МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Казанский государственный аграрный университет»

Институт экономики

Кафедра экономики и информационных технологий

Учебно-методическое пособие по дисциплине «Основы финансовых вычислений»

Казань 2019

ББК 65.9(2)32
УДК 631.15.001.891.57(075.8)

Составители : профессор, д.э.н. Газетдинов М.Х., доцент, к.э.н., Семичева О.С., доцент , к.э.н. Гатина Ф.Ф.

Рецензенты:
- заведующий кафедрой экономики Университета управления «ТИС-БИ» к.э.н., доцент Савушкин М.В.
- доцент кафедры бухгалтерского учета и аудита КГАУ, к.э.н. Исхаков А.Т.

Учебно-методическое пособие по дисциплине «Основы финансовых вычислений» выполнено в соответствии с рабочей программой дисциплины и предназначено для практических занятий и самостоятельной работы студентов Института экономики по направлению 38.03.01 «Экономика».

Учебно-методическое пособие обсуждено и одобрено на заседании кафедры экономики и информационных технологий 29 октября 2019 года, протокол № 4.

Обсуждено, одобрено и рекомендовано в печать на заседании методической комиссии Института экономики 11 ноября 2019 года, протокол № 4.

Казанский государственный аграрный университет, 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Основы финансовых вычислений» является неотъемлемой частью экономической подготовки студентов по направлению «Экономика».

Дисциплина «Основы финансовых вычислений» относится к вариативной части цикла Б1, изучается во 2 семестре на 1 курсе при очной и заочной формах обучения. Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единиц или 180 часов.

Основная задача данного учебного пособия состоит в том, чтобы помочь студентам, изучающим финансы, овладеть основными принципами и формулами правильного подсчета денег и процентов. Необходимость правильно проводить различные финансовые расчеты не вызывает ни малейших сомнений. Поэтому изучению финансовых вычислений при реализации программ учебных дисциплин уделяется большое внимание.

Изучение дисциплины «Основы финансовых вычислений» должно сопровождаться решением большого количества учебных и практических задач.

Учебно-методическое пособие представляет собой весь комплекс современных обучающих и контролирующих средств, предназначенных для аудиторной и самостоятельной работы студентов. Учебный материал представлен по темам и содержит методические рекомендации по их изучению, контрольные задачи, вопросы для самопроверки и тесты, а также список рекомендованной учебной литературы

В результате освоения ОПОП бакалавриата по направлению обучения 38.03.01 Экономика, обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине «Основы финансовых вычислений»:

ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Код компетенции	Результаты освоения ОПОП. Содержание компетенций (в соответствии с ФГОС ВО)	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
ОПК-1	Способность решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности	**Знать:** Основные методы математических расчетов и исследований, используемых при решении прикладных задач оптимизации в экономике и финансах **Уметь:** Применять основные математические методы для качественного исследования математических моделей, возникающих при решении прикладных задач в экономике и финансах **Владеть:** Методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов
ОПК-3	Способность выбирать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, анализировать результаты расчетов и обосновывать полученные выводы	**Знать:** методику и практику использования финансово-экономических расчетов; современные методы финансовых вычислений, о возможностях их использования в экономических исследованиях и практического применения в банках, инвестиционных компаниях, финансовых отделах производственных и коммерческих организаций **Уметь:** производить наращение по простым и сложным процентам; осуществлять дисконтирование и учет по простым и сложным ставкам процентов; проводить количественный анализ финансовых операций; строить модели количественных оценок; рассчитывать пара-

		метры эквивалентного изменения условий контракта; разрабатывать план погашения задолженности; рассчитывать обобщающие характеристики потоков платежей применительно к различным видам финансовых рент; анализировать инвестиционные проекты **Владеть:** навыками анализа результатов расчетов и обоснования полученных выводов

1. Простые проценты

В схеме простых процентов к концу n-то промежутка начисления наращенная сумма равна

$$S_n = S_0(1+ni) \tag{1.1}$$

Данная формула называется ***формулой простых процентов***. Множитель ($1 + ni$) называют ***коэффициентом (множителем) наращения***, а величину ni - ставкой процентов за время n.

Проценты за n лет можно представить в виде

$$I_n = S_0 in \tag{1.2}$$

Если на разных промежутках начисления процентов $n_1, n_2, \ldots, n_m$ устанавливаются разные ставки процентов $i_1, i_2, \ldots, i_m$ наращенная сумма S_n за время $n_1+n_2+\ldots+n_m$ будет равна

$$S_n = S_0(1 + \sum_{i=1}^{m} n_k i_k) \tag{1.3}$$

Пример. Найти сумму накопленного долга и проценты, если ссуда

100 000 руб. выдана на 2 года под простые 15% годовых. Во сколько раз увеличится наращенная сумма при повышении ставки на 1%?

Наращенная сумма находится по формуле (1.1)

$$S_n = S_0(1 + ni) = 100000(1+2\cdot 0,15) = 130000 \text{ руб.}$$

При увеличении ставки на 1% наращенная сумма станет равной

$$S_n = 100000(1+2\cdot 0,16) = 132000 \text{ руб.}$$

и, следовательно, увеличится на 2000 руб., или в 132000/130000 = = 1,0154 раза.

Задания для практических занятий

1. Какова простая ставка процентов, при которой первоначальный капитал в размере 130000 руб. достигнет через 100 дней 155000 руб.?

2. Ссуда 700000 руб. выдана на квартал под простые 15% годовых. Определить наращенную сумму.

3. Найдите сумму накопленного долга и проценты, если ссуда

180000 руб. выдана на 3 года под простые 18% годовых. Во сколько раз увеличится наращенная сумма при повышении ставки на 2%?

4. Определите простую ставку процентов, при которой первоначальный капитал в размере 122000 руб. достигнет через 120 дней величины 170 000руб.

5. Определите период начисления, за который начальный капитал в размере 46000 руб. вырастет до 75000 руб., если ставка простых процентов равна 15% годовых.

6. Ссуда 150 000 руб. выдана на 4 года под 20% годовых (простые проценты). Во сколько раз увеличится наращенная сумма?

7. Цена товара увеличилась на 30%. На сколько процентов ее необходимо уменьшить, чтобы получить первоначальную цену?

2. Сложные проценты. Проценты за нецелое число периодов

В схеме сложных процентов к концу ***n***-го промежутка начисления наращенная сумма равна

$$S_n = S_0(1+i)^n \qquad (2.1)$$

Наращенная сумма S_n пропорциональна начальной сумме S_0. Коэффициент пропорциональности $(1+i)^n$ называют ***множителем наращения.***

Если срок измеряется не в годах ***n***, а в днях ***t***, то в качестве ***n*** нужно взять $n=\frac{t}{K}$, где ***K***- так называемая временная база, т.е. число дней в году, ***K***= 360, 365 (366). Если временная база ***K***= 360 дней (12 месяцев по 30 дней), то говорят, что в формуле (2.1) используются обыкновенные, или коммерческие, проценты; при использовании действительной продолжительности года, ***K***= 365 (366) дней, получают ***точные*** проценты.

При дробном числе лет существуют два метода начисления процентов. При использовании первого метода применяется формула (2.1) С дробным числом лет ***n***, при втором, смешанном, за целое число лет начисляются сложные проценты, а за дробную часть срока вклада (ссуды) — простые, т.е. сумма за ***n***, ***b*** лет вычисляется по формуле

$$S_n = S_0(1+i)^n(1+bi) \qquad (2.2)$$

где ***n*** — целое число лет, ***b*** - дробная часть срока вклада (ссуды).

Расчет числа дней вклада ***t*** бывает точным и приближенным. В первом случае при вычислении ***t*** берут фактическое число дней вклада (либо ссуды). День открытия счета и день возврата вклада (либо день выдачи ссуды и день ее погашения) считают за один день. Расчет числа дней удобно производить, используя табл. 1 (приложение 1) порядковых номеров дней в году, при этом из порядкового номера дня закрытия вклада (либо дня погашения ссуды) вычитают порядковый номер дня открытия вклада (либо дня получения ссуды). Во втором случае (при приближенном расчете числа дней вклада (ссуды)) считают, что каждый полный месяц содержит 30 дней. День открытия счета и день возврата вклада (либо день выдачи ссуды и день ее погашения) так же, как и в первом случае, считают за один день.

На практике используют три варианта начисления процентов:

1) ***точные проценты с точным числом дней вклада (ссуды).***

Этот метод (К= 365 (366) или АСТ/АСТ) дает наиболее точные результаты. Применяется банками многих стран, например Великобритании, США и др.;

2) ***обыкновенные проценты с точным числом дней вклада (ссуды).***

Такой метод (банковский) (K = 360 или АСТ/360) распространен в ссудных банковских операциях, поскольку дает больший результат, чем предыдущий. Применяется банками Франции, Бельгии, Швейцарии;

3) ***обыкновенные проценты с приближенным числом дней вклада (ссуды)***.

Этот метод (K = 360) (обозначается 360/360) применяется, когда не требуется большая точность, например при промежуточных расчетах. Данный метод принят в банках Германии, Швеции, Дании.

По времени начисления процентов (в начале либо в конце периода начисления) различают ***декурсивный*** и ***антисипативный*** способы начисления процентов.

Декурсивный способ начисления процентов - способ, при котором проценты начисляются в конце каждого интервала начисления. Их величина определяется исходя из величины предоставляемого капитала. Соответственно ***декурсивная процентная ставка*** представляет собой выраженное в процентах отношение суммы начисленного за определенный интервал дохода к сумме, имеющейся на начало данного интервала.

Антисипативный (предварительный) способ начисления процентов - это способ, при котором проценты начисляются в начале каждого интервала начисления. Сумма процентных денег определяется исходя из наращенной суммы. Процентной ставкой будет выраженное в процентах отношение суммы дохода, выплачиваемого за определенный интервал, к: величине наращенной суммы, полученной по прошествии этого интервала.

Пример 1. Вклад в размере 3000 руб. положен в банк на депозит 10 марта под 15% годовых по схеме сложных процентов. Какую сумму вкладчик получит 22 октября?

Используем формулу (2.1) для наращения по схеме сложных процентов

$$S_n = S_0(1+i)^n$$

Продолжительность финансовой операции

$$n = \frac{t}{T} = \frac{20 + 30{,}6 + 22}{365} = 0{,}608$$

(считается, что в месяце 30 дней, в году – 365), поэтому имеем

$$S_n = S_0(1+i)^n = 3000(1+0{,}15)^{0{,}0608} = 3266{,}07$$

Итак, вкладчик получит 22 октября 3266,07 руб.

Пример 2. Клиент открыл вклад в банке на 1,5 года 02.12.2008, положив на счет 13 000 дол. Условия вклада не предусматривали возможность его пролонгации. По окончании срока на вклад с процентами начислялась ставка по вкладам «до востребования» (0,1%). Оценить потери клиента банка, если ставка была 4,5% годовых, а вклад востребован 02.12.2010.

При ставке 4,5% наращенная сумма за 1,5 года составила:

$$\boldsymbol{S_n = S_0(1+i)^{0,5}} = 13000 \cdot 1{,}045^{0,5} = 13887{,}3 \text{ дол.}$$

При ставке «до востребования» (0,1%) наращенная (практически ненаращенная) сумма за оставшиеся полгода составила бы:

$$\boldsymbol{S_n = S_0(1+i)^{1/2}} = 13887{,}3 \cdot 1{,}001^{1/2} = 13894{,}24$$

и клиент получил бы 6,94 дол. в качестве процентов за оставшиеся полгода.

При пролонгации вклада на тех же условиях наращенная сумма составила бы:

$$\boldsymbol{S_n = S_0(1+i)^{1/2}} = 13887{,}3 \cdot 1{,}045^{1/2} = 14196{,}33 \text{ дол.}$$

и клиент получил бы 309,03 дол. в качестве процентов за оставшиеся полгода.

Таким образом, потери клиента банка составили 309,03 - 6,94 = = 302,09 дол., т.е. клиент теряет практически все проценты.

Задания для практических занятий

1. В банк 7 февраля на депозит положили сумму 20000 под 11%годовых по схеме сложных процентов. Какую сумму вкладчик снимет 1 октября?

2. После вычета процентов за 6 месяцев заемщик получил 300000 руб. Вычислите сумму долга и сумму выплаченных процентов, если процент годовых равен 15,5%.

3. Вклад 100000 руб. помещен на 5,5 лет под 9,5% годовых. На сколько больше будет наращенная сумма, вычисленная по смешанному методу, чем по общему, если *К* - 360 дней?

4. Ссуда в размере 500000 у.е. выдана 12.02 по 25.09 включительно под 7% простых годовых, год високосный. На сколько больше будет наращенная сумма ссуды при использовании *обыкновенных* процентов по сравнению с наращенной суммой при использовании *точных*

процентов, если продолжительность пользования ссудой вычисляется точно?

5. Банк предоставил 19.02 ссуду 55 000 руб. с погашением через 10 месяцев под 20% годовых. Определите суммы к погашению при различных способах начисления процентов.

6. Вклад на 80000 руб., открытый в банке на 10 месяцев, принес вкладчику 7000 руб. Под какой простой (сложный) процент годовых был открыт вклад?

7. Вклад на 50000 руб. открыт в банке на 200 дней под 15% годовых *(K*= 360). Найдите процентный платеж.

8. Ссуда в 300000 у.е. с удержанием процентов вперед выдана20.03 по 15.06 включительно под 6,5% простых годовых процентов, год не високосный. Какую сумму на руки получит должник 20.03?

9. Чему равен процентный платеж, если кредит 170000 руб. взят на 7 месяцев под 17% годовых?

10. На сумму в 3000 у.е. в течение 14 месяцев начисляются простые проценты. Базовая ставка 7,5% годовых повышается каждый месяц начиная со второго на 0,3%, временная база *K*= 360. Чему будут равны наращенная сумма и средняя процентная ставка?

11. Ссуда в размере 300000 руб. выдана на срок с 15.02 по 20.09включительно под 16% годовых (простые проценты). Определить величину долга в конце срока тремя методами (365/365, 365/360, 360/360).

12. Какую сумму следует положить на депозит 15.04 под *6,5%* годовых, чтобы 31.12 накопить 20 000 руб., если используются: а) точные проценты, б) обыкновенные проценты *(K*= 365)?

13. Вклад в размере 17000 руб. положен в банк 15.12 и закрыт31.03 следующего года. Процентная ставка - 14% годовых. Найди-

те величину начисленных процентов при различных методах определения срока начисления.

14. Вклад в размере 1000000 руб. открыт в банке 15.05 по ставке15% годовых. При закрытии вклада 23.09 вкладчику были начислены проценты в размере 50949 руб. Какую практику начисления процентов использовал банк?

15. Вклад в размере 50000 руб. открыт в банке 12.04 по ставке 17%годовых. 13.06 вклад был пополнен на сумму 30000 руб.; 23.09 со счета была снята сумма 20000 руб., а 31.12 счет был закрыт. Определите сумму, полученную вкладчиком при закрытии счета.

16. Какая должна быть процентная ставка, для того чтобы сумма долга, взятого 13.05, увеличилась бы на 40% к 15.10, если используются: а) точные проценты, б) обыкновенные проценты $(K = 365)$?

17. Кредит 40000 руб. выдан под простую ставку процентов22% годовых на 175 дней. Рассчитайте сумму, получаемую заемщиком, и сумму процентных денег, удерживаемых в момент выдачи кредита.

18. Ставка по годовому депозиту равна 8%. Какую ставку годовых процентов нужно назначить на полугодовой депозит, чтобы последовательное переоформление полугодового депозита привело бык такому же результату, что и при использовании годового депозита (K=360)?

19. Ссуда в размере 600000 руб. взята в банке под 25% годовых на срок с 11.03 до 12.06. Найдите сумму, которую необходимо вернуть банку.

20. Кредит в сумме 345000 у.е. выдан 23.02 под 7% годовых. Когда долг превысит 370000 у.е., если начисляются: а) точные проценты $(K = 365)$, б) обыкновенные проценты?

21. Заемщик должен уплатить 80 000 руб. через 65 дней. Кредит выдан под 19% годовых (простые проценты). Каковы первоначальная сумма долга и дисконт $(K = 360)$?

22. Кредит в сумме 240000 у.е. выдан 15.06 по 20.12 включительно под 12,5% годовых (обыкновенные проценты). В счет погашения долга 14.07 уплачено 100 000 у.е. Какую сумму нужно вернуть 20.12? (Указание: 100000 у.е. привести к дате 20.12).

23. Вклад в размере 10000 руб. открыт в банке 14.02 и закрыт 31.12. Ставка - 18% годовых. Найдите сумму начисленных процентов при различных методах определения срока начисления.

24. Вклад 40 000 руб. открыт в банке 15.04 по ставке 13% годовых. При закрытии вклада 17.10 вкладчику начислены проценты в размере2600 руб. Какую практику начисления процентов использовал банк?

25. На исходную сумму в 12000 у.е. в течение 7 лет начисляются проценты по годовой ставке 9%. На сколько больше будет наращенная сумма при смешанном методе, чем при общем методе, если K= 360 дней?

26. Ссуда 160000 руб. выдана на три года: с 06.11. 2010 по 06.11.2013. Распределите начисленные проценты (ставка 17%, 365/360)по календарным годам.

27. Вклад 25000 руб. сделан 12.04.2010, а 10.06.2010 изъят. Проценты начисляются под 11% годовых по простой схеме. Определите размер вклада, полученного клиентом.

28. Сумма 120000 руб. выплачивается через 2,5 года. Найдите приведенную стоимость при ежемесячном начислении процентов, если ставка процентов - 15% годовых.

29. Вклад 10 000 руб. сделан 06.02.2008, а 18.07.2008 изъят. Проценты начисляются под 11% годовых по простой схеме. Каков размер вклада, полученного клиентом?

30. Вклад 30 000 руб. сделан 15.03, а закрыт 06.11. Проценты начисляются под 7% годовых по простой схеме. Найдите размер вклада, полученного клиентом.

31. Вклад 15000 руб. положен 27.01 на месячный депозит под 4% годовых, затем продлен еще на четыре последующих месяца. Определите наращенную сумму при различных способах начисления процентов.

32. Вклад в размере 50000 руб. положен в банк на депозит14.02.2009 под 8% годовых по схеме сложных процентов. Какую сумму вкладчик получит 20.09.2011? В случае схемы простых процентов при той же ставке?

33. Определите сумму процентов при различной практике их начисления, если вклад 168000 руб. был размещен под 12% годовых на срок с 14.03 по 17.11.

34. Вклад на 67 000 руб. открыт в банке с 15.04 по 21.08 под 7,5%(K = 360). Найдите процентный платеж за данное время.

35. Вкладчик открыл в банке вклад на 100000 руб. на срок с 16.02 по 23.09 и получил доход 4800 руб. Под какой простой (сложный) процент годовых был открыт вклад (K= 360)?

36. За сколько дней вклад в 1 000000 руб., открытый в банке под 15% годовых, принесет доход 100 000 руб. (K= 360)?

37. 16.01 заемщик получил заем 150000 руб. При этом были вычтены проценты до 20.09 и выплачен остаток в сумме 134800 руб. Чему равна годовая учетная ставка (K= 360)?

38. Половина суммы была вложена в банк на срок с 15.02 по 24.06 под 8% годовых, Уз этой же суммы вложена на срок с 12.04 по 15.07под 7% годовых, а остаток вложен на срок с 04.03 по 08.09 под 10% годовых. Какова величина этой суммы, если она принесла доход 1300руб.(K= 360)?

39. Кредит взят в банке на срок 100 дней под 18% годовых. Заем с процентами составил 90250 руб. Какой доход принесет вдвое больший капитал за срок 3 года под такие же годовые проценты?

40. Банк выдал заем 12.03, а 14.08 заемщик вернул заем с процентами, что составило 843000 руб. Определите сумму займа, если он был выдан под 17% годовых *(К*= 360)?

41. Банк выдал заем 15000руб. 15.06. Заемщик в срок вернул заем с процентами, что составило 16700 руб. Какого числа был возращен заем, если он был взят под 23% годовых *(К*= 360)?

42. За какой срок вложенные в банк 180 000 руб. под 12% годовых *(К* = 360) принесут доход, равный доходу, полученному от капитала 16 000 руб., внесенного на срок с 10.04 до 18.12 под 10% годовых (*К*= 365)

43. Банк выдал заем 70000 руб. 31.01. Заемщик вернул заем вместе с процентами, что составило 92000 руб. Когда был возвращен заем, если он был взят под 20% годовых *(К*= 360)?

44. При какой ставке простых (сложных) годовых процентов сумма долга, взятого 13.04, увеличится на 15% к 17.06 при использовании: а) точных процентов, б) обыкновенных процентов *(К*= 365)?

45. За какое время вклад в 300000 руб., открытый в банке под 11%годовых *(К*= 360), дает тот же самый доход, что и капитал 125000 руб., вложенный в банк с 15.02 по 27.08 под 10% годовых *(К*= 365)?

46. Кредит в сумме 110000 руб. выдан с 25.03 по 6.10 включительно под 16% годовых (обыкновенные проценты). В счет погашения долга 1.07 уплачено 40000 руб. Какую сумму нужно вернуть 6.10? (*Указание:* сумму в 40000 руб. привести к дате 6. 10).

47. Ссуда в размере 150 000 руб. выдана на 60 дней под 16% точных простых годовых процентов *(К*= 366 дней). Она не была возвращена срок, и игл на погашена спустя 15 дней, не считая даты погашения.

Какую сумму вернуть, если за просроченное время на сумму возврата долга начислялись точные простые проценты по ставке 20% годовых?

48. На вклад 8400 руб., открытый в банке на срок 8 месяцев, начислены проценты в сумме 620 руб. Найдите годовую ставку процента для простых и сложных процентов.

49. Кредит в сумме 220000 руб. предоставлен 26.04 под 15% годовых (простые проценты). Когда долг превысит 245000 руб., если начисляются: а) точные проценты (K= 365), б) обыкновенные проценты?

50. Кредит в сумме 87000 руб. предоставлен 12.02 под 12% годовых (сложные проценты). Когда долг превысит 95000 руб., если начисляются: а) точные проценты (K= 365), б) обыкновенные проценты?

51. Вклад на 100000 руб. открыт в банке на 9 месяцев под 10%годовых. Какие проценты получит вкладчик?

52. На вклад, открытый в банке на срок 18 месяцев под 15% годовых, начислены проценты в сумме 10000 руб. Найдите величину вклада.

3. Кратное начисление процентов

Если начисление процентов происходит несколько раз в году *(m)* (ежеквартально, ежемесячно и т.п.), то по истечении *I*лет наращенная сумма станет равной:

а) в случае простых процентов:

$$\boldsymbol{S(t,m) = S_0}(1 + \frac{i}{m}mt) = S_0(1 + it) \qquad (3.1)$$

т.е. наращенная сумма не зависит от кратности начисления. Этот вывод будет использован нами при рассмотрении непрерывного начисления процентов в случае простых процентов;

б) в случае сложных процентов:

$$\boldsymbol{S(t,m) = S_0}(1 + \frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{m}})^{\boldsymbol{mt}} \qquad (3.2)$$

4. Непрерывное начисление процентов

Если частота начисления сложных процентов *m* неограниченно возрастает, то имеет место ***непрерывное начисление процентов.*** По истечении ***t*** лет наращенная сумма будет равна:

а) в случае простых процентов:

$$\boldsymbol{S(t,\infty) = \lim_{m\to\infty} = S(t,m) = \lim_{m\to\infty} S_0}(1 + \frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{mt}) = \boldsymbol{S_0(1 + it)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.1)$$

т.е. наращенная сумма остается той же, что и при однократном начислении процентов. Этот вывод был сделан нами и в случае кратного начисления процентов; оба вывода связаны с тем, что при любой кратности начисления процентов начисление производится на исходную сумму пропорционально времени вклада;

б) в случае сложных процентов:

$$S(t,\infty) = \lim_{m\to\infty} = S(t,m) = \lim_{m\to\infty} S_0(1+\frac{i}{m})^{mt} = \lim_{m\to\infty} S_0(1+\frac{i}{m})^{\frac{mit}{i}} = S_0 e^{it}$$

(4.2)

Процентную ставку ***i***в (1.9) называют также **силой роста** и обозначают обычно буквой ***δ***. С учетом этого (1.9) можно записать так:

$$S(t)=S_0 \cdot e^{\delta t} \qquad (4.3)$$

При одной и той же ставке процента наращение по схеме простых процентов более выгодно для периода наращения менее года. Для периода наращения более года выгоднее наращение по схеме сложных процентов.

Пример 1. В банк положен депозит в размере 1000 руб. под 10% годовых по схеме сложных процентов. Найти величину депозита через 3 года при начислении процентов 1,4,6,12 раз в году и в случае непрерывного начисления процентов.

По формуле (3.) имеем:

$S_{3/1}$=1000(1+0.1)^3=1331 руб.

$S_{3/4}$=1000$(1+\frac{0,1}{4})^{3,4}$ =1344,9 руб.

$S_{3/6}$=1000$(1+\frac{0,1}{6})^{3,6}$=1346,5 руб.

$S_{3/12}$=1000$(1+\frac{0,1}{12})^{3,12}$ =1348,2 руб.

В случае непрерывного начисления процентов следует использовать формулу (4.3)

$S_{3/\infty}$=1000$e^{0,1\cdot 3}$= 1349,6руб.

Проценты за 3 года составили (руб.):

- при однократном начислении процентов - 331;
- четырехкратном - 344,9;
- шестикратном - 346,5;

- двенадцатикратном - 348,2;

- непрерывном — 349,6.

Приходим к выводу, что наращенная сумма, как и величина процентных денег, в схеме сложных процентов растет с увеличением кратности начисления и достигает максимума при непрерывном начислении процентов. При этом скорость роста обеих величин убывает с увеличением кратности начисления.

Пример 2. На счет в банке кладется сумма в размере 20000 руб. на 4 года под 11% годовых по схеме простых процентов с дальнейшей пролонгацией на последующие 2 года под 6% годовых по той же схеме. Найти размер вклада через 6 лет. Определить наращенную сумму, если вклад изымается через 4 года и кладется на новый счет на 2 года по той же схеме.

Для случая с пролонгацией размер вклада через 6 лет составит:

$S_6=S_0(1+r_1n_1+r_2n_2)=20000\cdot(1+0{,}11\cdot4+0{,}06\cdot2)=31200$ руб.

Для второго случая посчитаем вначале наращенную сумму к концу4 года:

$S_4=S_0(1+r_1n_1)=20000\cdot(1+0{,}11\cdot4)=28\,800$ руб.

Через 2 года эта сумма на новом счету достигнет значения:

$S_6=S_4(1+r_2n_2)=28800\cdot(1+0{,}06\cdot2)=32256$ руб.

Заметим, что во втором случае наращенная сумма за тот же период времени больше.

Пример 3. Клиент поместил в банк вклад в сумме 18 000 руб. под 8,5% годовых с ежемесячной выплатой процентов. Какую сумму клиент будет получать каждый месяц?

Решение. Наращенная сумма за каждый месяц составит

$$S_n = S_0(1+\frac{i}{m})^1 = 18000(1+\frac{0{,}085}{12}) = 18127{,}50 \text{ руб.}$$

Сумма, которую клиент будет получать каждый месяц, равна

$\boldsymbol{I = S_n - S_0}$ = 18127,50 - 18000 = 127,50 руб.

Пример 4. Какую сумму нужно положить на депозит под 12% годовых, чтобы через 5 лет получить 500000 руб.?

Решение.

$$\boldsymbol{S_0} = \frac{\mathbf{S_n}}{\mathbf{(1+i)^n}} = \frac{500000}{(1+0{,}12)^5} = \frac{500000}{1{,}7623} = 283713{,}43\text{руб.}$$

Пример 5. Инвестор намерен положить некоторую сумму под 18% годовых с целью накопления через 2 года 3 млн руб. Определить сумму вклада.

Решение.

$$\boldsymbol{S_0} = \frac{\mathbf{S_n}}{\mathbf{(1+i)^n}} = \frac{3000000}{(1+0{,}18)^2} = \frac{3000000}{1{,}3924} = 2154553{,}29\text{руб.}$$

Пример 6. Клиент ростовского филиала «Северный» ЗАО МКБ «Москомприватбанка» положил на годовой депозит 30 800 у.е. под 7,5% годовых. Проценты начисляются ежемесячно (но не капитализируются). Сколько недополучит клиент через год, если в договоре вклада ежемесячная величина процентов указана в сумме 189 у.е.? С чем это может быть связано? Какова при этом эффективная ставка процентов?

Наращенная сумма в конце года должна быть равна при простых, так и при сложных процентах):

$$\boldsymbol{S_n = S_0(1+i)^1} = 30800(1+0{,}075) = 33110 \text{ у.е.}$$

При ежемесячных процентах в сумме 189 у.е., как указано в договоре, наращенная сумма в конце года будет равна

$$\boldsymbol{S_n} = 30800+189\cdot 12 = 30800+2268 = 33068 \text{ у.е.}$$

Таким образом, клиент недополучит через год

$$33110 - 33068 = 42 \text{ у.е.}$$

При этом эффективная ставка процентов будет равна

$$\boldsymbol{i}_{эфф} = \frac{\mathbf{S}_1 - \boldsymbol{S}_0}{\mathbf{S}_0} = \frac{33068 - 30800}{30800} = \frac{2268}{30800} = 0{,}0736 = 7{,}36\%$$

т.е. она оказалась на 0,14% ниже объявленной номинальной ставки. Это связано с использованием банком схемы точных процентов с точным числом дней вклада *(K*= 365), а также с округлением полученных сумм в пользу банка.

Итак, расчеты банка таковы.

Проценты за год $\boldsymbol{I = S_n - S_0}$ = 30800·0,075 = 2310 у.е. делятся на точное число дней в году (365) и умножаются на 30, чтобы получить проценты за месяц, поскольку именно они указаны в договоре:

$$\boldsymbol{I}_{мес} = \frac{2310 \cdot 30}{365} = 189{,}863 \text{у.е.}$$

Банк отбрасывает 0,863 у.е. в месяц, округляя проценты до целых в свою пользу, в противовес правилам арифметики, что дает банку 0,863·12 = 10,356 у.е. Дополнительные деньги банк получает, недоначислив клиенту проценты за 5 дней за год (365 - 30·12 = 5), что составляет $\frac{2310 \cdot 5}{365} = 31{,}643$у.е. Складывая две последние цифры, получим

10,365+31,643 ≈ 42 у.е. т.е. туже сумму, что и выше.

Пример 7.Условия те же, что и в предыдущей задаче. Сколько получит клиент через год, если проценты ежемесячно перечисляются на другой счет, где на них начисляются 6,75% годовых? Какова при этом эффективная ставка процентов?

Проценты составляют 189·12 = 2268 у.е., а проценты на проценты равны 2268·0,0675 = 153,09 у.е. Таким образом, суммарные проценты, полученные в этом случае клиентом, составят 2268+153,09=2421,09у.е., а эффективная ставка процентов равна $\frac{2421{,}09}{30800} \cdot 100\% = \mathbf{7}{,}68\%$

Задания для практических занятий

1. Выведите формулу для наращенной суммы при непрерывном начислении процентов в случае простых процентов.

2. На годовом депозите можно получить 12%годовых, а на полугодовом - 11,5% годовых. Что выгоднее - положить средства на годовой депозит или на полугодовой депозит с пролонгацией на тех же условиях? Чему будут равны проценты в обоих случаях при сумме депозита 25000руб.?

3. В банк положена сумма 40000 у.е. сроком на 2 года по ставке 10% годовых. Найдите наращенную сумму, величину полученного процента и эффективную процентную ставку для вариантов начисления процентов: а) ежеквартального, б) ежемесячного.

4. За какой период первоначальный капитал в размере 40000 руб. им растет до 75000 руб. при простой (сложной) ставке 15% годовых?

5. В банк положена сумма 150000 руб. сроком на 6 лет по ставке14% годовых. Найдите наращенную сумму, величину полученного процента и эффективную процентную ставку для следующих вариантов начисления процентов: а) полугодового, б) ежеквартального, в) ежемесячного, г) непрерывного при силе роста 14%.

6. На сумму долга в течение 8 лет начисляются проценты по ставке 11% годовых. Насколько возрастет наращенная сумма, если проценты будут капитализироваться ежемесячно? ежеквартально? непрерывно?

7. В банк положен депозит в размере 2000 руб. на 3 года под 16%годовых по схеме простых процентов. Определите наращенную сумму через 6 лет для двух случаев: а) депозит пролонгирован на 3 года

по ставке 10% годовых, б) депозит закрывается через 3 года и вклад кладется на 3 года под 10% годовых.

8. На какой срок необходимо положить в банк 12000 руб., чтобы накопить 15000 руб., если банк принимает вклады под простые (сложные) 8% годовых?

9. Предприятие получило кредит на год в размере 5000000 руб. с условием возврата 6000000 руб. Рассчитайте процентную и учетную ставку.

10. Банк принимает вклады от населения под простые и сложные проценты на 3 месяца под 2% годовых, на 6 месяцев - под 3,5% годовых, на 12 месяцев - под 5% годовых. Сравните доходность различных вкладов.

11. Банк принимает депозиты на сумму 500 000 руб. на условиях: а) под 10% годовых с ежеквартальным начислением процентов, б) под 11% годовых с полугодовым начислением процентов, в) под 11,5% годовых (во всех трех случаях проценты капитализируются). Выберите оптимальную схему вложения денежных средств.

12. Банк предоставил ссуду в размере 170000 руб. на 7,5 лет под 25% годовых при полугодовом начислении процентов. Определите возвращаемую сумму при начислении простых (сложных) процентов.

13. Инвестор намерен положить некоторую сумму под 18% годовых с целью накопить через 2 года 3 млн руб. Определите сумму вклада,

14. За какой срок сумма 100000руб. достигнет 125000руб. при начислении по сложной процентной ставке 7,5% годовых? Рассмотрите случаи ежемесячного и ежеквартального начисления процентов.

15. В банк положена сумма 70000 руб. сроком на 4 года по ставке 10% годовых. Найдите наращенную сумму, величину по-

лученного процента и эффективную процентную ставку для следующих вариантов начисления процентов: а) полугодового, б) ежеквартального, в) ежемесячного, г) непрерывного при силе роста 10%.

16. Компания получила кредит на 3 года в размере 234000 руб. и с условием возврата 456000 руб. Определите процентную ставку для случаев простого и сложного процента.

17. Предприятие получило кредит на 2 года в размере 11 млн руб. с условием возврата 12,5 млн руб. Рассчитайте процентную и учетную ставку.

18. Банк предлагает долгосрочные кредиты под 20% годовых с ежеквартальным начислением процентов, 22% годовых с полугодовым начислением процентов и 18% годовых с ежемесячным начислением процентов. Определите наиболее выгодный для банка (для заемщика) вариант кредитования.

19. Клиент поместил в банк вклад в сумме 7000 у.е. под 8% годовых с ежеквартальной выплатой процентов. Какую сумму клиент будет получать каждые 3 месяца?

20. Акция куплена за 75 000 руб., через 1,5 года ее цена составит 83500 руб., проценты начисляются один раз в квартал. Определите доходность акции в виде номинальной ставки и годовой ставки сложных (простых) процентов.

21. Банк предлагает 13 % годовых. Чему должен быть равен первоначальный вклад, чтобы через 3 года он стал равен 36073 у.е.?

22. Вклад на 100000 руб. открыт в банке на 5 лет под 12% годовых. Найдите величину процентного платежа.

23. Заемщик занял в банке деньги под 23% годовых. За три года он заплатил 10 000 руб. процентного платежа. Какой капитал взял заемщик в банке?

24. На срочный сберегательный счет в банке кладется сумма в размере 15000 руб. на 3 года под 8% годовых по схеме простых процентов дальнейшей пролонгацией на последующие 4 года под 5% годовых по той же схеме. Найдите размер вклада через 7 лет. Определите наращенную сумму, если вклад изымается через 3 года и кладется на новый счет на 4 года по той же схеме.

25. Вклад открыт под 14% годовых. На него начислен процентный платеж в сумме 1500 руб. Найдите величину вклада, если он был открыт: а) на 10 лет, б) 1 год, в) 6 месяцев, г) 10 дней.

26. По вкладу 7000 руб., открытому в банке на 7 лет, выплачены проценты в сумме 5000руб. Найдите годовую ставку процента для прочих и сложных процентов.

27. Банк предлагает 12% годовых. Каков должен быть первоначальный вклад, чтобы через 4 года он стал равен 30 000 руб.?

28. Инвестор намерен положить некоторую сумму под 14% годовых с целью накопить через 3 года 1500000 руб. Определите сумму вклада.

29. На исходную сумму в 125000 у.е. в течение 5 лет начисляются каждые полгода сложные проценты по номинальной ставке 7%. На сколько изменится наращенная сумма, если номинальная ставка и число периодов капитализации процентов возрастут вдвое? втрое?

30. Ставка по депозиту равна 7,5% годовых. Какова ставка годовых процентов на месячные депозиты, если полугодовое последовательное переоформление этих депозитов приводит к такому же результату, что и использование полугодового депозита (при пренебрежении шестью днями, которые теряются при переоформлении депозитов) (K=360)?

31. На исходную сумму в течение п лет начисляются сложные проценты по годовой ставке 8,5%. На сколько процентов возрастет исходная сумма при переходе к ежедневной капитализации процентов(K= 365) для: а) п = 5,
б) п = 7?

32. Выведите формулу для наращенной суммы при непрерывном начислении процентов в случае сложных процентов.

33. Вклад на 80000 руб., открытый в банке на 2 года, принес вкладчику проценты в сумме 14 000 руб. Под какой простой (сложный) процент годовых был открыт вклад?

34. Сравните наращение по простой и сложной ставкам процента.

35. На вклад, открытый в банке на срок 3 года под 12% годовых, начислены проценты в сумме 25000 руб. Найдите величину вклада.

36. Дайте определение мультиплицирующих и дисконтирующих множителей,

37. После вычета процентов за 3 года заемщик получил 2500000 руб. Вычислите сумму долга и сумму выплаченных процентов, если процент годовых равен 18%.

38. На исходную сумму в течение 10 лет начисляются сложные годовые проценты по ставке 10%. Во сколько раз вырастет наращенная сумма, если проценты будут начисляться ежемесячно?

39. Один из двух вкладов, в сумме составляющих 45000 руб., вложен в банк под 7% годовых, а второй - под 12% годовых. Сумма годового дохода от обоих капиталов равна 4300 руб. Определите величину каждого вклада.

40. Вклад 43000 руб. открыт в банке. В конце второго года со счета снято 15000 руб. Остаток в конце третьего года составлял 32000 руб. Определите процентную ставку: а) при годовом начислении процентов, б) ежеквартальном, в) ежемесячном (проценты капитализируются).

41. Два взноса, один из которых на 12000 руб. больше другого, вырастут за 10 лет до 200000 руб. при процентной ставе 8%, Чему равны эти два взноса, если капитализация процентов ежемесячная?

42. На счет в банке 5 лет назад было помещено 10000 руб., а 2 года назад - 20000 руб. Сколько нужно поместить на счет сегодня, чтобы через 6 лет на счету стало 100000 руб.? Процентная ставка равна12%, капитализация - ежеквартальная.

43. На сумму долга в течение 5 лет начисляются сложные проценты по ставке 6% годовых. Сколько раз в году нужно начислять проценты по той же ставке, чтобы за 5 лет наращенная сумма выросла бы не менее чем на 1%?

44. На счет в банке 7 лет назад было помещено 17000 руб., сегодня еще 25000 руб. Какую сумму получит вкладчик через 6 лет (считая от сегодняшнего дня), если процентная ставка до сегодняшнего дня равнялась 10% при полугодовой капитализации, а с сегодняшнего дня - 6% при ежеквартальной капитализации?

45. На счет в банке помещено 55000 руб., через 2 года на счет помещено еще 60000 руб. В конце четвертого года на счету имеется143000 руб. Определите квартальную декурсивную (начисляемую в конце периода начисления) процентную ставку.

46. Один вклад больше другого на 1700 руб. Больший вклад вложен в банк на 6 месяцев под 7% годовых, а меньший - на 8 месяцев под 5% годовых Доход от большего вклада в 1,5 раза выше дохода от

меньшего капитала. Найдите величину каждого вклада и величину дохода по каждому вкладу.

47. Вклад 15000 руб. помещен в банк под 10% годовых, через полгода вложено еще 20000 руб. под 8% годовых. Через сколько месяцев второй вклад будет на 117001 руб. меньше первого?

48. Ссуда 2000 у.е. выдана на 8 лет под 6,25% годовых. В счет погашения долга в конце третьего года внесено 1500 у.е., которые пошлина уплату процентов, накопленных к этому сроку, а остальная сумма - на погашение основного долга. Какую сумму следует уплатить в конце восьмого года, чтобы полностью погасить задолженность?

49. Вклад 300000 руб. помещен в банк под 11% годовых одновременно со вкладом 250000 руб. под 13% годовых. Через сколько лет наращенные суммы обоих вкладов станут одинаковыми?

50. Вклад 100000 руб. помещен в банк под 13% годовых в тот же день, что и вклад 190000 руб. под некоторую процентную ставку. Найдите годовую процентную ставку для второго вклада, если: а) через 5 лет наращенные суммы обоих вкладов станут одинаковыми, б) через 7 лет наращенная сумма первого вклада будет на 30% больше наращенной суммы второго вклада.

51. Кредит выдан на 7 лет под 5,5% годовых. Какую номинальную годовую ставку процентов необходимо назначить, чтобы к концу седьмого года получить ту же наращенную сумму при ежеквартальном начислении процентов?

52. В банк одновременно помещены 50 000 руб. под 9% годовых и 40000 руб. под 16% годовых. Через сколько лет оба дохода будут одинаковыми?

53. На срочный сберегательный счет в банке кладется сумма в размере 30000 руб. на 3 года под 12% годовых по схеме простых про-

центов с дальнейшей пролонгацией на последующие 2 года под 10%годовых по той же схеме. Найдите размер вклада через 5 лет. Определите наращенную сумму, если вклад изымается через 3 года и кладется на новый счет на 2 года по той же схеме.

54. Вклад в банк под 10% годовых за несколько лет увеличился на 132000 руб. Тот же вклад, вложенный на срок на 3 года меньше чем под 12% годовых, принес бы 40000 руб. дохода. Определите величину вклада и срок, за который насчитывался доход.

55. Ставка по годовому депозиту равна 10% годовых (сложные проценты). Какой должна быть годовая процентная ставка для полугодового депозита, чтобы пролонгация полугодового депозита при той же ставке привела бы к той же наращенной сумме, что и при использовании годового депозита *(К*= 360)? (*Указание:* пренебречь одним днем, который теряется при переоформлении полугодового депозита).

56. Ставка по годовому депозиту равна 15% годовых (простые проценты). Какой должна быть годовая процентная ставка для полугодового депозита, чтобы пролонгация полугодового депозита при той же ставке привела бы к той же наращенной сумме, что и при использовании годового депозита *(К*= 360)? (*Указание*: пренебречь одним днем, который теряется при пере-оформлении полугодового депозита).

57. Чему равна годовая ставка сложных процентов, эквивалентная ставке непрерывных процентов?

58. Ставка по годовому депозиту равна 12% годовых (простые проценты). Какой должна быть годовая процентная ставка для полугодового депозита, чтобы закрытие и открытие вновь полугодового депозита при той же ставке привело бы к той же наращенной сумме, что и при использовании годового депозита *(К*= 360)? (*Указание:* пренебречь

одним днем, который теряется при переоформлении полугодового депозита).

59. Ставка по годовому депозиту равна 17% годовых (сложные проценты). Какой должна быть годовая процентная ставка для трехмесячного депозита, чтобы его четырехкратная пролонгация депозита при той же ставке привела бы к той же наращенной сумме, что и при использовании годового депозита *(K*= 360)? (*Указание:* пренебречь одним днем, который теряется при переоформлении полугодового депозита).

60. Покажите, что при одной и той же ставке ***i*** более выгодным является наращение по схеме сложных процентов, если длина периода наращения превышает один год. Если же длина периода наращения менее года, то более выгодно наращение по схеме простых процентов.

61. Годовая процентная ставка для полугодового депозита равна 7% годовых (сложные проценты). Какой должна быть процентная ставка для годового депозита, чтобы пролонгация полугодового депозита при той же ставке привела бы к той же наращенной сумме, что и при использовании годового депозита *(K*= 360)? (*Указание:* пренебречь одним днем, который теряется при переоформлении полугодового депозита).

62. Годовая процентная ставка для трехмесячного депозита равна 4% годовых (сложные проценты). Какой должна быть процентная ставка дня годового депозита, чтобы четырехкратная пролонгация трехмесячного депозита при той же ставке привела бы к той же наращенной сумме, что и при использовании годового депозита *(K*= 360)? (*Указание:* пренебречь одним днем, который теряется при переоформлении полугодового депозита).

63. Банк предлагает 12% годовых. Чему должен быть равен первоначальный вклад, чтобы через 5 лет он стал равен 115000 руб.?

64. Покажите, что более выгодным для банка является дисконтирование по сложной учетной ставке, если срок учета составляет менее одного года. Если же срок учета превышает один год, то более выгодно дисконтирование по простой учетной ставке.

65. Докажите, что эффективная процентная ставка в схеме сложных процентов растет с увеличением кратности начисления и достигает максимума при непрерывном начислении процентов.

66. Вклад помещен на 3 года под 11% годовых. На сколько процентов возрастет наращенная сумма вклада при переходе к капитализации процентов: а) ежеквартальной, б) ежемесячной, з) ежедневной (K=365)?

67. Вклад 50 000 руб. помещен на 4 года под 13% годовых. Насколько увеличится наращенная сумма, если номинальная ставка и число периодов капитализации процентов возрастут вдвое? втрое?

68. Докажите, что скорость роста эффективной процентной ставки в схеме сложных процентов убывает с увеличением кратности начисления и обращается в ноль при непрерывном начислении процентов.

5. Дисконтирование и удержание процентов

Дисконтирование и удержание процентов в определенном смысле являются обратными по отношению к начислению процентов. Различают математическое дисконтирование и банковский учет.

Математическое дисконтирование позволяет узнать, какую исходную сумму S_0 нужно вложить, чтобы получить по истечении t лет сумму S_t (при начислении на S_0 процентов по ставке i.

В случае простых процентов:

$$S_0 = S_t/(1+ti) \tag{5.1}$$

В случае сложных процентов:

$$S_0 = S_t/(1+i)^t \tag{5.2}$$

В случае непрерывного начисления процентов:

$$S_0 = S_t/exp(\delta \cdot t) \tag{5.3}$$

ВеличинаS_0 называется ***приведенным значением*** величины S_t. Величины i и δ, которые ранее именовались процентными ставками, теперь означают ***ставки дисконтирования***.

Банковский учет - это покупка банком денежных обязательств по цене меньше номинальной указанной в них суммы. Примером денежных обязательств может служить вексель - долговая расписка, содержащая обязательство выплатить определенную денежную сумму (номинал) в определенный срок.

В случае покупки банком векселя говорят, что последний учитывается, а клиенту выплачивается сумма

$$S_n = S_0 - I_n \tag{5.4}$$

где S_0 - номинальная сумма векселя; S_n - цена покупки векселя банком за n лет до погашения; I_n - дисконт, или доход банка (процентные деньги).

$$I_1 = S_0\, d \tag{5.5}$$

где $\boldsymbol{d}$ — учетная ставка (как правило, через $\boldsymbol{d}$ будем далее обозначать и ставку дисконтирования).

Учетная ставка может быть как простой, так и сложной в зависимости от того, какая схема используется - простых или сложных процентов.

В случае простых процентов последовательность сумм, оставшихся после дисконта $\{S_n\}$, образует убывающую арифметическую прогрессию с общим членом $S_n = S_0(1-nd)$, равным сумме, которую получит клиент за n лет до погашения.

В случае сложных процентов последовательность сумм, оставшихся после дисконта $\{S_n\}$, образует убывающую геометрическую прогрессию с общим членом $S_n = S_0(1-d)^n$, равным сумме, которую получит клиент за n лет до погашения.

Для банка ситуация с дисконтированием является инверсной по от-ношению к наращению. Так, при сроке учета менее одного года банку выгоднее проводить дисконтирование по сложной учетной ставке, а при сроке учета более одного года - по простой учетной.

Пример 1. Вексель стоимостью 100 000 руб. учитывается за 4 года до погашения по сложной учетной ставке 15% годовых. Найти сумму, получаемую векселедержателем, и величину дисконта.

Сумма, получаемая векселедержателем, равна

$$S_4 = S_0(1-d)^4 = 100000(1- d)^4 = 52200{,}6 \text{ руб.}$$

Величина дисконта равна

$$I_4 = S_0 - S_4 = 100000 - 52200{,}6 = 47799{,}3 \text{ руб.}$$

Пример 2. Клиент имеет вексель на 16 000 у.е., который он хочет учесть 10.01.2009 в банке по сложной учетной ставке 8%. Какую сумму он получит, если срок погашения 10.07.2009?

Продолжительность финансовой операции составит $\boldsymbol{n}=$

$$\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{T}}=\frac{30\cdot 6}{365}=0{,}49$$

Сумма, полученной клиентом, - $S_{0,49} = 16000(1-0{,}08)^{0,49} = 15359{,}46$ у.е.

Пример 3. Предприятие получило кредит на один год в размере 7 млн руб. с условием возврата 7,77 млн руб. Надо рассчитать процентную и учетную ставку.

Годовая процентная ставка $\boldsymbol{r = S(1) / S(0)}$ - 1 = 7,77 / - 1 = 0,11, или 11%.

Годовая учетная ставка $\boldsymbol{d = 1- S(1) / S(0)}$ = 1 – 7 / 7,77 = 0,099, или 9,9%.

Пример 4. Банк учитывает вексель по номинальной учетной ставке 10% с ежемесячным начислением процентов. Найти сложную учетную ставку, при которой доход банка не изменился.

Эффективная учетная ставка $\boldsymbol{d_{эфф}} = 1 - (1 - 0{,}1/12)^{12} = 0{,}0955$, или 9,55%.

Задания для практических занятий

1. Вексель стоимостью 550 000 руб. учитывается за 3 года до погашения по сложной учетной ставке 12% годовых. Найдите сумму, которую получит векселедержатель, и величину дисконта.

2. Вексель на сумму 60000 руб. учтен по процентной ставке 14% годовых (сложные проценты), срок платежа наступает через 0,6 года. Определите сумму, полученную владельцем векселя при учете, и дисконт при ежеквартальном и ежемесячном дисконтировании.

3. Клиент имеет вексель на 20000 руб., который он хочет учесть 24.04.2011 в банке по сложной учетной ставке 10%. Какую сумму он получит, если срок погашения 12.09.2011?

4. Дайте определение математического дисконтирования и банковского учета.

5. Банк учитывает вексель по номинальной учетной ставке 12% с ежемесячным начислением процентов. Найдите сложную учетную ставку, при которой доход банка не изменился.

6. Номинальная учетная ставка равна 10%. При этом проценты начисляются ежеквартально. Найдите эффективную учетную ставку.

7. Вексель в сумме 1200 у.е. должен быть оплачен через 160 дней. Учетная ставка с равной вероятностью лежит в пределах 6 - 7% годовых. Какую сумму $\boldsymbol{P}$ в среднем получит владелец векселя, если учтет его в банке через 15 дней? Какова вероятность, что полученная сумма $\boldsymbol{P}$ будет находиться в пределах 1168 - 1170 у.е.? Чему будет равен риск $\boldsymbol{\sigma}$ финансовой операции $(K = 360)$?

8. 1.135. Банк учитывает вексель по номинальной учетной ставке 14% с ежеквартальным начислением процентов. Найдите сложную учетную ставку, при которой доход банка не изменится.

9. Клиент имеет вексель на 100000 руб., который он хочет учесть 15.04 в банке по сложной учетной ставке 10%. Какую сумму он получит, если срок погашения 15.08?

10. Покажите, что более выгодным для банка является дисконтирование по сложной учетной ставке, если срок учета менее одного года. Если же срок учета превышает один год, то более выгодно дисконтирование по простой учетной ставке.

11. Вексель был куплен за 500 у.е. Через 3 месяца он был продан за 550 у.е. Какова доходность этой операции купли-продажи, измеренная в виде годовой ставки простых процентов $(K = 360)$?

12. Что выгоднее: положить 1000 у.е. в банк на год под 8% годовых или купить за 1000 у.е. вексель номиналом в 1100 у.е. и пога-

шением через год? Чему равна доходность покупки векселя, измеренная в виде годовой ставки процентов?

13. Вексель куплен за 200 дней до его погашения. На момент покупки рыночная учетная ставка составляла 7% годовых. Через 50 дней вексель был продан по учетной ставке 6% годовых. Оцените эффективность данной финансовой операции в виде годовых ставок простых и сложных процентов.

14. Что предпочтительнее для инвестора: инвестировать 1000 у.е. и покупку векселя (сумма векселя - 1150 у.е., срок до погашения - 2 года) или купить за ту же сумму облигацию по курсу 95, с полугодовой выплатой процентов по купонной ставке 10% и погашением по номиналу через 2 года?

15. Сертификат номиналом в 2000 у.е. с объявленной ставкой в 7 простых годовых процентов и сроком обращения в 100 дней куплен за 2100 у.е. за 40 дней до погашения. Сертификат погашается по номиналу вместе с начисленными процентами. Планируется продать его через 15 дней. Прогнозируется, что в момент продажи рыночная ставка простых процентов может принять значение 6,5% с вероятностью 0,4;7,5% - с вероятностью 0,45 и 8% - с вероятностью 0,15. Оцените числовые характеристики, характеризующие эффективность операции купли - продажи финансового инструмента: минимальное и максимальное значение, среднее ожидаемое значение, дисперсию.

16. Сертификат куплен за 10000 руб. и продан за 11200 руб. через 100 дней. Какова доходность этой финансовой операции, измеренная в виде годовых ставок простых и сложных процентов?

17. Сертификат куплен за 90 дней до его погашения и продан через 145 дней. В момент покупки ставка простых процентов была 7%,

а в момент продажи - 7,5% годовых. Оцените доходность этой финансовой операции в виде годовых ставок простых и сложных процентов.

18. Сертификат номинала 100000 руб. с объявленной доходностью 10 простых годовых процентов и сроком обращения 365 дней куплен за 105000 руб. за 100 дней до его погашения. Рыночная ставка простых процентов на момент покупки составила 9%. Какова доходность инвестирования средств в сертификат до конца срока его обращения в виде годовых ставок простых и сложных процентов?

6. Конверсия платежей

Эквивалентными называется такие платежи, которые, будучи «при-веденными» к некоторой базисной дате по ставке процентов, удовлетворяющей обе стороны, оказываются равными. Исходя из этого принципа получают уравнение эквивалентности, в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к базисной дате, равна сумме платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате.

Наиболее простой вид принимает уравнение эквивалентности при консолидации платежей, когда платежи $S_1, S_2, \dots, S_m$ со сроками оплаты соответственно $n_1, n_2, \dots, n_m$ заменяются одним в сумме S_0 и сроком оплаты n_0. Здесь возможны две постановки задачи: если задается срок n_0, то находится сумма S_0 и наоборот. При заданном n_0, если консолидация производится по ставке простых процентов i, размер консолидированного платежа равен

$$S_0 = \sum_j S_j (1 + t_j i) + \sum_k \frac{S_k}{(1 + t_k i)}, \qquad (6.1)$$

где S_j - платежи со сроками оплаты $n_j < n_0$; $t_j = n_0 - n_j$; S_k - платежи со сроками оплаты $n_k > n_0$; $t_k = n_k - n_0$

Если консолидация производится по ставке сложных процентов i, размер консолидированного платежа

$$S_0 = \sum_j S_j (1 + i)^{tj} + \sum_k \frac{S_k}{(1 + i)^{tk}}, \qquad (6.2)$$

Если требуется определить время n_0 оплаты консолидированного платежа S_0, составляем уравнение эквивалентности, выбрав в качестве базисной даты начало отсчета. Разрешив уравнение эквивалентности относительно n_0 для ставки простых процентов i (ставки «приведения»), получаем:

$$n_0 = \frac{1}{i}(\frac{S_0}{P} - 1); P = \sum_k \frac{S_k}{(1 + t_k i)}. \qquad (6.3)$$

Формула (6.3) имеет смысл, если размер консолидированного платежа не будет меньше «барьерного» значения P, т.е. для $S_0 > P$ - Таким же образом определяют время оплаты.

Для ставки сложных процентов / (ставки «приведения») получаем:

$$n_0 = \frac{ln(\frac{S_0}{P})}{ln(1 + i)}; P = \sum_k \frac{S_k}{(1 + i)^{tk}}. \qquad (6.4)$$

Пример 1. Два платежа: 15000 и 24000 руб., произведенные в начале второго периода и в конце четвертого, соответственно заменить одним платежом в начале шестого периода. Годовая ставка сложных процентов равна 12%.

Пример 2. Один платеж 43000 руб. в начале третьего периода заменить тремя равными платежами, произведенными в начале первого и в конце четвертого и седьмого периодов соответственно. Годовая ставка простых процентов равна 17%.

Пример 3. Два платежа: 13000 и 35000 руб., произведенные в начале четвертого периода и в конце пятого, соответственно заменить двумя платежами в конце шестого и восьмого периодов. При этом первый платеж на 20% больше второго. Годовая ставка сложных процентов равна 9%.

Пример 4. Три платежа: 13000, 25000 и 35000 руб., произведенные и начале третьего, начале четвертого периодов и в конце пятого, соответственно заменить двумя платежами в конце шестого и седьмого периодов. При этом первый платеж в 3 раза больше второго. Годовая ставка сложных процентов равна 11%.

Пример 5. Три платежа: 15000, 26000 и 45000 руб., произведенные в начале третьего, начале четвертого периодов и в конце пятого, соответственно заменить платежом 90000 руб. Годовая ставка сложный процентов равна 15%.

Требуется определить время $\boldsymbol{n_0}$ платежа в 90 000 руб. Приведем все три платежа к начальному моменту времени и сложим их.

$$P = \frac{15000}{(1+0{,}15)^2} + \frac{26000}{(1+0{,}15)^3} + \frac{45000}{(1+0{,}15)^5} =$$
$$= 11342{,}155 + 17095{,}422 + 22372{,}953 = 50810{,}530 \text{руб.}$$

Тогда по формуле $\boldsymbol{n_0 = \dfrac{ln(\dfrac{S_0}{P})}{ln(1+i)}};$где $\boldsymbol{P} = \sum_k \dfrac{\boldsymbol{S_k}}{\boldsymbol{(1+i)^{tk}}}$, найдем $\boldsymbol{n}_0$:

$$\boldsymbol{n_0} = \frac{\boldsymbol{ln}(\dfrac{90000}{50810{,}50})}{\boldsymbol{ln}(1+0{,}15)} = \frac{0{,}5717}{0{,}1398} = 4{,}09 \approx 4 \text{ года}.$$

Проверка показывает правильность вычислений (с учетом приближений):

$$P = \frac{90000}{(1+0{,}15)^{4{,}09}} = 50814{,}580 \text{руб.}$$

Пример 6. Три платежа: 20000, 40000 и 70000 руб., произведенные в начале второго, начале пятого периодов и в конце шестого, соответственно заменить платежом 120000 руб. Годовая ставка простых процентов равна 10%. Требуется определить время $\boldsymbol{n_0}$ платежа в 120000 руб.

Приведем все три платежа к начальному моменту времени и сложим их:

$$P = \frac{20000}{(1+0{,}1)} + \frac{40000}{(1+4\cdot 0{,}1)} + \frac{70000}{(1+6\cdot 0{,}1)} =$$
$$= 18181{,}818 + 28571{,}429 + 43750 = 90503{,}247 \text{руб.}$$

Тогда по формуле $\boldsymbol{n_0 = \frac{1}{i}(\frac{S_0}{P} - 1);}$ где $\boldsymbol{P = \sum_k \frac{S_k}{(1 + t_k i)},}$ найдем $\boldsymbol{n_0}$

$$\boldsymbol{n_0 = \frac{1}{i}(\frac{S_0}{P} - 1)} = \frac{1}{0{,}1}(\frac{120000}{90503{,}247} - 1) = 3{,}26 \text{года}$$

Проверка показывает правильность вычислений (с учетом приближений)

$$P = \frac{120000}{(1 + 3{,}26 \cdot 0{,}1)} = 90497{,}738 \text{руб.}$$

Задания для практических занятий

1. Заемщик через 3 года должен заплатить в банк 20000 руб., а через 5 лет -15000 руб. Вместо этого он заплатил только один раз через 6 лет. Какую сумму заплатил заемщик, если годовая процентная ставка равна 12%?

2. Два платежа: 17000 и 19000 руб., произведенные в конце четвертого и шестого периодов соответственно, замените одним платежом в начале девятого периода. Годовая ставка простых процентов равна 15%.

3. Четыре платежа: 10000, 12000, 14000 и 12000 у.е. со сроками оплаты соответственно 5.03, 10.04, 12.06 и 15.08 (год не високосный) решено заменить одним платежом, выплачиваемым 1.07. При такой замене предполагается использовать годовую ставку простых процентов - 8%. В качестве базовой даты может быть выбрана любая из дат оплаты платежей. Какую базовую дату следует выбрать, чтобы консолидированный платеж был: а) минимальным, б) максимальным? Определите величину консолидированного платежа для каждого из вариантов.

4. Четыре платежа из условий предыдущей задачи решено консолидировать в один платеж $\boldsymbol{S}$, выплачиваемый 10.02. При кон-

солидации используется ставка простых процентов - 10%. Базовая дата - 10.02; временная база K = 365 дней. Какова величина $\boldsymbol{S}$?

5. По условиям предыдущей задачи консолидация платежей производится на основе банковской учетной ставки 12% годовых (K = 365 дней). Какова величина $\boldsymbol{S}$?

6. При сохранении условий задачи 1.148 четыре платежа решено погасить одним платежом в сумме 45 тыс. у.е. Консолидация производится на основе годовой ставки в 11 простых процентов. Определите дату уплаты консолидированного платежа.

7. Один платеж 85 000 руб. в начале первого периода замените время равными платежами, произведенными в начале первого и в конце четвертого и седьмого периодов соответственно. Годовая ставка простых процентов равна 15%.

8. Ссуда в размере 100 000 у.е. выдана на 100 дней под 9% точных, простых годовых процентов (K = 366 дней). Однако она не была возвращена в намеченный срок, а была погашена спустя 20 дней, не считая даты погашения. Какую сумму следует вернуть, если за просроченное время на сумму возврата долга начислялись точные, простые проценты по ставке 12% годовых?

9. 1.54. Два платежа: 67 000 и 52 000 руб., произведенные в начале второго периода и в конце третьего соответственно, замените двумя платежами в конце пятого и десятого периодов. При этом первый платеж на 40% меньше второго. Годовая ставка сложных процентов равна 11%.

10. Имеются три векселя с датами погашения, указанными в скобках, на сумму 11 тыс. (1.03), 8 тыс. (15.04) и 10 тыс. у.е. (17.07).Решено учесть их в банке 1.02. Банк учитывает векселя по ставке 8% годовых со сроками погашения от 250 до 360 дней, по ставке

7,5% со сроками погашения от 130 до 249 дней и по ставке 6,5% годовых для векселей со сроками погашения от 30 до 129 дней. Какую сумму получит владелец векселей, если учтет их одновременно в банке ($K = 360$)?

11. Два платежа: 32 000 и 43 000 руб., произведенные в начале четвертого периода и в конце пятого соответственно, замените двумя платежами в конце седьмого и восьмого периодов. При этом первый платеж на 17% меньше второго. Годовая ставка простых процентов равна 14%.

12. Три векселя (условия их погашения приведены в задаче (10)) решено заменить одним векселем в сумме 23 000 у.е. на основе банковской учетной ставки 8% годовых ($K = 360$). Укажите дату погашения этого векселя.

13. Три векселя (условия их погашения приведены в задачу (10)) решено заменить одним векселем, в котором необходимо указать целое число тысяч долларов. Замена производится на основе банковской учетной ставки 8% годовых ($K = 360$). Каково минимально допустимое значение этой суммы, при которой возможна подобная замена? Укажите дату погашения векселя с найденным значением минимально допустимой суммы.

14. Платежи в сумме 9000, 10000 и 25000 у.е. со сроками оплаты соответственно через 2, 3 и 4 года решили заменить одним платежом в сумме $\boldsymbol{S}$, выплачиваемым через 5 лет. Подобная замена производится по сложной ставке 9% годовых. Чему равна сумма $\boldsymbol{S}$? Зависит ли сумма $\boldsymbol{S}$ от выбора базовой даты?

15. Платежи из предыдущей задачи решили заменить одним платежом в размере 42 тыс. у.е. на основе сложной ставки 9% годовых.

Через сколько лет должен быть оплачен этот консолидированный платеж?

16. Три платежа: 15000, 25000 и 45000 руб., произведенные в начале второго, начале третьего и в конце пятого периодов соответственно, замените двумя платежами в конце седьмого и девятого периодов. При этом первый платеж в 5 раз меньше второго. Годовая ставка сложных процентов равна 19%.

17. Имеется обязательство оплатить 1.03 $\boldsymbol{S_1}$ = 7000 у.е., 15.06 $\boldsymbol{S_2}$ = 14 000 у.е. и 15.12 53 = 8000 у.е. Решено на основе простой ставки процентов 8% годовых (K = 365) изменить порядок оплаты: 40% от $\boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{S_2} + \boldsymbol{S_3}$ выплачивается 31.07, а остальная задолженность $\boldsymbol{R}$ гасится 30.12. Определите величину $\boldsymbol{R}$ для случая, когда: а) в качестве базовой даты берется 31.07, б) базовая дата - 30.12.

18. Необходимо оплатить 100000 у.е. через 6 лет. На основе сложной ставки 10% годовых решено изменить порядок оплат: задолженность погашается тремя равными частями $\boldsymbol{S}$ через год, три и пять лет. Чему равно $\boldsymbol{S}$?

Контрольные вопросы

1. Что составляет предметом курса «Основы финансовых вычислений»?
2. Какие параметры характеризуют условия финансово-кредитной операции?
3. В чем заключается принцип неравноценности денег?
4. Что означает принцип финансовой эквивалентности?
5. Как кратко называются процентные деньги?
6. Какой смысл проценты в финансово-кредитных операциях – это?

7. Назовите формы предоставления денег в долг?
8. Что такое процентная ставка?
9. В чем измеряется процентная ставка?
10. Что такое период начисления?
11. Что означает капитализация процентов?
12. В чем заключается процесс наращение?
13. С какой целью используется в финансовом анализе процентная ставка?
14. Как различаются процентные ставки?
15. Что такое база начисления процентов?
16. Какой вид процентной ставки используется при расчете процентов от настоящего к будущему?
17. Какой вид процентной ставки используется при расчете процентов от будущего к настоящему?
18. Какой смысл имеет маржа?
19. Что означает ставка рефинансирования ЦБ РФ?
20. Что такое наращенная сумма?
21. При каких условиях начисляются простые проценты?
22. По какой формуле определяется наращенная сумма в случае простых процентов?
23. Какой вид имеет формула простых процентов?
24. Как определяется множитель наращения простых процентов?
25. Какая математическая зависимость отражает рост по простым процентам?
26. Что такое временная база начисления процентов?
27. При какой временной базе получают обыкновенные проценты?
28. При какой временной базе получают коммерческие проценты?

29. При какой временной базе получают точные проценты?
30. Чему равна продолжительность месяца при приближенном измерении срока ссуды?
31. Как обозначается в документах расчет точных простых процентов?
32. Как обозначается в документах расчет обыкновенных процентов с точным числом дней ссуды?
33. Как обозначается в документах расчет обыкновенных процентов с приближенным числом дней ссуды?
34. Какой из способов расчета простых процентов дает самые точные результаты?
35. Какой из методов расчета простых процентов называется банковским?
36. Какой из двух результатов меньше: по методу АСТ/АСТ или по методу АСТ/360?
37. Каким образом определяется наращенная сумма при изменяющихся во времени ставках?
38. Каким образом определяется проценты при изменяющейся сумме депозита?
39. Что означает реинвестирование по простым процентам?
40. Что такое контур финансовой операции?
41. Как называется метод погашения задолженности с помощью промежуточных платежей, предполагающий начисление процентов на фактическую сумму долга?
42. Какой контур имеет сбалансированная финансовая операция?
43. Каким образом осуществляется погашение задолженности при актуарном методе?

44. Сколько вариантов правила торговца используется на практике?
45. По какому параметру различаются варианты правила торговца?
46. Как определяется наращенная сумма в потребительском кредите?
47. По какой формуле определяется величина разового погасительного платежа в потребительском кредите?
48. Что такое дисконтирование?
49. Как называется величина, найденная с помощью дисконтирования?
50. Какие виды дисконтирования Вы знаете?
51. Какая задача решается путем математическое дисконтирование?
52. С помощью какой формулы определяется дисконтный множитель, в случае математического дисконтирования?
53. По какой формуле определяется размер дисконта в случае банковского учета?
54. По какой формуле определяется дисконтный множитель в случае коммерческого учета?
55. По какому из вариантов ведется учет в случае банковского или коммерческого учета?
56. Как называется ставка применяемая при учете векселя?
57. По какой формуле рассчитывается наращенная сумма с использованием простой учетной ставки?
58. По какой из ставок рассчитанная наращенная сумма получается больше?
59. Какая из задач является прямой для учетной ставки?

60. Какая из задач является обратной для ставки наращения?
61. Каким общим словом называются учетная ставка и ставка наращения?
62. Какая формула отражает прямую задачу наращения?
63. Какая формула отражает обратную задачу наращения?
64. Какая формула отражает прямую задачу дисконтирования?
65. Какая формула отражает обратную задачу дисконтирования?
66. Какой вид процентной ставки дает самый быстрый рост суммы задолженности?
67. По какой формуле определяется продолжительность ссуды в годах при использовании ставки наращения?
68. Каким образом определяется продолжительность ссуды по учетной ставке?
69. С помощью какой формулы определяется величина процентной ставки наращения?
70. С помощью какой формулы определяется величина учетной ставки?
71. Из каких шагов состоит операция депонирования СКВ на рублевом счете?

Задания для самостоятельной работы студентов

Задача 1. Определить проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 500 тыс. руб., срок 2 года, проценты – простые по ставке 20%.

Задача 2. Определить проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 600 тыс. руб., срок 3 года, проценты – простые по ставке 15%.

Задача 3. Определить проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 400 тыс. руб., срок 4 года, проценты – простые по ставке 15%.

Задача 4. Определить проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 500 тыс. руб., срок 4 года, проценты – простые по ставке 20%.

Задача 5. Как изменится сумма процентов, если срок ссуды увеличится в 2 раза?

- увеличится в два раза;
- уменьшится в два раза;
- увеличится на 50%;
- уменьшится на 50%.

Задача 6. Как изменится сумма процентов, если срок ссуды сократится в 2 раза?

- увеличится в два раза;
- уменьшится в два раза;
- увеличится на 50%;
- уменьшится на 50%.

Задача 7. Как изменится сумма процентов, если ставка увеличится в полтора раза?

- увеличится в 1,5 раза;
- уменьшится в 1,5 раза;
- увеличится на 30%;
- уменьшится на 30%.

Задача 8. Как изменится сумма процентов, если ставка уменьшится в полтора раза?

- увеличится в 1,5 раза;
- уменьшится в 1,5 раза;

- увеличится на 30%;

- уменьшится на 30%.

Задача 9. Сумма долга возрастет в 2 раза. Это значит

- увеличится на 50%;

- увеличится на 100%;

- уменьшится на 50%;

- уменьшится на 100%.

Задача 10. Сумма долга уменьшится в 2 раза. Это значит

- увеличится на 50%;

- увеличится на 100%;

- уменьшится на 50%;

- уменьшится на 100%.

Задача 11. Если кредит на покупку товара на сумму 100 тыс. руб. открыт на 2 года под 15% годовых, то ежемесячные платежи составят

Задача 12. Если кредит на покупку товара на сумму 150 тыс. руб. открыт на 2 года под 10% годовых, то ежемесячные платежи составят

Задача 13. Если кредит на покупку товара на сумму 200 тыс. руб. открыт на 3 года под 15% годовых, то ежемесячные платежи составят

Задача 14. Если кредит на покупку товара на сумму 300 тыс. руб. открыт на 2 года под 10% годовых, то ежемесячные платежи составят

Задача 15. Какова первоначальная сумма долга, если через 120 дней должник уплатит 240 тыс. руб. Процентная ставка – 20% годовых, K=360.

Задача 16. Какова первоначальная сумма долга, если через 180 дней должник уплатит 300 тыс. руб. Процентная ставка – 20% годовых, K=360.

Задача 17. Какова первоначальная сумма долга, если через 240 дней должник уплатит 500 тыс. руб. Процентная ставка – 20% годовых, K=360.

Задача 18. Цена товара увеличилась на 10%. На сколько процентов нужно уменьшить цену, чтобы она вернулась к прежней величине?

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица 1. - Порядковые номера дат в году

Дни	Месяцы											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ТЕСТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«Основы финансовых вычислений»

1. Принцип неравноценности денег заключается в том, что:

1) A – деньги обесцениваются со временем;
2) B – деньги приносят доход;
3) C – равные по абсолютной величине денежные суммы, относящиеся к различным моментам времени, оцениваются по-разному;
4) D – "сегодняшние деньги ценнее завтрашних денег".

2. Финансово-коммерческие расчеты используются для:

1) A – определения выручки от реализации продукции.
2) B – расчета кредитных операций.
3) C – расчета рентабельности производства.
4) D – расчета доходности ценных бумаг.

3. Подход, при котором фактор времени играет решающую роль, называется:

1) A – временной;
2) B – статический;
3) C – динамический;
4) D – статистический.

4. Проценты в финансовых расчетах:

1) A – это доходность, выраженная в виде десятичной дроби;
2) B – это абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг в любой его форме;
3) C – показывают, сколько денежных единиц должен заплатить заемщик за пользование в течение определенного периода времени 100 единиц первоначальной суммы долга;
4) D – это %.

5. Процентная ставка – это:

1) A – относительный показатель, характеризующий интенсивность начисления процентов;
2) B – абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг в любой его форме;
3) C – ставка, зафиксированная в виде определенного числа в финансовых контрактах;
4) D – отношение суммы процентных денег к величине ссуды.

6. В качестве единицы времени в финансовых расчетах принят:

1) A – год;
2) B – квартал;
3) C – месяц;
4) D – день.

7. Наращение – это:

1) A – процесс увеличения капитала за счет присоединения процентов;
2) B – базисный темп роста;
3) C – отношение наращенной суммы к первоначальной сумме долга;
4) D – движение денежного потока от настоящего к будущему.

8. Коэффициент наращения – это:
1) A – отношение суммы процентных денег к величине первоначальной суммы;
2) B – отношение наращенной суммы к первоначальной сумме;
3) C – отношение первоначальной суммы к будущей величине денежной суммы;
4) D – отношение процентов к процентной ставке.

9. Виды процентных ставок в зависимости от исходной базы:
1) A – постоянная, сложная;
2) B – простая, переменная;
3) C – простая, сложная;
4) D – постоянная, переменная.

10. Фиксированная процентная ставка – это:
1) A – ставка, неизменная на протяжении всего периода ссуды;
2) B – ставка, применяемая к одной и той же первоначальной сумме долга;
3) C – ставка, зафиксированная в виде определенного числа в финансовых контрактах;
4) D – отношение суммы процентных денег к величине ссуды.

11. Наращение – это:
1) A – процесс увеличения капитала за счет присоединения процентов;
2) B – базисный темп роста;
3) C – отношение наращенной суммы к первоначальной сумме долга;
4) D – движение денежного потока от настоящего к будущему.

12. Формула простых процентов:
1) A – $FV = PV \cdot i \cdot n$
2) B – $FV = PV(1 + i)^n$
3) C – $FV = PV(1 + ni)$
4) D – $FV = PV(1 + i)$

13. Простые проценты используются в случаях:
1) A – реинвестирования процентов;
2) B – выплаты процентов по мере их начисления;
3) C – краткосрочных ссуд, с однократным начислением процентов;
4) D – ссуд, с длительностью более одного года.

14. Точный процент – это:
1) A – капитализация процента;
2) B – коммерческий процент;
3) C – расчет процентов, исходя из продолжительности года в 365 или 366 дней;

4) D – расчет процентов с точным числом дней финансовой операции.

15. Точное число дней финансовой операции можно определить:

1) A – по специальным таблицам порядковых номеров дней года;
2) B – используя прямой счет фактических дней между датами;
3) C – исходя из продолжительности каждого целого месяца в 30 дней;
4) D – считая дату выдачи и дату погашения ссуды за один день.

16. Французская практика начисления процентов:

1) A – обыкновенный процент с приближенным числом дней финансовой операции;
2) B – обыкновенный процент с точным числом дней финансовой операции;
3) C – точный процент с точным числом дней финансовой операции;
4) D – точный процент с приближенным числом дней финансовой операции.

17. Германская практика начисления процентов:

1) A – обыкновенный процент с приближенным числом дней финансовой операции;
2) B – обыкновенный процент с точным числом дней финансовой операции;
3) C – точный процент с точным числом дней финансовой операции;
4) D – точный процент с приближенным числом дней финансовой операции.

18. Английская практика начисления процентов:

1) A – обыкновенный процент с приближенным числом дней финансовой операции;
2) B – обыкновенный процент с точным числом дней финансовой операции;
3) C – точный процент с точным числом дней финансовой операции;
4) D – точный процент с приближенным числом дней финансовой операции.

19. Расчет наращенной суммы в случае дискретно изменяющейся во времени процентной ставки по схеме простых процентов имеет следующий вид:

1) A – $FV = PV\ (1 + \Sigma n_к i_к)$
2) B – $FV = PV\ \Sigma\ (1 + n_к i_к)$
3) C – $FV = PV\ (1 + n_1 i_1)(1 + n_2 i_2) : (1 + n_к i_к)$
4) D – $FV = PV\ (1 + n\ i_к)$

20. Срок финансовой операции по схеме простых процентов определяется по формуле:

1) A – $n = I / (PV \cdot i)$
2) B – $n = [(FV - PV) / (FV \cdot t)]\ i$
3) C – $t = [(FV - PV) / (PV \cdot i)]\ T$
4) D – $n = [(FV - PV) / (FV \cdot t)]\ T$

21. Если в условиях финансовой операции отсутствует простая процентная ставка, то:

1) A – этого не может быть;
2) B – ее можно определить по формуле $i = [(FV - PV) / (PV \cdot t)] \cdot T$
3) C – ее невозможно определить;
4) D – ее можно определить по формуле i = Σ процентных чисел / дивизор .

22. Формула сложных процентов:

1) A – $FV = PV(1 + ni)$
2) B – $FV = PV(1 + t / T \cdot i)$
3) C – $FV = PV(1 + i)^n$
4) D – $FV = PV(1 + ni)(1 + i)^n$

23. Начисление по схеме сложных процентов предпочтительнее:

1) A – при краткосрочных финансовых операциях;
2) B – при сроке финансовой операции в один год;
3) C – при долгосрочных финансовых операциях;
4) D – во всех вышеперечисленных случаях.

24. Чем больше периодов начисления процентов:

1) A – тем медленнее идет процесс наращения;
2) B – тем быстрее идет процесс наращения;
3) C – процесс наращения не изменяется;
4) D – процесс наращения предсказать нельзя.

25. Номинальная ставка – это:

1) A – годовая ставка процентов, исходя из которой определяется величина ставки процентов в каждом периоде начисления, при начислении сложных процентов несколько раз в год;
2) B – отношение суммы процентов, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени, к величине ссуды;
3) C – процентная ставка, применяется для декурсивных процентов;
4) D – годовая ставка, с указанием периода начисления процентов.

26. Формула сложных процентов с неоднократным начислением процентов в течение года:

1) A – $FV = PV(1 + i)^{m \cdot n}$
2) B – $FV = PV(1 + j / m)^{m \cdot n}$
3) C – $FV = PV / m \cdot (1 + i)^{n / m}$
4) D – $FV = PV(1 + i \cdot m)^{m \cdot n}$

27. Эффективная ставка процентов:

1) A – не отражает эффективности финансовой операции;
2) B – измеряет реальный относительный доход;
3) C – отражает эффект финансовой операции;
4) D – зависит от количества начислений и величины первоначальной суммы.

28. Формула сложных процентов с использованием переменных процентных ставок:

1) A – $FV = PV(1 + i_1)^{n_1} (1 + i_2)^{n_2} \dots (1 + i_k)^{n_k}$
2) B – $FV = PV(1 + n_k i_k)$
3) C – $FV = PV(1 + n_1 i_1 \bullet n_2 i_2 \bullet \dots \bullet n_k i_k)^{nk}$
4) D – $FV = PV(1 + in)(1 + i)$

29. В случае, когда срок финансовой операции выражен дробным числом лет, начисление процентов возможно с использованием:

1) A – общего метода;
2) B – эффективной процентной ставки;
3) C – смешанного метода;
4) D – переменных процентных ставок.

30. Смешанный метод расчета:

1) A – $FV = PV(1 + i)^{а + в}$
2) B – $FV = PV(1 + i)^{а} (1 + вi)$
3) C – $FV = PV(1 + aвi)^{n}$
4) D – $FV = PV(1 + i)^{а} (1 + i)^{в}$

31. Непрерывное начисление процентов – это:

1) A – начисление процентов ежедневно;
2) B – начисление процентов ежечасно;
3) C – начисление процентов ежеминутно;
4) D – начисление процентов за нефиксированный промежуток времени.

32. Если в условиях финансовой операции отсутствует ставка сложных процентов, то:

1) A – ее определить нельзя;
2) B – $i = \sqrt[n]{FV / PV} - 1$
3) C – $i = \ln(FV / PV) / \ln(1 + n)$
4) D – $i = \lim(1 + j / m)^{m}$
5) E – $i = (1 + j / m)^{m} - 1$

33. Дисконтирование – это:

1) A – процесс начисления и удержания процентов вперед;
2) B – определение значения стоимостной величины на некоторый момент времени при условии, что в будущем она составит заданную величину;
3) C – разность между наращенной и первоначальной суммами.

34. Банковский учет – это учет по:

1) A – учетной ставке;
2) B – процентной ставке;
3) C – ставке рефинансирования;
4) D – ставке дисконтирования.

35. Антисипативные проценты – это проценты, начисленные:

1) A – с учетом инфляции;
2) B – по учетной ставке;

3) C – по процентной ставке.

36. Дисконтирование по сложным процентам осуществляется по формуле:

1) A – $PV = FV(1 + i)^{-n}$
2) B – $PV = FV(1 + i)^{-1}$
3) C – $PV = FV(1 - d)^{n}$
4) D – $PV = FV(1 + i)^{n}$

37. Дисконтирование по простой учетной ставке осуществляется по формуле:

1) A – $PV = FV(1 - d)^{n}$
2) B – $PV = FV(1 - d)^{-n}$
3) C – $PV = FV(1 - nd)$
4) D – $PV = FV(1 + nd)^{-1}$

38. Чем меньше процентная ставка, тем

1) A – выше современная величина;
2) B – ниже современная величина;
3) C – на современную величину это не оказывает влияния.

39. Какой вид дисконтирования выгоднее для векселедержателя:

1) A – математическое дисконтирование;
2) B – банковский учет;
3) C – разница отсутствует.

40. Поток платежей - это:

1) A – рост инвестированного капитала на величину процентов;
2) B – распределенные во времени выплаты и поступления;
3) C – перманентное обесценивание денег;
4) D – платеж в конце периода.

41. Вечная рента - это:

1) A – рента, подлежащая безусловной выплате;
2) B – рента с выплатой в начале периода;
3) C – рента с бесконечным числом членов;
4) D – рента с неравными членами.

42. Аннуитет - это:

1) A – частный случай потока платежей, когда члены потока только положительные величины;
2) B – частный случай потока платежей, когда число равных временных интервалов ограничено;
3) C – частный случай потока платежей, когда члены равны и имеют одинаковую направленность, а периоды ренты одинаковы.

43. Наращенная величина годовой постоянной обычной ренты определяется по формуле:

1) A – $FVA = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$

2) B – FVA = R (1 + i)^n - 1

3) C – $FVA = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

4) D – $FVA = R\frac{(1+j/m)^{nm} - 1}{(1+j/m)^m - 1}$

44. Наращенная сумма ренты пренумерандо рассчитывается по формуле:

1) A – $FVA = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$

2) B – $FVA = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)$

3) C – $FVA = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$

45. Современная величина годовой обычной ренты определяется по формуле:

1) A – $PVA = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$

2) B – $PVA = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$

3) C – $PVA = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

46. Для определения члена ренты необходимо знать:

1) A – наращенную сумму;
2) B – первоначальную сумму;
3) C – первоначальную и наращенную сумму;
4) D – только процентную ставку и срок ренты.

47. Для оценки бессрочного аннуитета не имеет смысла определение:

1) A – современной величины аннуитета;
2) B – наращенной величины аннуитета;
3) C – члена ренты.

48. Нерегулярные потоки платежей характеризуются присутствием нерегулярного параметра:

1) A – периода ренты;
2) B – размера платежа;
3) C – процентной ставки.

49. ***Уровень инфляции показывает:***

1) A – во сколько раз выросли цены;
2) B – во сколько раз цены снизились;
3) C – на сколько процентов цены возросли.

50. Расчет уровня инфляции за период осуществляется:

1) A – по простым процентам;
2) B – по сложным процентам;
3) C – по смешанному методу.

51. Если уровень инфляции ниже процентной ставки, то это:

1) A – уменьшение первоначальной денежной суммы;
2) B – рост реальной денежной суммы;
3) C – роста денежной суммы не будет.

52. Реальная доходность финансовой операции определяется:

1) A – с использованием реальной ставки процентов;
2) B – с использованием номинальной ставки процентов;
3) C – с использованием эффективной ставки.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блау С.Л. Инвестиционный анализ / Блау С.Л., - 2-е изд. - Москва: Дашков и К, 2018. - 256 с.: ISBN 978-5-394-02843-4 -
2. Кузнецов Б.Т. Математические методы финансового анализа: учеб.пособие для студентов вузов, обучающихся по специальностям 061800 «Математические методы в экономике», 060400 «Финансы и кредит» / Б.Т Кузнецов. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2017. - 159 с. - ISBN 978-5-238-00977-1.
3. Кузнецов Г.В. Основы финансовых вычислений: учеб. пособие / Кузнецов Г.В., Кочетыгов А.А. — Москва : ИНФРА-М, 2017. — 407 с.
4. Малыхин В.И. Финансовая математика: Учеб. пособие для вузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2017. — 237 с. - ISBN 978-5-238-00559-8.
5. Мелкумов Я.С. Финансовые вычисления. Теория и практика : учеб.-справоч. пособие / Мелкумов Я.С. — 2-е изд. — Москва : ИНФРА-М, 2017. — 408 с. — (Высшее образование: Бакалавриат).
6. Чуйко А.С. Финансовая математика: учебное пособие / А.С. Чуйко, В.Г. Шершнев. — Москва: ИНФРА-М, 2020. — 160 с. — (Высшее образование: Бакалавриат).
7. Чусавитина, Г. Н. Основы финансовой математики [Электронный ресурс]: учебное пособие / Г. Н. Чусавитина. — 4-е изд., стер. — Москва: ФЛИНТА, 2019. — 170 с. – ISBN 978-5-89349-988-9.