Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего образования
Казанский государственный аграрный университет

Кафедра экономики и
информационных технологий

Учебно-методическое пособие для практических занятий и самостоятельной работы по дисциплине «Методы оптимальных решений»

(часть 1)

Казань - 2015

ББК 65.9(2)32
УДК 631.15.001.891.57(075.8)

Составители : д.э.н., проф. Газетдинов М.Х., к.э.н., доц. Семичева О.С., к.э.н., доц. Гатина Ф.Ф.

Рецензенты: доцент кафедры прикладной математики КГАСУ, к.ф-м.н. Габбасов Ф.Г., к.э.н., доцент кафедры бухгалтерского учета и аудита КГАУ Мухаметзянов К. З.

Учебно-методическое пособие для практических занятий и самостоятельной работы по дисциплине «Методы оптимальных решений» для студентов Института экономики по направлению 38.03.01 «Экономика» представляет весь комплекс современных обучающих и контролирующих средств, предназначенных для аудиторной и самостоятельной работы студентов. Учебный материал представлен по темам и содержит методические рекомендации по их изучению, контрольные задачи и вопросы для самопроверки, а также список рекомендованной учебной литературы.

Учебно-методическое пособие обсуждено и одобрено на заседании кафедры экономики и информационных технологий 29 октября 2015 года, протокол № 4.

Обсуждено, одобрено и рекомендовано в печать на заседании методической комиссии Института экономики 9 ноября 2015 года, протокол № 4.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОДНОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

1.1 Линейное программирование

Методы линейного программирования позволяют оптимальным образом распределять ресурсы, предназначенные для решения какой-либо экономической задачи.

Краткая формулировка общей задачи линейного программирования.

Найти

$$(1)\quad \mathbf{Z=c_1x_1+ c_2x_2+ c_3x_3+ \ldots+ c_nx_n \rightarrow max\ (или\ min)}$$

при ограничениях:

$$(2)\quad \begin{cases} a_{11}x_1+ a_{12}x_2+ a_{13}x_3+ \ldots+a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1+ a_{22}x_2+ a_{23}x_3+ \ldots+a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1+ a_{k2}x_2+ a_{k3}x_3+ \ldots+a_{kn}x_n \le b_k \\ \\ a_{k+1,1}x_1+ a_{k+1,2}x_2+ a_{k+1,3}x_3+ \ldots+a_{k+1,n}x_n \le b_{k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+ a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3+ \ldots+x_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

$$(3)\quad x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots l;\ l \le n),$$ где

Z – целевая функция,

Система (2) – система ограничений.

Оптимальным решением задачи линейного программирования называется решение X = (X1, X2,…, Xn), системы ограничений (2), удовлетворяющее условию (3), при котором линейная функция (1) принимает оптимальное (максимальное или минимальное) значение.

1.1.1 Графический метод решения задач линейного программирования

Графический метод основан на геометрической интерпретации задач линейного программирования. Он может использоваться в случаях, когда число переменных в задаче равно двум.

Алгоритм графического метода

1. Записываются уравнения границ допустимой области решений – прямые линии, уравнения которых получаются заменой неравенств в ограничениях задачи на равенства.

Эти прямые рекомендуется строить по двум точкам пересечения с осями координат. В случае прохождения черва начало координат (кроме случаев $x_1 = 0$, $x_2 = 0$) достаточно найти только одну точку на этой прямой, придавая одной из координат некоторое произвольное значение, отличное от нуля, удобное для вычислений и построений. После нахождения всех этих точек нужно выбрать подходящие масштабы на осях (не обязательно одинаковые для обеих осей), с тем чтобы геометрическое построение было удобным для черчения и обзора.

2. Находятся полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи, либо методом пробной точки, либо исходя из геометрического смысла вектора - нормали граничной прямой.

3. Устанавливается и выделяется штриховкой многоугольная область допустимых решений как общая часть (пересечение) указанных полуплоскостей.

4. Строится одна из линий уровня целевой функции как прямая линия ***f*= *const***. Постоянную справа следует выбирать, сообразуясь с выбранными масштабами на осях.

5. Строится вектор нормали (градиент функции $\boldsymbol{f}$) линии уровня целевой функции $\boldsymbol{f}$, указывающий направление наибыстрейшего возрастания значения $\boldsymbol{f}$.

Замечание. Направление возрастания можно тоже установить методом пробной точки.

6. Определяется экстремальная точка допустимого множества решений (многоугольный выпуклой области, выделенной штриховкой) для рассматриваемой целевой функции (**max** или **min** значения ***f*** или и то и другое) посредством параллельного смещения прямой линии ***f= const*** в направлении возрастания в **max *f*** и в противоположном направлении в случае поиска **min *f***. Это будет наиболее удаленная крайняя точка (или отрезок граничной прямой - сторона многоугольника) в которой сдвигаемая прямая ***f= const*** имеет пересечение с областью решений, если эта область ограничена в указанном направлении. Следует иметь в виду и что; задача может и не иметь решений.

7. Определяются координаты точки экстремума целевой функции (искомые решения) и вычисляется соответствующее экстремальное значение функции ***f.***

Контрольные вопросы:

1. Что такое модель, моделирование?
2. Как классифицируются задачи линейного программирования?
3. Из каких этапов состоит процесс построения модели?
4. Что такое ограничения задачи?
5. Что такое область допустимых решений?
6. Какое значение имеет целевая функция для решения задачи?
7. Каким требованиям должно удовлетворять оптимальное решение задачи?

Задания для практических занятий

Найти графическим методом оптимальное решение задач линейного программирования.

1.
$$\begin{aligned} &2x_1+5x_2\le 10\\ &2x_1+x_2\le 6\\ &x_1+2x_2\ge 2\\ &x_1\ge 0\\ &x_2\ge 0\\ &3x_1-x_2+6\to\min \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} &x_1+x_2\le 4\\ &6x_1+2x_2\ge 8\\ &x_1+5x_2\ge 4\\ &x_1\le 3\\ &x_2\le 3\\ &x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\\ &2x_1+3x_2\to\min \end{aligned}$$

3. $7x_1+5x_2 \geq 32$
$2x_1+7x_2 \geq 14$
$-x_1+6x_2 \geq 0$
$x_1 \leq 8$
$x_2 \leq 5$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$
$2x_1 - 4x_2 \to \min$

4. $2x_1+x_2 \leq 12$
$x_2 \leq 7$
$x_1+x_2 \geq 4$
$2x_1 - 3x_2 \leq 6$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$
$4x_1 + x_2 \to \max$

Задания для самостоятельной работы студентов.

Задача1. $Z_{max}=Ax_1+Bx_2$ при
$Cx_1+Дx_2 \leq E$
$Fx_1+Px_2 \geq Q$
$Rx_1+Sx_2 \geq T$
$0 \leq x_1 \leq У$
$0 \leq x_2 \leq Z$

Исходные данные для задачи 1

№ варианта	A	B	C	D	E	F	P	Q	R	S	T	Y	Z
1	2	3	3	1	8	6	2	6	1	5	4	3	3
2	2	3	1	2	5	6	3	8	1	5	4	3	3
3	2	1	1	1	4	6	2	12	1	4	8	5	3
4	2	3	1	1	6	6	2	8	1	5	4	4	5
5	2	3	2	1	4	6	2	10	1	5	6	3	3
6	3	-2	7	4	28	7	2	14	-1	2	2	∞	∞
7	3	-3	7	4	56	7	2	28	-1	2	4	∞	∞
8	3	-3	7	4	56	7	2	28	-1	2	4	5	10
9	-2	5	5	6	30	7	2	14	3	8	24	∞	∞
10	-3	7	5	6	30	7	2	14	3	8	24	4	3

Задача 2. $Z_{min}=Ax_1+Bx_2$ при
$Cx_1+Дx_2 \leq E$
$Fx_1+Px_2 \geq Q$
$Rx_1+Sx_2 \geq T$
$0 \leq x_1 \leq У;\quad 0 \leq x_2 \leq Z$

Исходные данные для задачи 2

№ варианта	A	B	C	D	E	F	P	Q	R	S	T	Y	Z
1	2	3	3	1	8	6	2	6	1	5	4	3	3
2	-2	5	5	6	30	7	2	14	3	8	24	∞	∞
3	2	3	1	2	5	6	3	8	1	5	4	3	3
4	-2	5	5	7	35	7	3	21	3	8	24	∞	∞

5	2	1	2	1	4	6	2	12	1	5	8	5	4
6	-2	6	5	7	35	7	2	14	3	9	27	∞	∞
7	2	3	1	1	6	6	2	8	1	5	4	4	5
8	-2	7	5	7	35	7	2	14	3	8	24	4	0
9	2	3	2	1	4	6	2	10	1	5	6	3	3
10	-3	7	5	6	30	7	2	14	3	8	24	4	3

Задача 3. $Z_{max}=Ax_1+Bx_2$ при

$Cx_1+Дx_2\le E$

$Qx_1+Rx_2\ge P$

$Sx_1+Tx_2\ge Y$

$0\le x_1\le F$; $0\le x_2\le Z$

Исходные данные для задачи 3

№ варианта	A	B	C	D	E	F	P	Q	R	S	T	Y	Z
1	4	1	2	1	12	∞	4	1	1	2	-3	6	7
2	4	2	2	2	16	∞	4	1	1	2	-3	8	7
3	4	1	1	1	12	∞	4	1	1	2	-3	6	7
4	4	2	2	1	16	∞	4	1	3	3	-2	6	6
5	4	1	1	1	15	∞	4	4	1	3	-2	6	10
6	3	1	5	3	15	∞	3	3	3	2	6	12	∞
7	3	4	6	6	36	∞	2	2	1	4	8	32	∞
8	3	-1	1	5	9	∞	3	1	3	2	1	7	∞
9	3	-1	2	4	12	∞	3	3	2	2	1	6	∞
10	2	-1	1	2	10	∞	3	3	2	5	-1	10	∞

Задача 4. $Z_{min}=Ax_1+Bx_2+C$ при

$Дx_1+Ex_2\le F$

$Px_1+Qx2\le R$

$Sx_1+Tx_2\ge Y$

$x_1\ge 0$; $x_2\ge 0$

Исходные данные для задачи 4

№ варианта	A	B	C	D	E	F	P	Q	R	S	T	Y
1	3	-1	8	1	5	9	2	1	7	1	3	3
2	3	-1	4	2	4	12	2	1	6	3	2	3
3	3	-1	7	2	4	20	1	2	10	3	2	3
4	2	-1	4	1	2	10	5	-1	10	3	2	3
5	2	-1	8	1	2	6	4	-1	10	3	2	3
6	3	1	0	5	3	15	2	6	12	3	3	3
7	3	4	0	6	6	36	4	8	32	2	1	2
8	4	1	0	2	1	12	2	-3	6	1	1	4
9	4	2	0	2	2	16	2	-3	8	1	1	4
10	4	1	0	1	1	12	2	-3	6	1	1	4

Задача 5. $Z_{max}=Ax_1+Bx_2 + C$ при

$Дx_1+Ex_2 \le F$

$Px_1+Qx_2 \ge R$

$0+x_1 \le S$

$0 \le x_2 \le T$

Исходные данные для задачи 5

№ варианта	A	B	C	D	E	F	P	Q	R	S	T
1	3	-1	4	2	4	12	3	2	3	∞	∞
2	3	-1	8	1	5	9	1	3	3	∞	∞
3	4	2	0	4	-1	12	3	2	6	3	3
4	3	-1	0	1	6	12	1	3	4	∞	∞
5	2	-4	0	2	3	24	1	8	16	8	5
6	2	3	0	3	1	8	6	2	6	3	3
7	2	3	0	1	2	5	6	3	8	3	3
8	3	-3	0	7	4	56	7	2	28	5	10
9	-3	7	0	5	6	30	7	2	14	4	3
10	2	1	0	1	1	4	6	2	12	5	3

Задача 6. $Z_{min}=Ax_1+Bx_2$ при

$Cx_1+Дx_2 \ge E$

$Fx_1+Px_2 \ge Q$

$R \le x_1 \le S$

$T \le x_2 \le Z$; $(R \ge 0;\ T \ge 0)$

Исходные данные для задачи 6

№ варианта	A	B	C	D	E	F	P	Q	R	S	T	Z
1	3	4	6	6	36	4	8	32	1	∞	0	∞
2	10	12	5	7	35	12	5	60	2	∞	1	∞
3	-2	5	7	2	14	3	8	24	0	∞	0	∞
4	2	-10	1	-1	0	1	-5	-5	0	∞	0	∞
5	1	-10	1	-0.5	0	1	-5	-5	0	∞	0	∞
6	2	3	6	2	6	1	5	4	0	3	0	3
7	2	3	6	3	8	1	5	4	0	3	0	3
8	2	1	6	2	12	1	4	8	0	5	0	3
9	2	3	6	2	8	1	5	4	0	4	0	5
10	2	3	6	2	10	1	5	6	0	3	0	3

Задача 7. $Z_{max}=Ax_1+Bx_2 + C$ при

$Cx_1+Дx_2 \le F$

$Fx_1+Px_2 \le Q$

$R \le x_1 \le S,\ T \le x_2 \le Z$

Исходные данные для задачи 7

№ варианта	A	B	C	D	E	F	P	Q	R	S	T	Z
1	3	3	5	3	15	2	6	12	0	3	0	2
2	4	1	2	1	12	2	-3	6	0	∞	0	7
3	4	2	2	2	16	2	-3	8	0	∞	0	7
4	3	4	4	3	12	7	5	35	0	3	0	6
5	4	2	2	1	16	3	-2	6	0	10	1	6
6	4	1	1	1	15	3	-2	6	1	12	1	10
7	3	4	6	6	36	4	8	32	1	10	1	10
8	3	-1	1	5	9	2	1	7	0.5	9	2	12
9	3	-1	2	4	12	2	1	6	2	12	0.5	9
10	2	-1	1	2	10	5	-1	10	1	10	1	10

1.1.2 Симплексный метод решения задач линейного программирования

Симплексный метод решения задач линейного программирования относится к численным методам отыскания оптимального решения различных управляемых процессов, в том числе экономических. Этот метод позволяет, исходя из известного допустимого решения задачи, за конечное число шагов получить ее оптимальное решение. Каждый из шагов (или итераций) состоит в нахождении нового решения, которому соответствует меньшее (или большее) значение целевой функции, чем значение этой же функции в предыдущем решении. Процесс продолжают до получения оптимального решения.

Для осуществления основной цели симплексного метода – последовательного улучшения решения – используются три основных элемента:

1) способ определения какого-либо первоначального допустимого решения задачи;

2) правило перехода к лучшему (точнее, нехудшему) решению;

3) критерий проверки оптимальности найденного решения.

Рассмотрим нахождение минимального значения линейной функции $Z=x_1 - x_2 - 3x_3$

при следующих ограничениях:

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + x_3 &\le 1 \\
-4x_1 + 2x_2 - x_3 &\le 2 \\
3x_1 \quad + x_3 &\le 5 \\
x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0,\ x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Алгоритм решения задачи симплексным методом разработан на максимизацию целевой функции и задача должна быть записана в канонической форме. Поэтому в случае, если задача поставлена на минимизацию целевой функции, то прежде чем приступить к решению этой задачи необходимо изменить знаки в целевой функции. Тем самым изменив и «смысл» оптимизации, т.е. следует переписать целевую функцию следующим образом:

максимизировать $Z = -x_1 + x_2 + 3x_3$

Обозначим через переменную Z значение целевой функции и введем в рассмотрение дополнительные переменные для перехода от неравенств к равенствам. Введение переменных Z, x_4, x_5, x_6 позволяет записать целевую функцию и ограничения в виде следующей системы уравнений:

$$
\begin{aligned}
&Z + x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\
&2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
&-4x_1 + 2x_2 - x_3 + \quad x_5 = 2 \\
&3x_1 \quad + x_3 \quad + x_6 = 5 \\
&x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0;\ x_5 \ge 0;\ x_6 \ge 0
\end{aligned}
$$

Для начала необходимо выбрать первоначальное допустимое решение системы уравнений. Существует множество таких решений, однако удобнее всего начать с $x_4=1$, $x_5=2$, $x_6=5$ при нулевых значениях других переменных, соответственно, при этом Z=0. Другими словами, строится первое пробное решение с помощью только свободных переменных. Назовем его исходным опорным планом, а переменные x_4, x_5, x_6, Z – базисными переменными или сокращенно базисом. Соответственно, переменные x_1, x_2, x_3 являются небазисным для опорного плана.

Составляем первую симплексную таблицу:

	Базис	C j	Свободные члены	Переменные					
				X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
1	X_4	0	1	2	-1	1	1	0	0
2	X_5	0	2	-4	2	-1	0	1	0
3	X_6	0	5	3	0	1	0	0	1
m+1	Z	1	0	1	-1	-3	0	0	0

Среди элементов строки Z имеются два отрицательных X_2= -1 и X_3= -3. Это означает, что первоначальное решение не является оптимальным и его можно улучшить, включив в базис переменную, которой соответствует наибольшее значение X_J. Столбец, в котором находится эта переменная, называется разрешающим или ведущим, в нашем случае, это третий столбец.

Вычислим отношения свободных членов к соответствующим положительным коэффициентам разрешающего столбца: 1/1, 5/1. Строка, которой соответствует наименьшее из этих отношений, называется разрешающей или ведущей. В нашем случае это – первая строка. Элемент симплексной таблицы, стоящий на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, называется разрешающим. В нашем случае это – 1. Разрешающий элемент показывает, что переменную, находящуюся в разрешающем столбце (x_3) нужно ввести в число базисных, а переменную разрешающей строки (x_4) исключить из базисных.

Составим вторую симплексную таблицу:

	Базис	C j	Свободные члены	Переменные					
				X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
1	X_3	3	1	2	-1	1	1	0	0
2	X_5	0	3	-2	1	0	1	1	0
3	X_6	0	4	1	1	0	-1	0	1
m+1	Z	1	3	7	-4	0	3	0	0

Определяем новые элементы разрешающей строки. Для этого старые элементы разрешающей строки разделим на разрешающий элемент (на 1). Все остальные новые элементы таблицы вычисляются по «правилу диагоналей прямоугольника».

Например, для элемента, стоящего в столбце свободных членов во второй строке, мысленно строим прямоугольник в первой таблице с вершинами: 2, 1, 1, -1 и из произведения старого элемента, стоящего в столбце свободных членов во второй строке (2), на разрешающий элемент (1) вычитаем произведение элементов, стоящих по второй диагонали построенного прямоугольника: 1 · (-1). Полученную разность делим на разрешающий элемент. Таким образом, новый элемент, стоящий в столбце свободных членов во второй строке, будет определяться по формуле:

$$\frac{2\cdot 1-1\cdot(-1)}{1}=3$$

По «правилу диагоналей прямоугольника» вычисляем все элементы второй симплексной таблицы. Таким образом получено второе допустимое решение x_1=0; x_2=0; x_3=1; x_4=0; x_5=3; x_6=4, которому соответствует значение линейной функции Z=-3.

В (m+1)-й строке X_2>0, а значит полученное решение не является оптимальным и переменная x_2 подлежит включению в базис.

Определим отношение свободных членов к соответствующим положительным элементам второго столбца: 3/1, 4/1. Следовательно, разрешающей будет вторая строка; число 1, стоящее на пересечении второго столбца и второй строки, разрешающий элемент; переменная x_5 исключается из базиса. Критерий оптимальности полученного решения – в строке целевой функции все элементы должны быть положительными. Аналогично составляем третью и четвертую симплексные таблицы.

	Базис	C j	Свободные члены	Переменные					
				X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
1	X_3	3	4	0	0	1	2	1	0
2	X_2	1	3	-2	1	0	1	1	0
3	X_6	0	1	3	0	0	-2	-1	1
m+1	Z		15	- 1	0	0	7	4	0

	Базис	C j	Свободные члены	Переменные					
				X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
1	X_3	3	4	0	0	1	2	1	0
2	X_2	1	11/3	0	1	0	-1/3	1/3	2/3
3	X_1	-1	1/3	1	0	0	-1/2	-1/3	1/3
m+1	Z		46/3	0	0	0	19/3	11/3	1/3

Так как в (m+1)-й строке четвертой итерации все элементы положительные (критерий оптимальности для задачи максимизации), то допустимое решение x_1=1/3; x_2=11/3; x_3= 4 – оптимальное, и ему соответствует максимальное значение целевой функции Z= 46/3.

После получения оптимального решения производится анализ и проверка. Проверка осуществляется путем подстановки значений базисных переменных в исходную систему ограничений.

Контрольные вопросы.

1. В чем отличие общего и канонического вида модели линейного программирования?
2. Какие типы переменных вы знаете?
3. В чем заключается идея симплексного метода?
4. Как выбирают разрешающий столбец? Что означает этот выбор с экономической точки зрения?
5. Как выбирают разрешающую строку? Что означает этот выбор с экономической точки зрения?
6. Как выбирают разрешающий элемент? Что означает этот выбор с экономической точки зрения?
7. Как пересчитываются элементы разрешающего столбца, разрешающей строки и всех остальных строк при переходе к следующей симплексной таблице?
8. Что является показателем достижения экстремума при решении симплексным методом?
9. Как проверить выполнение условий задачи, решенной симплексным методом?

Задания для практических занятий

Решить симплексным методом следующие задачи линейного программирования:

1. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \le 20 \\ 2x_1 + 16x_2 + x_3 + x_4 \le 4 \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 + 10x_4 \le 10 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$Z_{min} = -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4$$

2. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 3 \\ 2x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$Z_{max} = 3x_1 - x_2$$

3. $$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 48 \\ 4x_1 \quad 2x_2 + 3x_3 \le 60 \\ 3x_1 + \qquad\quad x_3 \le 36 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$
$$Z_{max} = 6x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

4. $$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ \qquad x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$Z_{max} = x_1 + 2x_2$$

5. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 6x_3 \le 12 \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 \le 27 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$
$$Z_{max} = 14x_1 + 6x_2 + 22x_3$$

Задания для самостоятельной работы студентов.

Задача 1

В отделении возделываются культуры: многолетние травы на зеленый корм и на сено, и однолетние травы на зеленый корм и на сено. Площадь пашни составляет А га, ресурсы ручного труда – В чел-дн., площадь многолетних трав на зеленый корм должна составлять не более С га.

Эффективность возделывания кормовых культур

Показатели	Многолетние травы		Однолетние травы	
	на зел.корм.	на сено	на зел.корм.	на сено
1.Затраты труда на 1 га, чел-дн.	2.0	3.0	4.0	5.0
2.Выход кормов с 1 га, ц к.ед.	30.0	25.0	25.0	20.0

Определить оптимальное сочетание посевов указанных кормовых культур, обеспечивающее максимальное производство кормов со всей площади. Дать экономическое описание оптимального решения.

Исходные данные для задачи 1

	№ варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	400	1110	380	370	350	1010	500	600	700	800
B	2000	6550	1500	1000	1025	2550	2000	2000	2000	2000
C	100	370	90	95	88	270	100	200	250	300

Задача 2

Две культуры – кормовая свекла и кукуруза на силос – могут возделываться без орошения и с поливом. Площадь орошаемой пашни, выделенной под эти культуры, составляет А га, площадь богарных земель – В га. Ресурсы труда – С чел-дн., ресурсы воды – Д тыс.$м^3$.

Норма затрат ресурсов и урожайность культур

Показатели	Кормовая свекла		Кукуруза на силос	
	Без полива	На поливе	Без полива	На поливе
1.Затраты труда, чел-дн.	40	50	20	30
2.Норма полива, $м^3$/га.	-	1	-	2
3.Выход кормов с 1 га, ц к.ед.	30	50	22	60

Определить оптимальное сочетание посевов указанных культур, обеспечивающее максимальное производство кормов. Дать экономическое описание полученного решения.

Исходные данные для задачи 2

	№ варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	580	500	550	560	350	600	500	500	500	500
B	200	300	210	200	210	400	400	350	350	200
C	12000	11400	11400	15000	11400	13000	17000	16500	16000	15000
Д	1500	1710	1510	1510	1510	2000	1600	1500	1300	1300

Задача 3

Определить оптимальное сочетание отраслей в растениеводстве, если площадь пашни составляет А га, объем минеральных удобрений В ц д.в. Возделываются картофель (его площадь не более С га), ячмень, горох.

Затраты на 1 га сельскохозяйственных культур и их эффективность

Культуры	Нормы внесения минерал.удобрений, ц д.в.	Урожайность, ц/га	Закупочная цена за 1ц, д.е.
1. Картофель	3	100	6,0
2. Ячмень	1,2	19	8,0
3. Горох	2,1	16	21,0

Критерий оптимальности – максимум производства валовой продукции в стоимостном выражении. Дать экономическое описание оптимального решения.

Исходные данные для задачи 3

	№ варианта									
	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
А	1300	1100	1000	2000	900	950	1100	1000	1000	1200
В	2000	1855	1900	2900	2000	1800	2100	2000	2000	2000
С	350	250	250	350	200	250	300	400	300	300

Задача 4

Возделываются культуры: овес, пшеница и картофель. Площадь пашни составляет А га, посевная площадь зерновых – не более одной трети от площади всей пашни, посевная площадь картофеля не более В га.

Урожайность культур составляет: овес – 25 ц/га, оз.пшеница – 28 ц/га, картофель – 170 ц/га.

Закупочные цены на овес – 9 д.е./ц, оз.пшеница – 13 д.е./ц, картофель 8 д.е./ц

Определить оптимальное сочетание посевных площадей этих культур, обеспечивающее максимальное производство валовой продукции в стоимостном выражении. Дать экономическое описание полученного решения.

Исходные данные для задачи 4

	№ варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
А	1650	800	860	600	660	1650	1000	1500	750	900
В	300	200	300	240	290	200	200	600	300	500

Задача 5

Определить максимальное количество продукции в стоимостном выражении. Имеются ресурсы: пашни А га, труда – В чел.дн. материально – денежных средств – С д.е. При этом пшеницы должно быть произведено не более Д ц. Ресурсы могут быть недоиспользованы. Дать экономическое описание оптимального решения.

Культуры	Урожайность ц/га	Затраты на 1 га.		Выход продукции, с 1 га.д.е.
		труда, чел-д.	мдс,д.е.	
Пшеница	21	3	105	215
Ячмень	25	4	60	260
Капуста	550	9	370	1385

Исходные данные для задачи 5

	№ варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
А	450	700	1000	1000	800	500	800	900	1000	1000
В	5510	5500	5500	5000	5000	2000	3000	4000	4500	5000
С	91600	90000	90000	70000	70000	50000	60000	70000	75000	80000
Д	1500	1550	1650	1650	1600	1550	1600	1650	1700	1750

Задача 6

Определить оптимальное сочетание посевов трех сельскохозяйственных культур: гороха, овса и кормовой свеклы, обеспечивающее максимальное производство валовой продукции, если площадь пашни составляет А га, трудовые ресурсы – В чел-дн, материально – денежные средства – С д.е. Посевная площадь кормовой свеклы не должна превышать Д га. Дать экономическое описание оптимального решения.

Затраты труда и средств на 1 га и выход валовой продукции с 1 га культур.

Культуры	Затраты на 1 га		Выход валовой продукции с 1 га, д.е.
	Труда, чел.дн.	МДС, д.е.	
1. Горох	4.1	110	280
2. Овес	3.1	110	340
3. Кормовая свекла	42.5	270	850

Исходные данные для задачи 6

	№ варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
А	450	500	550	600	650	500	600	700	8000	900
В	3950	3950	4000	4000	4000	4000	5000	6000	7000	8000
С	95000	95000	95000	90000	90000	95000	95000	95500	95600	90000
Д	50	60	70	70	80	60	65	70	75	80

Задача 7

Возделываются три культуры: овес, кукуруза на силос, многолетние травы на сено. Площадь пашни – А га. Известно, что посевная площадь овса не должна превышать В га, а трудовые ресурсы составляют С чел.дн.

Эффективность возделывания кормовых культур.

Культуры	Выход кормов с 1 га., ц к.ед.	Затраты труда на 1 га, чел-дн.
1. Овес	26	3
2. Кукуруза на силос	24	2
3. Многолетние травы	16	3

Найти оптимальное сочетание посевов этих культур для производства наибольшего количества кормов. Дать экономическое описание оптимального решения.

Исходные данные для задачи 7

	№ варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
А	650	620	700	750	800	850	900	950	1000	1050
В	205	210	230	280	300	300	350	360	370	400
С	3200	3000	3500	4000	4500	5000	6500	7000	7500	7900

1.1.3 Транспортные задачи. Метод потенциалов

Постановка транспортной задачи. Имеется m пунктов отправления груза и объемы отправления по каждому пункту a_1, a_2, a_3, …, a_m. Известна потребность в грузах b_1, b_2, …, b_n по каждому из n пунктов назначения. Задана матрица стоимостей доставки единицы груза по каждому варианту c_{ij} (I= 1, 2, …, m; j = 1, 2, …, n).

Необходимо рассчитать оптимальный план перевозок, т.е. определить, сколько груза должно быть отправлено из каждого I-го пункта отправления (от поставщика) в каждый j-й пункт назначения (до потребителя).

Данные представлены в общем виде в таблице 1.

Таблица 1.

Потребители / **Поставщики**	B_1	B_2	B_3	B_4	**Запасы (объемы отправления)**
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{11}	………….....	c_{1n} x_{11}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	……….	c_{2n} x_{2n}	a_2
…………			……….		
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	……….	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребность	b_1	b_2	…………….	b_n	

Транспортная задача называется *закрытой,* если суммарный объем отправляемых грузов ($\sum_{i=1}^{m} a_i$) равен суммарному объему потребности в этих грузах по пунктам назначения ($\sum_{j=1}^{n} b_j$):

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Если такого равенства нет, т.е. потребности выше запасов и наоборот, то задачу называют *открытой.*

Математическая модель задачи следующая:

Все грузы из I-х пунктов должны быть отправлены, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i=1,2,\ldots,m$$

Все j-е пункты (потребители) должны быть обеспечены грузами в плановом объеме:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j=1,2,\ldots,n$$

Суммарные объемы отправления должны равняться суммарным объемам назначения:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Должно выполняться условие не отрицательности переменных

$X_{ij} \geq 0$, I=1,2,…,m; j=1,2,…,n

Перевозки необходимо осуществлять с минимальными транспортными издержками (*функция цели*).

$$Z_{min} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Решение транспортной задачи методом потенциалов

Алгоритм метода потенциалов включает следующие этапы:

1. Разработку начального опорного плана.
2. Расчет потенциалов.
3. Проверку плана на оптимальность.
4. Поиск максимального звена неоптимальности (если условие п.3 не было достигнуто).
5. Составление контура перераспределения ресурсов.
6. Определение минимального элемента в контуре перераспределения и перераспределение ресурсов по контуру.
7. Получение нового плана.

Списанная процедура повторяется несколько раз (***итераций***) пока не будет найдено оптимальное решение. Вычислительный алгоритм для каждой итерации не меняется.

Примечание.

В том случае, если транспортная задача является ***открытой***, ее можно привести к ***закрытому*** виду, вводя ***фиктивного*** потребителя или поставщика, записав на него излишки и присвоив ему стоимость перевозок $c_{ij} = 0$.

Метод северо-западного угла получения опорного плана

Исходные данные приведены в таблице, с помощью которой будет рассмотрен алгоритм данного метода.

Таблица 1

Потребители / **Поставщики**	**B_1**	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**Запасы (объемы отправления)**
A_1	**1**	**2**	**3**	**4**	**60**
A_2	**4**	**3**	**2**	**0**	**80**
A_3	**0**	**2**	**2**	**1**	**100**
Потребность	**40**	**60**	**80**	**60**	**240**

В соответствии с этим методом загрузка клеток (распределение объемов пунктов отправления по пунктам назначения) начинается с левой верхней клетки («северо-западная» часть таблицы) и продолжается вниз и вправо (по диагонали).

По указанному правилу загружаем первую клетку (i-j)=(1-1) на основании следующего условия:

$$x_{11} = \min\{a_1; b_1\} = \min\{60; 40\} = 40$$

Таким образом, первый пункт назначения загружен, а первый пункт отправления имеет остатки груза Δa_1=60-40=20, которые и распределяем на второй пункт назначения:

$$x_{12} = \min\{a_1; b_2\} = \min\{20; 60\} = 20$$

Продолжая преобразования аналогичным образом, получаем:

$$x_{22} = \min\{a_2; \Delta b_2\} = \min\{80; 40\} = 40$$

$\Delta b_2 = 40$ и т.д.

Результаты начального плана и расчета потенциалов предоставлены в таблице.

Таблица 2

Потребители / Поставщики	**B_1**	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**Запасы (объемы отправления)**
A_1	**1** **40**	**2** **20**	**3**	**4**	**60**
A_2	**4**	**3** **40**	**2** **40**	**0**	**80**
A_3	**0**	**2**	**2** **40**	**1** **60**	**100**
Потребность	**40**	**60**	**80**	**60**	**240**

В процессе решения после каждой итерации (в том числе и после получения допустимого решения) по загруженным клеткам проверяется выполнение следующего условия:

$N = m + n - 1$

В нашем примере $m = 3$, $n = 4$, а число загруженных клеток равно 6, т.е. соответствует условию. Если условие не выполняется, то план называется вырожденным. В этом случае в любые свободные клетки надо поставить столько нулей, чтобы с их учетом выполнялось условие.

Клетка, в которой стоит ноль, считается занятой. Значение целевой функции по результатам расчета допустимого начального плана

$$Z_1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = 1*40+2*20+3*40+2*40+2*40+1*60 = 420$$

денежных единиц.

2. Расчет потенциалов.

Возьмем некоторое число U_i и назовем его *потенциалом i-й строки*, и число V_j– *потенциал j-го столбца*, для которых выполняется условие

$U_i+Vj=Cij$, т.е. стоимости перевозки в каждой клетке.

Вычисляя потенциалы, принимаем $U_1 = 0$ для *первой строки*. Используя загруженные клетки (i– j) = (1-1), получаем:

$U_1+V_1=C_{11}=0+V_1=1$; $V_1=1$

$U_1+V_2=C_{12}=0+V_2=2$; $V_2=2$

Далее по загруженным клеткам (2-2), (2-3) определяем другие потенциалы:

$U_2+V_2=3$; $U_2+2=3$; $U_2=1$

$U_2+V_3=211$; $1+V_3=2$; $V_3=1$

3. Проверка плана на оптимальность по незагруженным клеткам.

Если для *незагруженных* клеток выполняется условие $U_i+Vj<=Cij$, то план оптимальный.

По таблице 2 проверяем начальный план на оптимальность.

Для (1-3)   0+1<=3

(1-4)   0+0<=4

(2-1)   1+1<=4

(2-4) 1+0>0 $\Delta c_{24} = 1$

(3-1) 1+1>0 $\Delta c_{31} = 2$

(3-2) 1+2>0 $\Delta c_{32} = 1$

Итак, по трем клеткам условие U_i+Vj≤Cij, не выполняется, следовательно, начальный план требует улучшения. Характеристики Δc_{ij} показывают размер экономии транспортных издержек на 1 единицу перевозимого груза.

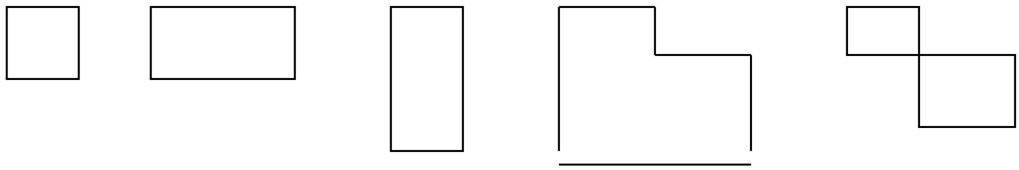
Таблица 3

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы (объемы отправления)	U_i
A_1	1 40 -	2 20 +	3	4	60	0
A_2	4	3 40 -	2 40 +	0	80	1
A_3	+ 0 +	2	2 40 -	1 60	100	1
Потребность	40	60	80	60	240	
v_j	1	2	1	0		

4. Наибольшую экономию можно получить по клетке (3-1), где $\Delta c_{31} = 2 > \Delta c_{24}; \Delta c_{32}$ Следовательно, клетку (3-1) необходимо загрузить за счет перераспределения ресурсов из других загруженных клеток. В таблице 3 клетку (3-1) помечаем знаком «+», так как здесь в начальном плане находится вершина максимальной неоптимальности.

5. Контур перераспределения ресурсов составляют по следующим правилам:

- этот контур представляет собой замкнутый многоугольник с вершинами в загруженных клетках, за исключением клетки с вершиной максимальной неоптимальности «+», звеньями, лежащими вдоль строк и столбцов матрицы;
- ломаная линия должна быть связанной в том смысле, что из любой ее вершины можно попасть в любую другую вершину по звеньям ломаной цели (по строке или столбцу);
- в каждой вершине контура встречаются только два звена, одно из них располагается по строке, другое – по столбцу;
- число вершин контура чётное, все они в процессе перераспределения делятся на загружаемых и разгружаемые;
- в каждой строке (столбце) имеются две вершины: одна – загружаемая, другая – разгружаемая;
- контур должен выглядеть как одна из следующих фигур:



- углы поворота должны лежать в занятых клетках, за исключением той, из которой строится маршрут (можно «перепрыгивать» через занятые и незанятые клетки).

В этой клетке намечаем одну из вершин контура и далее по вышеизложенным правилам строим контур, вершины которого будут находиться в клетках (3-1) → (1-1) → (1-2) → (2-2) → (2-3) → (3-3). Вершины контура последовательно подразделяем на загружаемые (+) и разрушаемые (-), начиная с вершины максимальной неоптимальности «+».

6. Перераспределение ресурсов по контуру осуществляется с целью получения оптимального плана. В процессе перераспределения ресурсов по контуру в соответствии с условием неотрицательности переменных x_{ij} ни одно из этих значений не должно превращаться в отрицательное число. Поэтому анализиру-

ют только клетки, помеченные знаком (-), из которых выбирают клетку с минимальным объемом перевозок. В нашем примере $x_{min} = \min\{40;40;40\} = 40$, следовательно, клетки (1-1), (2-2), (3-3) полностью разгружаются. В клетке (1-2) загрузка увеличится на 40 и достигнет 60, в клетке (2-3) загрузка составит 40+40 = 80 и клетка (3-1) загрузится на 40.

Таблица 4

Потребители **Поставщики**	**B_1**	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**Запасы (объемы отправления)**	**U_i**
A_1	**1** **0**	**2** **60**	**3**	**4**	**60**	**0**
A_2	**4** **40**	**3**	- **2** **80**	+ **0** +	**80**	**-1**
A_3	**0**	**2** **0**	+ **2** **0**	- **1** **60**	**100**	**-1**
Потребность	**40**	**60**	**80**	**60**	**240**	
v_j	**1**	**2**	**3**	**2**		

Проверяем условие T=m+n-1. В нашем примере m = 3, n = 4, а число загруженных клеток равно 4, т.е. условие не выполняется и 6 $\neq$4 в процессе перераспределения ресурсов произошла полная разгрузка трех клеток, а мы должны освободить только одну клетку. В этом случае следует в две клетки поставить нули (нулевой ресурс) и считать их условно загруженными. Например, в клетке (1-1) и (3-3) проставим нулевой ресурс (таблица 4).

7. Получение нового плана (итерации) осуществляется в том же порядке, который был рассмотрен выше, т.е.

- по загруженным клеткам (в соответствии с новой загрузкой) вычисляются потенциалы U_i и V_j;

- по незагруженным клеткам производится проверка плана на оптимальность.
- находится вершина максимальной неоптимальности и строится новый контур перераспределения, и т.д., до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение, удовлетворяющее неравенству $U_i+Vj \le Cij$.

По результатам первой итерации имеем

$$Z_2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = 2*60+2*80+1*60+0*40=340 \text{ д.е.}$$

Вторая итерация

Поиск потенциалов следующий:

$U_1+V_1=1$ $\quad$ $0+V_1=1$ $\quad$ $V_1=1$

$U_2+V2=2$ $\quad$ $0+V_1=3$ $\quad$ $V_2=1$

$U_2+V_3=2$ $\quad$ $U_2+3=2$ $\quad$ $U_2=-1$

$U_3+V_1=0$ $\quad$ $U_2+1=0$ $\quad$ $U_3=-1$

$U_3+V_3=2$ $\quad$ $-1+V_3=2$ $\quad$ $V_3=3$

$U_3+V_4=1$ $\quad$ $-1+V_4=1$ $\quad$ $V_4=2$

Проведем проверку на оптимальность:

(1-3) $\rightarrow 0+3\le 3$

(1-4) $\rightarrow 0+2\le 4$

(2-1) $\rightarrow 1-1\le 4$

(2-2) $\rightarrow 2-1\le 3$

(3-2) $\rightarrow 2-1\le 2$

(3-4) $\rightarrow 2-1>0$

Клетку (2-4) необходимо загрузить.

В соответствии с перераспределением ресурсов по контуру получаем таблицу 5, для которой вновь рассчитываем потенциалы U_i и Vj и последовательность вычислений повторяется.

Таблица 5

Потребители / Поставщики	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы (объемы отправления)	U_i
A_1	1 0	2 60	3	4	60	0
A_2	4	3	2 20	0 60	80	- 1
A_3	0 40	2	2 60	1	100	- 1
Потребность	40	60	80	60	240	
v_j	1	2	3	1		

Для распределения, полученного в таблице 5, условие U_i+Vj≤Cij выполняется, следовательно, план – оптимальный.

Транспортные издержки по оптимальному плану следующие:

$$Z_3 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = 1*0+2*20+2*60+0*60+0*40+2*60=280 \text{ д.е.}$$

Таким образом, построением начального плана с последующим расчетом двух итераций получено оптимальное решение по прикреплению пунктов отправления грузов к пунктам назначения.

Контрольные вопросы:

1. Какова постановка задачи, решаемой распределительным методом?
2. В чем особенность системы ограничений в задаче, решаемой распределительным методом?

3. Какова форма табличной записи задачи, решаемой распределительным методом и как она называется?
4. Какие правила получения исходного базисного решения можно применять при составлении первой таблицы?
5. В чем суть улучшения плана распределительным методом?
6. Какова методика (правило) расчета потенциалов для занятых клеток?
7. Как определяется оптимальность плана при решении задачи методом потенциалов?
8. Что является показателем наличия альтернативных решений в распределительной задачи?
9. Как вычисляется значение целевой функции в задачах, решаемых распределительным методом?
10. Каково минимальное число занятых клеток?
11. Как решаются транспортные задачи с открытой моделью?

Задания для практических занятий.

Решить методом потенциалов следующие задачи.

Задача 1. С 5 полей совхоза поступает зерно на 3 зерноочистительные пункта. Количество зерна (в т.), поступаемого с полей, и пропускная способность зерноочистительных пунктов во время уборочного сезона известны и приведены в таблице. Также известны затраты (в д.е.) на перевозку 1 т/км. Составить план перевозки зерна на очистительные пункты так, чтобы сумма затрат на перевозку была минимальной.

Поле	Пункты			Ресурсы
	1	2	3	
1	3	5	2	100
2	4	7	8	150
3	6	3	2	130
4	8	9	3	200
5	4	2	8	180
Потребности	140	170	230	

Задача 2. На 3 складах республиканского объединения имеются минеральные удобрения, которые необходимо перевезти в 4 района республики. Наличие удобрений на складах (в т.), потребность районов и себестоимость перевозки 1 т/км (в д.е.) приведены в таблице. Составить план перевозки удобрений так, чтобы сумма затрат на перевозку была минимальной.

Склад	Район				Ресурсы
	1	2	3	4	
1	13	12	15	16	1500
2	17	15	14	13	1000
3	15	14	13	16	2000
	800	1200	1400	1100	

Задача 3. Составить план перевозки картофеля на 3 совхозов 4 магазинам так, чтобы сумма расстояний на перевозку была минимальной. Наличие картофеля (в д.е.), потребность магазинов и расстояние от совхоза до магазина (в км.) приведены в таблице.

Совхоз	Магазин				Запасы
	1	2	3	4	
1	8	6	9	2	280
2	4	5	4	5	520
3	3	4	6	4	400
	300	250	340	210	

Задания для самостоятельной работы студентов.

Задача. Определить план перевозок с минимальной суммарной стоимостью транспортировки грузов при максимально возможном удовлетворении потребностей. Информация для решения этих задач приведены в таблице. Она включает в себя m пунктов отправления (поставщиков), в каждом из которых имеется a_1, a_2, …a_m единиц однородного груза (ресурсы) и пунктов назначения груза (потребителей), в каждом из которых требуется b_1, b_2…b_n единиц однородного груза (потребности).

В левом верхнем углу таблицы указана стоимость перевозки единицы груза c_{ij} из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения.

Поставщики	Потребители							Ресурсы
	а	б	в	г	д	е	ж	
А	4	3	5	6	2	1	8	100

Б	2	1	8	3	7	6	4	150
В	7	3	9	10	8	4	7	50
Г	3	4	1	5	10	9	6	20
Д	6	7	2	3	4	8	5	50
Е	5	9	4	6	7	2	3	180
Потребности	50	100	70	80	50	120	150	

Варианты задач.

Варианты	Поставщики	Потребители	Решить на
1	А, Б, В, Г	а, б, в, г	min
2	Б, В, Г, Д	а, б, в, д	min
3	Б, В, Д, Е	б, в, г, е	min
4	В, Г, Д, Е	а, б, в, г	min
5	А, В, Г, Д	а, б, в, г	min
6	А, Б, Г, Д	а, б, в, д	min
7	В, Г, Д, Е	б, в, г, е	min
8	Б, В, Д, Е	а, в, г, д	min
9	В, Г, Д, Е	а, в, г, д	min
10	Б, В, Г, Д	а, б, в, д	min
11	В, Г, Д, Е	б, г, е, ж	min
12	А, Б, В, Г	б, г, е, ж	min
13	А, Б, В, Г	а,б, д, ж	min
14	В, Г, Д, Е	а,б, д, ж	min
15	В, Г, Д, Е	Б,в, г, ж	min
16	А, Б, Д, Е	а, б, е, ж	min
17	А, Б, Г, Е	б, в, г, д	min
18	В, В, Г, Е	б, в, г, ж	min
19	А, Б, В, Г	а, г, д, е	min
20	А, Б, В, Д	а, г, д, е	min
21	А, Б, В, Е	в, г, ж	min
22	А, Б, В, Г	а, б, ж	min
23	А, Б, В, Д	а, б, ж	min
24	А, Б, В, Е	б, в, г, д	min
25	А, Б, Г, Е	а, г, д, е	min
26	А, В, Г, Е	а, г, д, е	min
27	А, Г, Д, Е	б,в, г, ж	min
28	А, Г, Д, Е	а,в, г, ж	min
29	А, Б, Г, Е	а, б, д, ж	min

30	А, В, Г, Е	а, б, е, ж	min
31	А, Б, Г, Е	б, в, г, д	min
32	В, Г, Д, Е	а, в, г, д	min
33	В, Г, Д, Е	а, в, г, д	min
34	В, Г, Д, Е	а, г, е, д	min
35	В, Г, Д, Е	а, г, д, е	min
36	В, Г, Д, Е	а,в, г, ж	min
37	В, Г, Д, Е	а, б, д, ж	min
38	В, Г, Д, Е	а, б, д, ж	min
39	А, Б, Д, Е	а, г, д, е	min
40	А, Б, Д	а, г, д, е	min
41	А, Б, Д	в, г, ж	min
42	А, Б, Д	в, г, ж	max
43	А, Б, Д	а, б, ж	min
44	А, Д, Б	б, в, г, д	max
45	Б, В, Г	б, в, д	min
46	Б, В, Г	а, д, е	min
47	А, Б, Г	б, д, е	max
48	А, Б, Г	а, б, д, е	min

1.2. Нелинейное программирование

Общий метод решения задач нахождения экстремума функции Z=f(x,y) при заданном ограничении g(x,y)=C – метод множителей Лагранжа.

Рассмотрим функцию Лагранжа:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y) + \lambda(g(x,y) - C)$$

где λ – множитель Лангранжа.

Теорема. Если точка $M_0(x_0;y_0)$ является точкой условного экстремума функции z=f(x,y) при условии g(x,y)=C, то существует значение λ_0 такое, что точка $(x_0;y_0;\lambda_0)$ является точкой экстремума функции L(x,y, λ)

Таким образом, для нахождения условного экстремума функции z=f(x,y) при условии g(x,y)=C требуется найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = f'_x(x,y) + \lambda \cdot g'_x(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = f'_y(x,y) + \lambda \cdot g'_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = g(x,y) - C = 0$$

Пример. Найти экстремум функции $z=4x+x^2+8y+y^2$ при ограничении $x+y=180$

Составим функцию Лангранжа:

$$L(x,y,\lambda)=4x+x^2+8y+y^2+\lambda(x+y-180)$$

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = 4 + 2x + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = 8 + 2y + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = x + y - 180 = 0 \end{cases}$$

Решая последнюю систему, получим $x=91$; $y=89$; $\lambda=-196$. Таким образом, точкой условного экстремума может быть только точка (91;89). Легко убедиться в том, что в этой точке функция $z=4x+x^2+8y+y^2$ имеет условный минимум, равный 17278.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте общую задачу нелинейного программирования?
2. Что такое функция Лагранжа?
3. Дайте определение седловой точки функции Лагранжа?

Задания для практических занятий.

1. Графически определить методом max и min функции $Z=f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 \le 7 \\ x_2 \le 6 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

2. Определить экстремум функции Z при ограничении:

1) $Z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ *при* $x + y = 2$

2) $Z = x + y$ *при* $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$

3) $Z = x \cdot y$ *при* $x^2 + y^2 = 2$

4) $Z = x^2 - 2xy + 3y^2$ *при* $2x - 3y = 9$

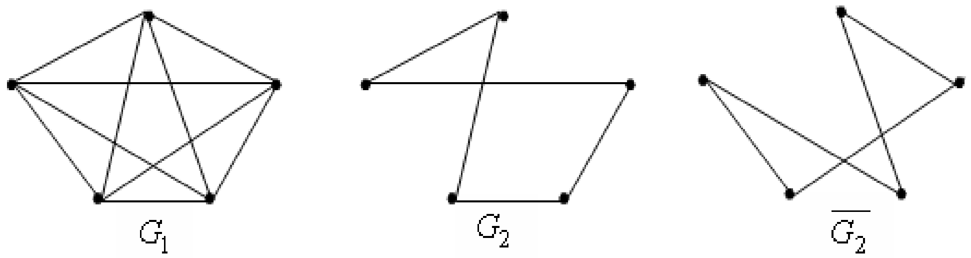
5) $Z = x^3 + y^3$ *при* $x + y = 2$

6) $Z = x + y$ *при* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

2. ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Плоские графы. Сетевые модели

Граф ***G*** можно определить как пару множеств ***G=(X,U)***, где ***X*** – множество вершин, ***U*** - множество отрезков, их соединяющих (ребер), например



Конечный граф – это граф, у которого число вершин и дуг конечно.

Две вершины графа называются ***смежными***, если они различны и соединены непосредственно друг с другом ребром. Ребро называют ***инцидентным*** вершине, если оно соединено с ней. ***Ориентированное ребро*** – (заканчивающееся стрелкой) называется ***дугой***.

Граф, состоящий из множества вершин и дуг, называется направленным (ориентированным). В направленном графе дуга обозначается следующим образом: ***u(a,b)***, где ***a*** – вершина, из которой выходит дуга ***u***, ***b***- вершина, в которую дуга входит. ***Путь*** в графе – это последовательность дуг, в которой конец предыдущей дуги совпадает с началом следующей.

Длиной пути называется сумма длин дуг, входящих в этот путь. Конечный путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной, называется ***контуром***.

Матрица смежности графа G – это квадратная матрица A (G) размера $n * n$ (n – число вершин) с элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если в графе G вершины } V_i \text{ и } V_j \text{ соединены ребром;} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Матрица инцидентности графа G – это матрица B(G) размера $n*m$ (n – число вершин, m – число ребер) с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } V_i \text{ - концевая вершина ребра } x_j; \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Основные временные параметры сетевой модели

Теория графов служит математическим аппаратом сетевого планирования и управления. Основой сетевого планирования и управления является сетевая модель. ***Сетевая модель*** (сетевой график, сеть) – это экономико-математическая модель, отражающая комплекс работ (операций) и событий, связанных с реализацией некоторого проекта (научно-исследовательского, производственного и др.), в их логической и технологической последовательности и связи. ***Работа*** – это материальное действие, требующее использование ресурсов, или логическое, требующее лишь взаимосвязи событий. При графическом представлении сетевая модель работы изображается дугой (ребро с направлением). Работа обозначается парой заключенных в скобки чисел ***(i, j)***, где ***i*** – номер события, из которого работа выходит, а ***j*** – номер события, в которое она входит. Работа не может начаться раньше чем свершится событие, из которого она выходит. Каждая работа имеет определенную продолжительность ***t(i, j)***. К работам относится в том числе и процессы, которые не требуют ни ресурсов, ни времени; они заключаются в установлении логической взаимосвязи работ и показывают, что одна из них непосредственно зависит от другой; такие работы – фиктивные.

События – результаты выполнения одной или нескольких работ. События не имеют протяженности во времени. События свершаются в тот момент, когда оканчивается последняя из работ, входящая в него. События обозначаются одним числом (порядковым номером) в кружке. В сетевой модели имеется начальное событие, из которого работы только выходят, и конечное, в которое работ только входят.

Путь – это цепочка следующих друг за другом работ, соединяющих начальные и конечные вершины. Продолжительность пути – сумма продолжительностей составляющих его работ. Путь, имеющий максимальную длину –

критический, его продолжительность $\mathbf{t_{кр}}$. Работы принадлежащие $\mathbf{L_{кр}}$. называются критическими. Их несвоевременное выполнение ведет к срыву сроков всего комплекса работ.

Ранний срок свершения события j (t_p (j)) – это самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию:

$$t_p(j) = \max_{i} \left\{ t_p(i) + t(i,j) \right\}$$

Поздний срок свершения события i (t_n(i))- это предельный момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием:

$${}_n(i) = \min_{i} \left\{ t_n(j) - t(i,j) \right\}$$

Резерв события i (R(i)) показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события i без нарушения срока наступления завершающего события

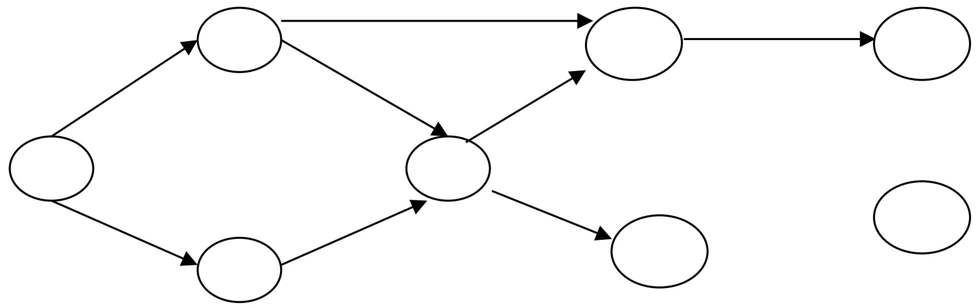
$$R(i) = t_n(i) - t_p(i)$$

Контрольные вопросы

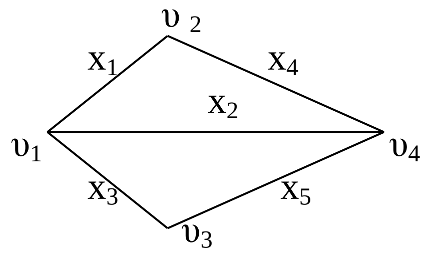
1. В чем суть методов сетевого планирования и управления?
2. Дайте содержательную характеристику элементов сетевого графика (событие, работа)?
3. Какие задачи решаются на основе сетевых моделей?

Задания для практических занятий

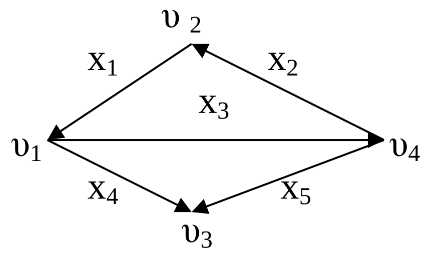
Задача 1. С помощью выше указанных формул рассчитать параметры сетевой модели:



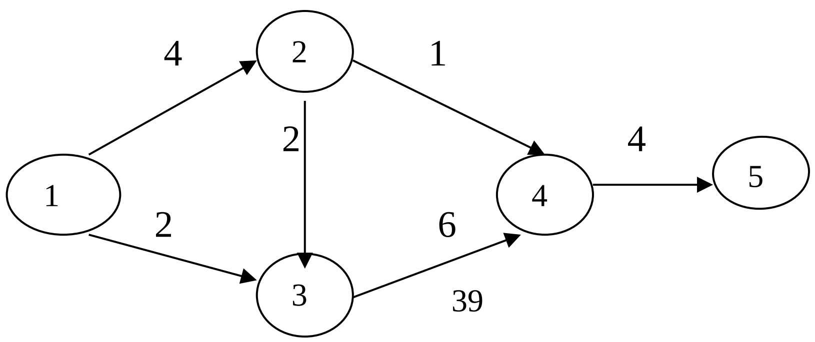
Задача 2. Для графа G построить матрицу смежности A(G) и матрицу инцидентности B(G).



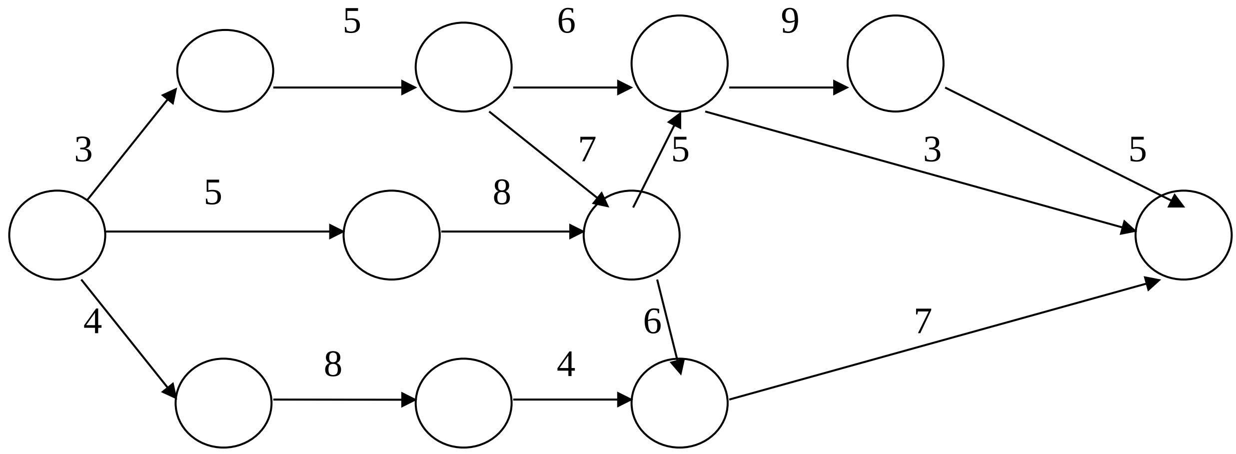
Задача 3. Для орграфа G построить матрицу смежности A(G) и матрицу инцидентности B(G).



Задача 4. Найти резервы работ.



Задача 5. Сетевой график с указанием продолжительности работ в днях приведен на рисунке:



Требуется:

а) Пронумеровать события.

б) Выделить критический путь и найти его длину.

в) Определить резервы времени каждого события.

г) Определить полные резервы времени некритических работ.

Задача 6. Проект пусконаладки компьютерной системы состоит из восьми работ.

Работа	Непосредственный предшественник	Продолжительность работы, нед.
A	-	3
B	-	6
C	A	2
D	B, C	5
E	D	4
F	E	3
G	B, C	9
H	F, G	3

Найти критический путь. Сколько времени потребуется для завершения проекта? Можно ли отложить выполнение работы C без отсрочки завершения проекта в целом? На сколько недель можно отложить выполнение работы F без отсрочки завершения проекта в целом?

3. КЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКИ

3.1 Производственные функции затрат ресурсов: линейные, мультипликативные

Понятие производственной функции имеет основополагающее значение в экономической теории.

Производственная функция – это функция

$$y=f(x),$$

где **x** (независимая переменная) – объем используемого ресурса;

y (зависимая переменная) – объем выпускаемой продукции.

Существуют два основных вида производственных функций:

-**линейная** (аддитивная) производственная функция

$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ (двухфакторная);

- **мультипликативная** производственная функция

$y = a_0 x_1^{a1} x_2^{a2}$.

В микро - и макроэкономике наиболее часто используется двухфакторная производственная функция Кобба - Дугласа

$y = a_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha}$, где

y – объем выпуска продукции;

К – затраты капитала;

L - затраты трудовых ресурсов;

a_0 – параметр, связанный с производительностью конкретной технологии;

α – параметр, называется долей капитала в доходе.

Пример. Производственная функция задается уравнением $Y=K^{0,5}L^{0,5}$. Определить предельный продукт труда при К=4, L=25.

Решение. Предельный продукт труда определяется как

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = 0{,}5K^{0,5}L^{-0,5} = 0{,}5\sqrt{4}\,\frac{1}{\sqrt{25}} = 0{,}2$$

Задания для практических занятий.

Задача 1. Производственная функция задается $\boldsymbol{Y = 1.5K^{1/3}L^{2/3}}$, где К – капитал, L – труд. Определить предельный продукт труда при К=8, L=1.

Задача 2. Производственная функция задается уравнением $Y = 6K^{1/3}L^{2/3}$, где К – капитал, L – труд. Определить предельный продукт капитала при К=27, L = 8.

3.2 Модель потребительского выбора. Функции спроса и предложения

Задача потребительского выбора (задача рационального поведения потребителя на рынке) в общем виде формулируется следующим образом:

Найти потребительский набор $\boldsymbol{\overline{x}* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)}$, который максимизирует его функцию полезности при заданном бюджетном ограничении. Математическая модель задачи потребительского выбора имеет вид:

Найти максимум функции $\boldsymbol{U(\overline{x}) = U(x_1, x_2, ..., x_n)}$ при ограничениях

$$\begin{cases} \boldsymbol{p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \le I} \\ \boldsymbol{x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,n}} \end{cases}$$

Таким образом, с математической точки зрения задача потребительского выбора – это задача на условный экстремум, поэтому для ее решения используется метод множителей Лагранжа.

Пример. Функция полезности потребителя имеет вид U=$\sqrt{X \cdot Y}$. Цена на товар x равна 5, на товар y равна 10. Доход потребителя равен 200. Определить оптимальный набор благ потребителя.

Решение. Задача потребительского выбора в данном случае сводится к решению системы уравнений $\begin{cases} U_1^{/} / U_2^{/} = 5/10 \\ 5x+10y=200 \end{cases}$

или $\begin{cases} 5x + 10y = 200 \\ y/x = 5/10 \end{cases}$

Отсюда x=20, y=10

Контрольные вопросы

1. Дайте определение функции полезности и опишите ее свойства?
2. Что означает бюджетное ограничение?
3. В чем заключается сущность задачи потребительского выбора?
4. Изменится ли решение задачи потребительского выбора, если все цены и доход увеличить в одно и тоже число раз?
5. Поясните сущность взаимозаменяемости и взаимодополняемости благ?

Задания для практических занятий.

Задача 1. Функция полезности потребителя имеет вид U = $\sqrt{X \cdot Y}$. Цена на благо X равна 3, на благо Y равна 9. Доход потребителя равен 180. Определить оптимальный набор благ потребителя.

Задача 2. Функция полезности потребителя имеет вид U=XY. Цена на благо X равна 2, на благо Y равна 6. Доход потребителя равен 240. Определить оптимальный набор благ потребителя.

Задача 3. Даны функции спроса $q = \frac{p+2}{p}$ и предложения $s = \frac{5p+1}{p+1}$, где p - цена товара. Определить равновесную цену товара.

Задача 4. Даны функции спроса $q = \frac{5-3p}{1+2p}$ и предложения $s = \frac{1+3p}{1-2p}$, где p - цена товара. Определить равновесный объём.

Список рекомендуемой учебной литературы

1. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб.пособие для вузов/В.В.Федосеев, А.Н.Гармаш, Д.М.Дайитбегов и др..; Под ред. В.В.Федосеева, - М.:ЮНИТИ, 2000. – 391 с.

2. Математические методы в экономике: Учебно-методическое пособие. 2-е изд. – М.: Издательство РДЛ, 2005. – 160 с.

3. Красс М.С. Математика для экономических специальностей: Учебник. – 4-е изд., испр.-М.: Дело, 2003. – 704.