

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Казанский государственный аграрный университет»

Институт механизации и технического сервиса

Кафедра общепрофессиональных дисциплин

## КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

Практикум для выполнения лабораторных и самостоятельных работ по теории механизмов и машин для студентов очной и заочной формы обучения по направлениям подготовки:

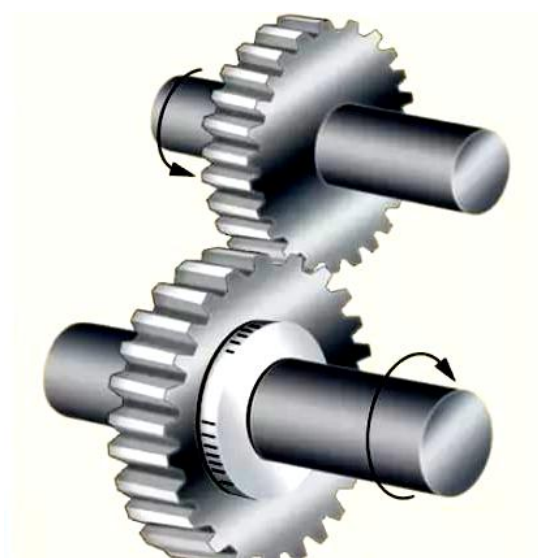
35.03.06 - «Агроинженерия»,

23.03.03 - «Эксплуатация транспортно -  
технологических машин и комплексов»,

20.03.01 «Техносферная безопасность»,

44.03.04 - «Профессиональное обучение»,

23.05.01 – «Наземные транспортно-технологические средства»



Казань, 2019

УДК 808.2

ББК 141.2-7

Составители: Мудров А. П., Яхин С.М., Пикмуллин Г.В.

Рецензенты:

Кандидат технических наук, доцент кафедры «Машины и оборудование в агробизнесе» Дмитриев А.В.

Кандидат технических наук, доцент кафедры «Машиноведение и инженерная графика» КНИТУ-КАИ Сайманов Р.Г.

Практикум для выполнения лабораторных и самостоятельных работ по теории механизмов и машин обсужден и рекомендован к печати на заседании кафедры общеинженерных дисциплин Казанского ГАУ (14.01.2019 года, протокол №6) и заседании методической комиссии Института механизации и технического сервиса Казанского ГАУ протокол № 5 от 15.01.2019 г.

Мудров А.П. Кинематический анализ зубчатых механизмов: Практикум для выполнения лабораторных и самостоятельных работ по теории механизмов и машин /А.П. Мудров, С.М. Яхин, Г.В. Пикмуллин// - Казань: Изд-во Казанского ГАУ, 2019. - 16с.

Практикум предназначен для выполнения лабораторных и самостоятельных работ по дисциплине «Теория механизмов и машин» и способствуют формированию компетенций для направлений подготовки: 35.03.06 «Агроинженерия», 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», 20.03.01 «Техносферная безопасность», 44.03.04 - «Профессиональное обучение» и 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства».

УДК 621.01

ББК 018

©Казанский государственный аграрный университет, 2019 г.

## Лабораторная работа

### Тема: КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

#### Цель и теоретические предпосылки проведения работы

##### *Цель работы*

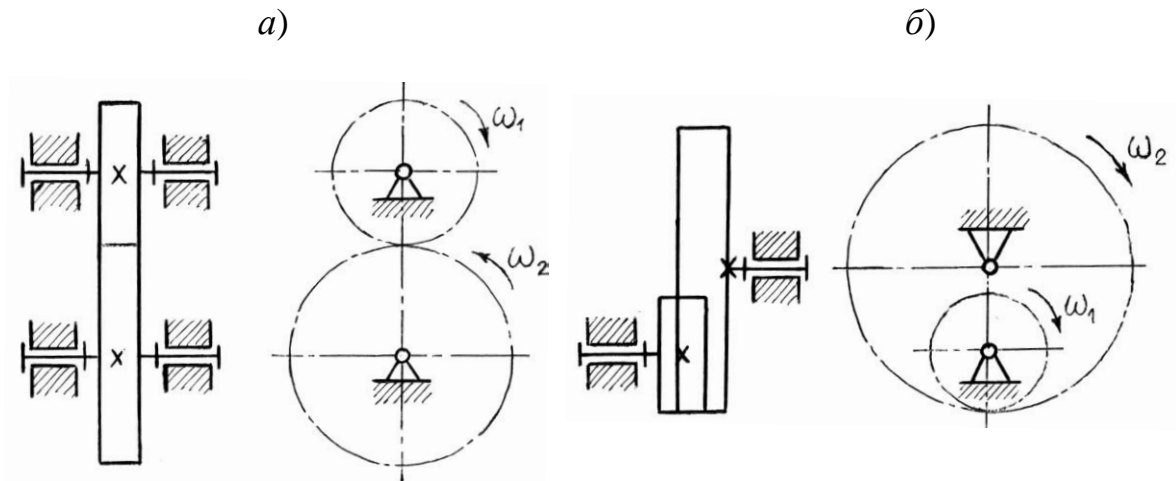
Целью лабораторной работы является изучение методики составления кинематических схем для различных видов зубчатых механизмов, определения их передаточных отношений, угловых скоростей зубчатых колёс и линейных скоростей их точек.

##### *Теоретические предпосылки проведения работы*

**Зубчатыми** называются такие механизмы, в состав которых входят звенья, имеющие выступы (зубья) для зацепления друг с другом и передачи вращательного движения, с обеспечением высокой точности заданного закона, от входного звена к выходному. Простейший зубчатый механизм имеет два таких звена, называемых зубчатыми колёсами (колесо с меньшим количеством зубьев - **шестерня**), и стойку. В многозвенном механизме подобный механизм образует **ступень**, и число ступеней на единицу меньше количества неподвижных осей вращения зубчатых колёс.

В зависимости от взаимного положения осей вращения колес зубчатые механизмы можно разделить на три группы. Первую составляют механизмы с параллельными осями колес, называемые цилиндрическими (смотри рисунок 1). Частным случаем здесь является механизм, у которого одно из колес представляет собой зубчатую рейку, служащий для преобразования вращательного движения в поступательное или наоборот.

Колёса могут зацепляться друг с другом внешним образом, вращаясь в противоположные стороны, такое зацепление называется **внешним**, если же одно колесо находится внутри другого, и при зацеплении они вращаются в одну сторону, то такое зацепление называется **внутренним**.



*a* - с внешним зацеплением; *б* - с внутренним зацеплением

Рисунок 1 - Цилиндрические зубчатые механизмы

Зубчатые механизмы первой группы относятся к плоским механизмам, так как траектории всех точек подвижных звеньев лежат в параллельных плоскостях.

Ко второй группе принадлежат зубчатые механизмы, у которых оси вращения колёс пересекаются (смотри рисунок 2). Они называются коническими.

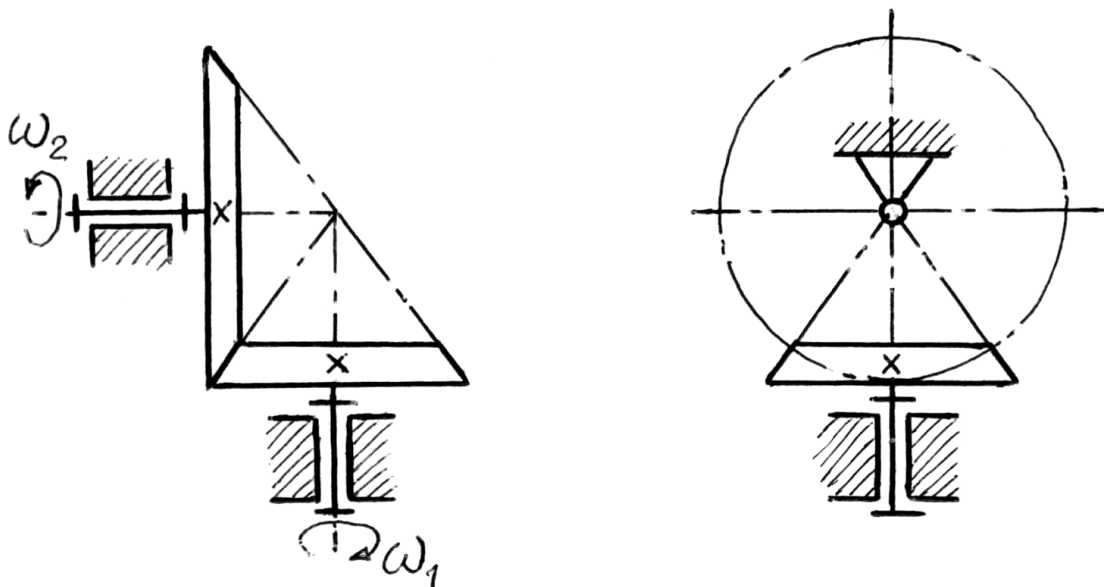


Рисунок 2 - Конический зубчатый механизм

В третью группу входят механизмы со скрещивающимися осями вращения колёс. К ним относятся: гипоидные (смотри рисунок 3), винтовые (смотри рисунок 4) и червячные (смотри рисунок 5) механизмы.

Зубчатые механизмы второй и третьей групп являются пространственными механизмами, так как траектории точек их подвижных звеньев лежат в пересекающихся плоскостях.

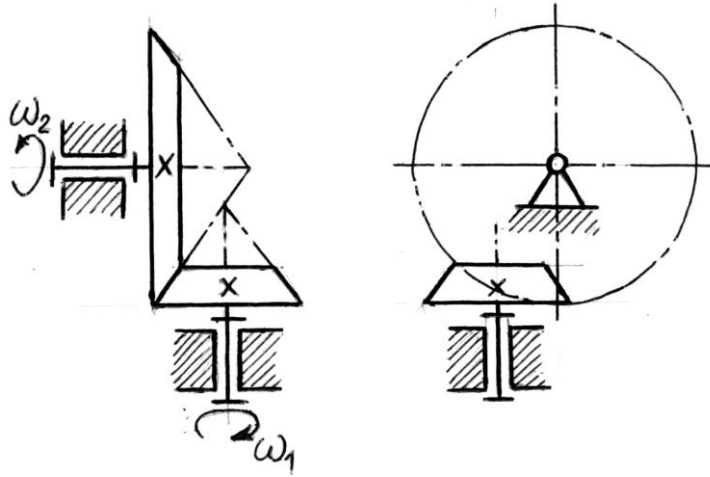


Рисунок 3 - Гипоидный зубчатый механизм

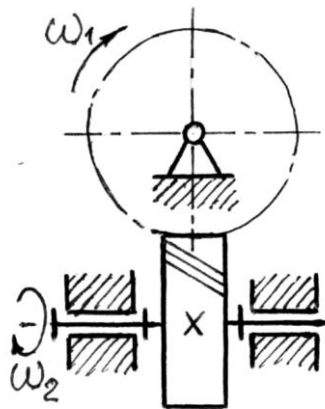


Рисунок 4 - Винтовой зубчатый механизм

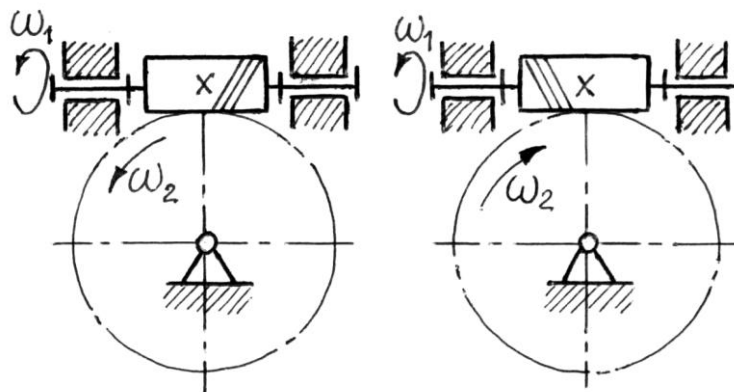


Рисунок 5 - Червячные механизмы с разным углом наклона ниток-заходов червяка

Зубчатые механизмы, представленные на рисунках 1-5, относятся к механизмам с неподвижными осями вращения колёс. Соединение таких простых механизмов (передач или ступеней) позволяет получить многозвенный зубчатый механизм, степень свободы (степень подвижности) которого равна единице, а передаточное отношение является постоянной величиной и определяется произведением передаточных отношений ступеней:

$$i = i_1 + i_2 \dots i_n, \quad (1)$$

где 
$$i_n = i_{jk} = \pm \frac{\omega_j}{\omega_k} = \pm \frac{\varphi_j}{\varphi_k} = \pm \frac{r_k}{r_j} = \pm \frac{z_k}{z_j}.$$

Здесь  $\omega_j, \omega_k$  - угловые скорости  $j$  и  $k$  зубчатых колёс, находящихся в зацеплении (знак «+» - при внешнем зацеплении, знак «-» - при внутреннем),  $\varphi_j, \varphi_k$  - их углы поворота,  $r_j, r_k$  - радиусы этих колёс,  $z_j, z_k$  - числа их зубьев. Если рассматривается передаточное отношение винтовой или червячной передачи, то формула для его определения выглядит так

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_{w2} \cdot \cos \beta_{w2}}{r_{w1} \cdot \cos \beta_{w1}} = \frac{z_2}{z_1}, \quad (2)$$

где  $\omega_1, \omega_2$  - угловые скорости червяка (1) и зубчатого колеса (2),  $n_1, n_2$  - их частоты вращения,  $r_{w1}, r_{w2}$  - радиусы их начальных окружностей,  $z_1$  - число заходов винтовой линии червяка,  $z_2$  - число зубьев колеса,  $\beta_{w1}, \beta_{w2}$  - углы наклона винтовых линий по начальным цилиндрам червяка и колеса.

Для многозвенного зубчатого механизма, зная передаточные отношения его ступеней, можно определить угловую скорость любого ( $k$ -го) зубчатого колеса и линейную скорость любой (точки  $N$ ) этого колеса:

$$\omega_k = \omega_1 / i_{1k},$$

$$V_N = r_N \cdot \omega_k,$$

где  $i_{1k}$  - передаточное отношение угловых скоростей 1 и  $k$  зубчатых колёс,

$V_N$  - скорость точки  $N$   $k$ -го зубчатого колеса, расположенной на расстоянии  $r_N$  от оси вращения этого колеса.

Скорость точки колеса можно найти и графически по плану скоростей, построенному в масштабе  $K_V, \frac{м}{с \cdot мм}$  для кинематической схемы зубчатого механизма, выполненной в масштабе  $K_L, \frac{м}{мм}$  (смотри рисунок 6). Например, скорость точки N зубчатого колеса 6 равна произведению длины отрезка Nn, измеренного в мм по плану скоростей, на масштаб скорости  $K_V$ .

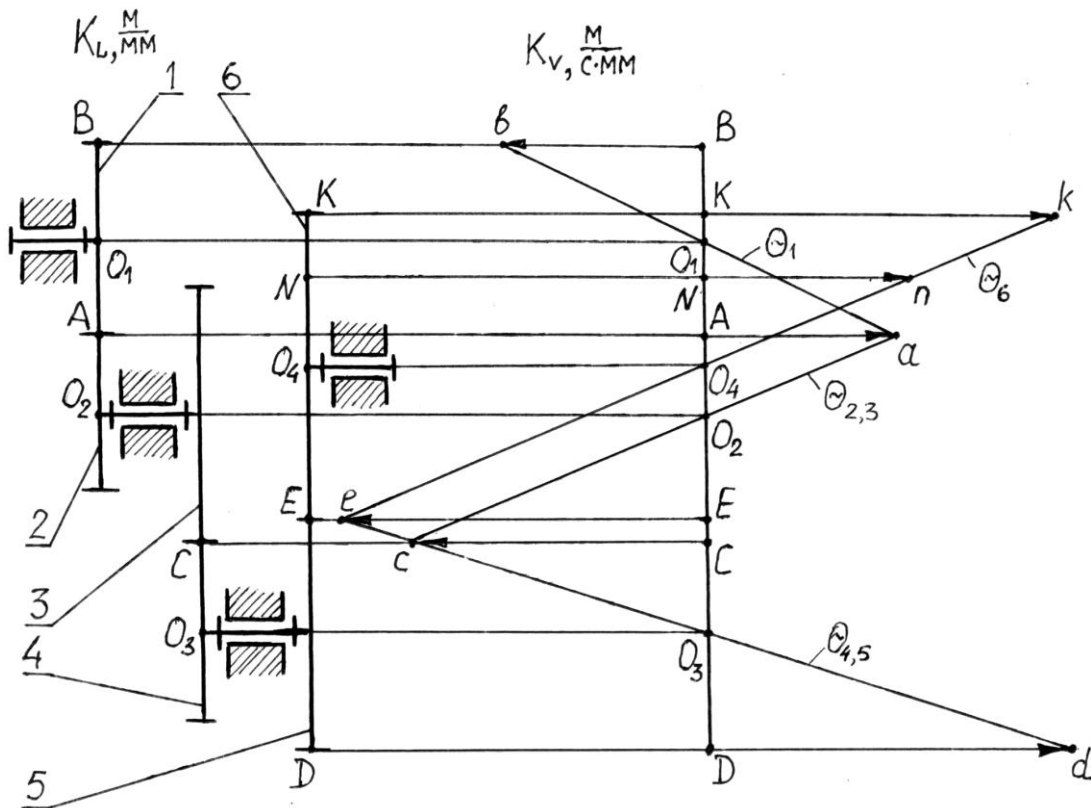


Рисунок 6 - К определению линейных скоростей точек многозвенного зубчатого механизма

Кроме многозвенных зубчатых механизмов с неподвижными осями вращения колёс имеются механизмы, в которых оси вращения некоторых колёс перемещаются относительно стойки. Такие зубчатые механизмы называются **планетарными**, если их степень подвижности (степень свободы) равна единице ( $W=1$ ) и - **дифференциальными**, если степень подвижности - двум ( $W=2$ ) и более. На рисунке 7 представлена кинематическая схема планетарного механизма. В нём ось вращения сдвоенного колеса 2-3 подвижна. Такое колесо называется **сателлитом**. Звено, приводящее в движение ось вращения сателлита, носит название **водила** и обозначается на

схемах буквой Н (от немецкого слова *Hebel* - рычаг). Зубчатые колёса, с которыми зацепляются сателлиты, именуются **центральными**. Необходимо принять во внимание, что в механизме, как правило, имеется несколько симметрично установленных сателлитов, входящих в зацепление с одними и теми же центральными колёсами. Это делается для уравнивания водила, разгрузки зубчатых колёс, снижения усилий в их подшипниковых опорах и уменьшения габаритов механизма. При определении степени подвижности механизма надо учитывать только один сателлит, остальные составляют избыточные связи.

Передаточное отношение угловых скоростей зубчатых колёс в планетарном механизме находится по формуле:

$$i_{kH}^{(j)} = 1 - i_{kj}^{(H)}, \quad (3)$$

где  $i_{kH}^{(j)}$  - передаточное отношение от  $k$ -го колеса к водилу Н при неподвижном  $j$ -м колесе,  $i_{kj}^{(H)}$  - передаточное отношение от  $k$ -го колеса к  $j$ -му при остановленном водиле Н (для обращённого механизма, у которого оси вращения всех зубчатых колёс неподвижны).

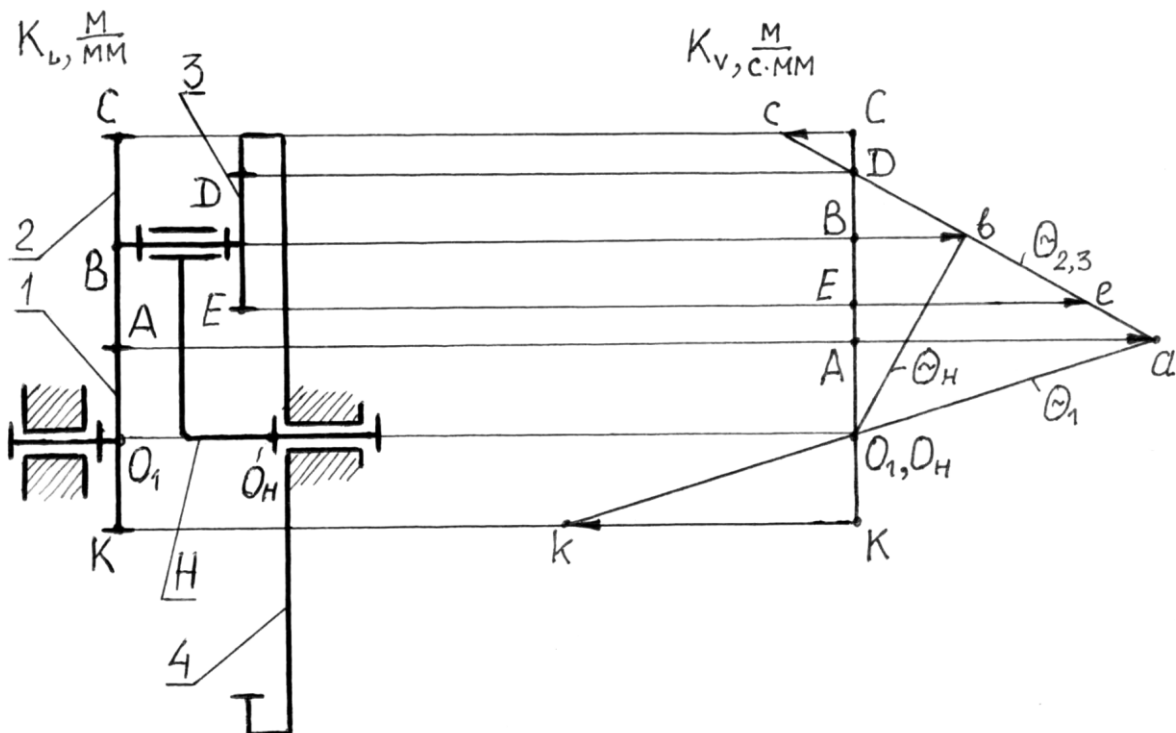


Рисунок 7 - Кинематическая схема и план скоростей планетарного механизма.

Например, для планетарного механизма на рисунке 7 при входном звене - колесе 1 по формуле (3) получим:

$$i_{1H}^{(4)} = 1 - i_{14}^{(H)} = 1 - i_{12}^{(H)} \cdot i_{34}^{(H)} = 1 - \left(-\frac{Z_2}{Z_1}\right) \left(\frac{Z_4}{Z_3}\right) = 1 + \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3}.$$

С учётом формулы Виллиса для обращённого механизма

$$i_{kj}^{(H)} = \frac{\omega_k - \omega_H}{\omega_j - \omega_H} = \frac{\varphi_k - \varphi_H}{\varphi_j - \varphi_H}, \quad (4)$$

для определения угловой скорости и угла поворота j-го зубчатого колеса в зависимости от угловой скорости и угла поворота k-го колеса имеем:

$$\omega_j = \frac{\omega_k}{i_{kj}^{(H)}} + \left(1 - \frac{1}{i_{kj}^{(H)}}\right) \omega_H, \quad (5)$$

$$\varphi_j = \frac{\varphi_k}{i_{kj}^{(H)}} + \left(1 - \frac{1}{i_{kj}^{(H)}}\right) \varphi_H, \quad (6)$$

где  $\omega_j$ ,  $\omega_k$ ,  $\omega_H$  - угловые скорости зубчатых колёс j, k и водила H,  $\varphi_j$ ,  $\varphi_k$ ,  $\varphi_H$  - углы поворота тех же звеньев.

Дифференциальный зубчатый механизм можно получить из планетарного, сделав подвижными все зубчатые колёса. Например, если в планетарном механизме, представленном на рисунке 7, освободить колесо 4 (сделать его подвижным), то получится дифференциальный механизм (смотри рисунок 8).

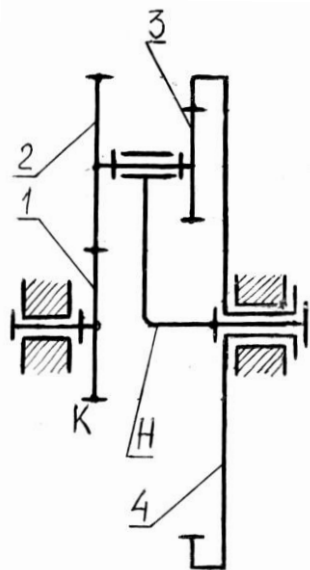


Рисунок 8 - Дифференциальный зубчатый механизм

Дифференциальный механизм осуществляет сложение угловых скоростей от двух входных звеньев (например, движения входных звеньев 1 и 4 складываются в движение выходного звена Н или входных 3 и Н в движение звена 1 и т. д.) или разложение скорости, передаваемой от одного входного звена, на два выходных. Для дифференциального механизма также будут справедливы формулы (4), (5), (6).

### Порядок проведения работы

1. Ознакомиться с содержанием работы и порядком её выполнения.
2. Для каждого из выданных преподавателем многозвенных зубчатых механизмов начертить в произвольном масштабе кинематическую схему, определить его структуру и подсчитать степень подвижности (степень свободы) по структурной формуле Чебышева:

$$W = 3(n - 1) - 2p_n - p_r, \quad (7)$$

где  $W$  - степень подвижности механизма,  $n$  - количество звеньев,  $p_n$  - количество низших кинематических пар,  $p_r$  - количество высших кинематических пар.

3. Подсчитать число зубьев ( $z_k$ ) каждого зубчатого колеса в механизме, записать их в таблицу и определить передаточное отношение каждой ступени, а затем всего механизма, используя формулы (1) и (3).

4. По градуированным дискам, прикреплённым к зубчатым колёсам, измерить их угловые перемещения ( $\varphi_k^3$ ) в зависимости от угла поворота ( $\varphi_1$ ), записать в таблицу. Подсчитать передаточное отношение ступеней и механизма ( $i^*$ ).

5. Проверить передаточное отношение каждой ступени, а также механизма с помощью тахометра и записать в таблицу 2.

6. При кинематическом анализе планетарного механизма необходимо также выявить знак передаточного отношения, характеризующий относительное вращение его входного и выходного звеньев.

7. При проверке передаточного отношения планетарного механизма с



5. Заполненная таблица 2.

Таблица 2 - Результаты измерения частоты вращения колес

$n_1$	$n_2$	$n_k$	$i_{12}$	$i_{34}$	$i_{1k}$

6. Определение линейных скоростей точек зубчатых колёс двумя способами (аналитическим и экспериментальным).

7. Подсчёт относительных погрешностей (по формуле 10).

8. Если задан второй зубчатый механизм, то повторить для него пункты 2-7.

9. Выводы по работе.

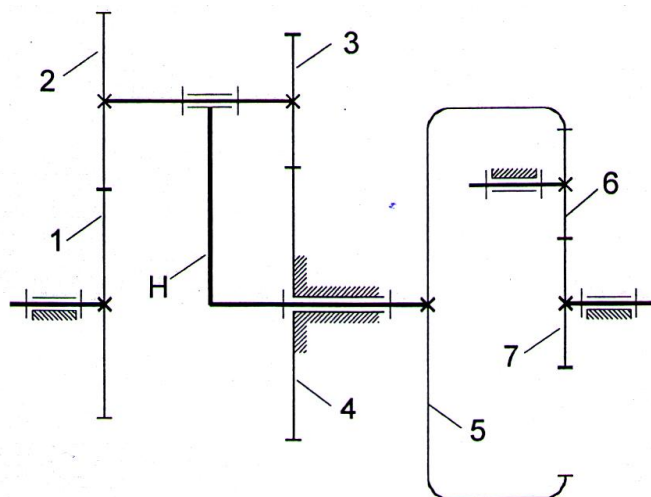
### Вопросы для самоконтроля

1. Какой механизм называется зубчатым?
2. На какие группы по расположению осей вращения зубчатых колёс делятся зубчатые механизмы?
3. Какой зубчатый механизм называется плоским, а какой - пространственным?
4. Что такое ступень в зубчатом механизме?
5. Как определяется количество ступеней в многозвенном зубчатом механизме?
6. Как называется зубчатая передача с параллельными осями вращения колёс?
7. Что называется передаточным отношением зубчатой передачи?
8. Как подсчитать передаточное отношение многозвенного зубчатого механизма с неподвижными осями вращения колёс?
9. Какой зубчатый механизм называется планетарным?
10. Что такое сателлит?
11. Что называется водилом?
12. Что называется обращённым механизмом?
13. Как определяется передаточное отношение планетарного механизма?
14. Какой зубчатый механизм называется дифференциальным?

## Приложения

**Пример расчета передаточного отношения  
многоступенчатого зубчатого механизма.**

Рассмотрим механизм, изображенный на рисунке

**Условие задачи:**

Для механизма известны числа зубьев зубчатых колес:

$$Z_1 = 50; Z_2 = 20; Z_3 = 21;$$

$$Z_7 = 16; Z_6 = 24.$$

Зубчатые колеса 5 и 7 - соосные. Модули зубчатых колес 1, 2, 3, 4 равны между собой.

**ОПРЕДЕЛИТЬ:** передаточное отношение механизма  $i_{71}$ .

**РЕШЕНИЕ.**

Данный зубчатый механизм - многоступенчатый, поэтому начинаем с разделения механизма на отдельные ступени.

Механизм разделяется на:

- планетарную ступень, состоящую из водила H, сателлита (блок зуб-

чатых колес 2 - 3) и центральных зубчатых колес 1 и 4;

- внутренняя цилиндрическая зубчатая передача, состоящая из зубчатых колес 5 и 6;
- внешняя цилиндрическая зубчатая передача, состоящая из зубчатых колес 6 и 7.

Запишем передаточное отношение  $i_{71}$  в виде произведения передаточных отношений этих ступеней:

$$i_{71} = i_{76} \cdot i_{65} \cdot i_{H1}^{(4)}. \quad (27)$$

Выразим передаточные отношения отдельных ступеней механизма через числа зубьев входящих в них колес. Для простых зубчатых передач - это отношение чисел зубьев

$$i_{76} = -Z_6 / Z_7; \quad i_{65} = Z_5 / Z_6. \quad (28)$$

Передаточное отношение планетарной ступени  $i_{H1}^{(4)}$  предварительно выражаем через передаточное отношение обращенного механизма, в котором водило - неподвижное звено:

$$i_{H1}^{(4)} = \frac{1}{i_{21}^{(H)}} = -\frac{1}{i_{21}^{(H)}}$$

Теперь выразим передаточное отношение  $i_{21}^{(H)}$  через числа зубьев:

$$i_{21}^{(H)} = i_{12}^{(H)} \cdot i_{24}^{(H)} = (-Z_2 / Z_1) \cdot (-Z_4 / Z_3) = Z_2 \cdot Z_4 / Z_1 \cdot Z_3 \quad (30)$$

Числа зубьев зубчатых колес  $Z_5$  и  $Z_4$  найдем из условий соосности. Колеса 5 и 7 соосны по условию задачи, а колеса 1 и 4 соосны тоже, так как входят в планетарную ступень механизма.

Условие соосности для колес 1 и 4:

$$\frac{m_{12}}{2} (Z_1 + Z_2) = \frac{m_{34}}{2} (Z_3 + Z_4),$$

Модули зубчатых колес 1, 2, 3, 4 заданы одинаковыми, поэтому  $m_{12} = m_{34}$  и условие соосности упрощается:

$$Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4, \quad (31)$$

Условие соосности для колес 5 и 7:

$$\frac{m_{56}}{2} (Z_5 - Z_6) = \frac{m_{67}}{2} (Z_7 + Z_6).$$

Модули зубчатых колес 5, 6, 7 равны между собой, так как в оба

зубчатых зацепления входит колесо 5, поэтому  $m_{56} = m_{67}$  и условие соосности принимает вид:

$$Z_5 - Z_6 = Z_7 + Z_6. \quad (32)$$

Из условий соосности (31) и (32) находим:

$$Z_4 = Z_1 + Z_2 - Z_3 = 50 + 20 - 21 = 49.$$

$$Z_5 = Z_7 + 2 \cdot Z_6 = 16 + 2 \cdot 24 = 64$$

По уравнениям (27), (28), (29), (30) определяем:

$$i_{14}^{(H)} = (Z_2 \cdot Z_4) / (Z_1 \cdot Z_3) = (20 \cdot 49) / (50 \cdot 21) = 14 / 15 = 0,933333;$$

$$i_{H1}^{(4)} = \frac{1}{i_{14}^{(H)}} = \frac{1}{0,933333} = 15;$$

$$i_{76} \cdot i_{65} = i_{76} = (-Z_6 / Z_7) \cdot (Z_5 / Z_6) = -Z_5 / Z_7 = -64 / 16 = -4;$$

$$i_{71} = i_{76} \cdot i_{65} \cdot i_{H1}^{(4)} = -4 \cdot 15 = -60.$$

ОТВЕТ:  $i_{71} = -60.$

### Список литературы

1. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 2007.
2. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 2009.
3. Теория механизмов и механика машин / под ред. К.В.Фролова. – М.: Высшая школа, 2005. – 496с.
4. Коровин Ю.В. Теория механизмов и машин. Казань: Изд-во Фэн, 2003.
5. Горюх Э.А. Типовой лабораторный практикум по теории механизмов и машин. М.: Машиностроение, 2002.

