{7/3},\ F_1(-\sqrt{14};\ 0),\ F_2(\sqrt{14};\ 0)$

6.31. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

6.32 а) $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$, $(3;2)$ – центр, $F_1(3-\sqrt{13};\ 2),\ F_2(3+\sqrt{13};\ 2)$

б) $\frac{(x-4)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{9}=1$, $(4;3)$ – центр, $F_1(4-\sqrt{13};\ 3),\ F_2(4+\sqrt{13};\ 3)$

6.33. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

6.34. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}=1$

6.35. $(6;2)$ и $\left(\frac{14}{3};-\frac{2}{3}\right)$

6.36. $x^2-y^2=16$

6.37. 12 (кв.ед)

6.38. $F(2;0),\ y^2=8x,$

6.39. а) $F(4;0),\ x=-4$

б) $F(0;-3{,}5),\ y=3{,}5$

в) $F(-7{,}5;0),\ x=7{,}5$

г) $F(0;1),\ y=-1$

6.40. $x^2=-8y$

6.41. $p=4{,}5$

6.42. $y^2=20x$ и $y^2=-20x$

6.43. $y^2=-24x$

6.44. $(x-4)^2=16(y-2)$

6.45. $y^2=-28x$

6.46. $(y-2)^2=12(x-1)$

6.47. а) $(1;2)$ – вершина параболы, $x=-4$

б) $(3;4)$ – вершина параболы, $y=15/4$

в) $(-1;3)$ – вершина параболы, $y=47/16$

г) $(1;1)$ – вершина параболы, $x=19/20$

6.48. $x^2=-2y,\ y=1/2$

6.49. $y^2=x,\ x=-\frac{1}{4}$

6.50. $x + y + 2 = 0$

6.51. $2x - y - 16 = 0$

6.52. $x + y + 3 = 0$ в точке $(3; -6)$ и $x - y + 3 = 0$ в точке $(3; 6)$

6.53. $x + y + 2 = 0$ и $2x + 5y + 25 = 0$

Тема 7.

7.1. а) $3x - 4y + 5z - 26 = 0$, б) $2x + z - 5 = 0$, в) $2x + y = 0$,

7.2. а) $5x - 5y - 7z + 26 = 0$, б) а) $10x + 15y - 3z - 31 = 0$,

7.3. $2x - 2y + z - 2 = 0$,

7.4. $\sqrt{6}$,

7.5. $x - 2y + z + 5 = 0$,

7.6. $M_1(5;5;5)$,

7.7. $5x - 3y - z - 0 = 0$,

7.8. а) а) $3y + z = 0$, б) $x + 2z = 0$,

7.9. $y + 4 = 0$,

7.10. $\frac{x}{1} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$,

7.11. $3x + 2y - z - 5 = 0$,

7.12. а) $\frac{x+1}{1/2} = \frac{y}{\sqrt{2}/2} = \frac{z-5}{-1/2}$, б) $\frac{x+1}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{-2}$,

7.13. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{4}$,

7.14. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+1}{-1}$,

7.15. $(-0{,}5;-0{,}5;2)$,

7.16. а) $\cos\varphi = -\sqrt{6}/9$, б) $\sin\varphi = 13/21$,

7.17. $a = -2$, $b = 1/2$, $c = 3/4$

7.18. а) 2.1. $15x - 5y - 4z - 14 = 0$, б) $2x - 11y + z + 11 = 0$

7.19. а) $d = 6$, б) $d = 4$

7.20. а) 4.1. $7y + 3z - 5 = 0$, б) 4.2. $y - 5z - 14 = 0$

7.21. $x - 4 = 0$

7.22. $2x + 5y = 0$

7.23. $x - 2y + 4z - 16 = 0$

7.24. $x + 3y + 3z - 4 = 0$

7.25. $2x + 24y + 21z + 7 = 0$

7.26. $11x - 7y - 2z - 21 = 0$

7.27. $(1; -2; 2)$

7.28. $x+2y-6z-1=0$

7.29. $20x+23y+11z-63=0$

7.30. $(2;\,0;\,4)$

7.31. $d=\dfrac{11\sqrt{38}}{38}$

7.32. $\dfrac{x-7}{4}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z+6}{11}$, $\dfrac{x-7}{-5}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+6}{2}$, $\dfrac{x-11}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-5}{1}$

7.33. $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-8}{5}=\dfrac{z+4}{-7}$, $\dfrac{x-9}{13}=\dfrac{y+5}{-8}=\dfrac{z-6}{3}$

7.34. $a=13$

7.35. $c=-2$

7.36. а) $(0;8;-4)$, б) $(4;4;5)$

7.37. $d=\sqrt{5}$

7.38. $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-5}{1}$

7.39. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+5}{\sqrt{2}}=\dfrac{z-3}{-1}$

7.40. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-4}{-6}$

7.41. $\dfrac{x+3}{-3}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{-9}$

7.42. $5x-2y+2z+5=0$

7.43. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-2}{4}$

7.44. $\varphi=\arccos\dfrac{16}{21}$

7.45. $\dfrac{x-2}{-5}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-3}{8}$

7.46. $\begin{cases} x=-2+7t, \\ y=1+3t, \\ z=-3+9t. \end{cases}$

Тема 8.

№8.1.

1) $z=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$;

2) $z=5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=5e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$;

3) $z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$;

4) $z=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$;

5) $z=6\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=6e^{i\frac{\pi}{2}}$;

6) $z=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$;

7) $z=2(\cos\pi+i\sin\pi)=2e^{i\pi}$;

8) $z=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$;

9) $z=8(\cos 0+i\sin 0)=2e^{i0}$;

10) $z=4\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)=4\sqrt{3}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$.

№8.2.

1) $-1-i;\ -3-5i;\ 4-7i;\ -1{,}6+0{,}2i.$

2) $5-3i;\ 1-i;\ 4-7i;\ 1{,}6-0{,}2i.$

3) $i;\ 4+7i;\ 8-14i;\ -\frac{16}{13}-\frac{2}{13}i.$

4) $-2+7i;\ -4+i;\ -15-5i;\ 0{,}9+1{,}3i.$

5) $4-5i;\ -2+i;\ -3-9i;\ \frac{1}{2}-\frac{1}{6}i.$

6) $-4-i;\ 2-5i;\ 9+7i;\ -\frac{3}{13}+\frac{11}{13}i.$

7) $5-2i;\ 3+4i;\ 7-11i;\ 0{,}1+1{,}3i.$

8) $-5-2i;\ -3+4i;\ 7+11i;\ 0{,}1-1{,}3i.$

9) $6;\ -2-4i;\ 12-4i;\ 0{,}2-0{,}6i.$

10) $-1-6i; -5$; $-15+3i$; $\dfrac{3}{13}-\dfrac{15}{13}i.$

№8.3.

1) $-1;$

2) $-4-5i;$

3) $4+5i;$

4) $-\dfrac{3}{13}+\dfrac{11}{13}i;$

5) $\dfrac{1}{68}+\dfrac{21}{68}i;$

6) $-\dfrac{4}{17}-\dfrac{33}{17}i;$

7) $1{,}4-0{,}3i;$

8) $0{,}25-0{,}25i;$

9) $0{,}1-1{,}3i;$

10) $\dfrac{62}{13}-\dfrac{50}{13}i.$

№8.4.

1) $-512+512\sqrt{3}i;$

2) $1;$

3) $256+256i;$

4) $-128-128\sqrt{3}i;$

5) $1024+1024i;$

6) $1728;$

7) $32768;$

8) $4-4i;$

9) 64; 10) $\dfrac{1}{64}.$

№8.5.

1) $\pm\dfrac{1\pm i}{\sqrt{2}};$

2) $\pm\left(\cos\dfrac{\pi}{8}-i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$, $\pm\left(\cos\dfrac{3\pi}{8}+i\sin\dfrac{3\pi}{8}\right);$

3) $\pm(2+i);$

4) $\pm(2-2i);$

5) $\frac{1}{2}(\pm\sqrt{3}+i)$; 6) $\pm(\sqrt{3}-i)$;

7) $\pm\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3}+i), \pm\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(1-\sqrt{3}i)$;

8) $1+i,\quad \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right), \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$;

9) $\pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right)$; 10) $3i, \frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i, -\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$.

№8.6.

1) $-2\pm 2i$;

2) $-4\pm 5i$;

3) $2\pm 2i$;

4) $2\pm 3i$;

5) $-0{,}5\pm 1{,}5i$; 6) $-0{,}2\pm 0{,}6i$;

7) $2\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{5}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{5}\right), k=\overline{0,4}$;

8) $\left(\cos\frac{\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi k}{3}\right), k=\overline{0,5}$;

9) $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\right)\right), k=\overline{0,2}$;

10) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}\right)\right), k=\overline{0,5}$.

Литература

а) Основная:

1. Банникова, Т.М. Аналитическая геометрия: учебно-методическое пособие / Т.М. Банникова, Н.А. Баранова, Д.А. Шарычева. – Ижевск, Изд-во «Удмуртский университет», 2014. – 92 с.

2. Демин, С.Е. Аналитическая геометрия: учеб.-метод. пособие / авт.-сост.: С.Е. Демин, Е.Л. Демина; М-во образования и науки РФ; ФГАОУ ВО «УрФУ им. Первого Президента России Б.Н. Ельцина», Нижнетагил. технол. ин-т (фил.). – Нижний Тагил: НТИ (филиал) УрФУ, 2016. – 272 с.

3. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А.. Сборник задач по высшей математике, 1 часть. – М.: АЙРИС-пресс, 2017. – 576с.

4. Лунгу К.Н. и др.; под редакцией Федина С.Н.. Сборник задач по высшей математике, 2 часть – М.: АЙРИС-пресс, 2017. – 592с.

5. Ларина, М.В. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. Элементы линейной алгебры: Учебное пособие // М.В. Ларина – Волгоград: Изд-во ВолгГМУ, 2011. – 68 с.

б) Дополнительная:

6. Александрова Е.Б.. Математика. Часть 1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебное пособие // Е.Б. Александрова, А.А. Атоян, И.Е. Водзинская. Под ред. Г.Г. Хамова. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2004. – 149 с.

7. Гусак, А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие по решению задач. – Мн.: ТетраСистемс, 2001. – 288 с.

8. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии: учебное пособие для вузов / Д.В. Клетеник; под ред. Н. В. Ефимова. – 15-е изд. – Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1998. – 223 с.

9. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н.. Высшая математика для экономических специальностей. – М.: Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2010. – 909с.

10. Марданов Р.Ш., Хасанова А.Ю., Султанов Р.А., Фатыхов А.Г..Сборник задач по математике для экономистов: учебное пособие для экономических специальностей вузов. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. – 576с.

11. Минорский В.П.. Сборник задач по высшей математике. Учеб. пособие для втузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 352с.

12. Черненко, В.Д. Высшая математика в примерах и задачах: Учебное пособие для вузов. В 3 т.: Т. 1. // В.Д. Черненко. — СПб.: Политехника, 2003.— 703 с: ил.