Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Казанский государственный аграрный университет

Кафедра физики и математики

МАТЕМАТИКА
Часть 3
«Теория вероятностей. Элементы математической статистики»

Учебно-методическое пособие

Казань, 2018

УДК 51 (07)
ББК 22.1Р

Печатается по решению Методического совета Казанского ГАУ
протокол № 1 от 01.10.2018

Авторы-составители: Зиннатуллина А.Н., Киселева Н.Г., ИбятовР.И., Газизов Е.Р.

Рецензенты: к.т.н., доцент Казанского ГАУ Шайхутдинов Р.Р.;
к.п.н., доцент КФУ Галиуллин Д.Х.

Математика. Часть 3. «Теория вероятностей. Элементы математической статистики»: учебно-методическое пособие / А.Н. Зиннатуллина, Н.Г. Киселева, Р.И. Ибятов, Е.Р. Газизов. – Казань: Изд-во Казанского ГАУ, 2018. – 80 с.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы во внеаудиторное время по дисциплине «Математика». Пособие способствует формированию общепрофессиональных компетенций у студентов, обучающихся по всем направлениям подготовки бакалавриата и специалитета Казанского ГАУ и соответствует требованиям ФГОС ВО. Оно содержит краткие теоретические сведения, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения и типовые тестовые задания для текущего контроля.

Учебно-методическое пособие обсуждено и рекомендовано к печати на заседании кафедры физики и математики Казанского ГАУ **протокол №8 от 11.04.2018г.**

Рассмотрено, одобрено и рекомендовано в печать на заседании Методической комиссии ИМ и ТС **протокол №1 от 20.09.2018**

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие по теме «Теория вероятностей. Элементы математической статистики» составлены в соответствии с программой по курсу высшей математики для студентов всех специальностей и направлений подготовки, изучающих дисциплину «Математика». Пособие является продолжением учебно-методического пособия «Математика. Часть 1» и учебно-методического пособия «Математика. Часть 2. Комплексные числа. Ряды. Дифференциальные уравнения». В первом пособии изложены следующие разделы высшей математики: элементы линейной и векторной алгебры, аналитическая геометрия на плоскости, введение в анализ, интегральное исчисление функций одной независимой переменной и функции нескольких переменных, а во втором – комплексные числа, числовые и степенные ряды, дифференциальные уравнения первого и высших порядков.

В структуру учебно-методического пособия входят методические рекомендации по работе с данным пособием, необходимый теоретический материал, содержащий основные определения, теоремы, разобранные типовые задания. После каждой темы приведены задания для выполнения во время практических (аудиторных) занятий и во внеаудиторное время самостоятельно. В конце пособия приведены типовые тестовые задания по изложенным выше разделам высшей математики для текущего контроля знаний студентов.

Материалы, изложенные в пособии, помогут студентам систематизировать и закрепить полученные теоретические знания, сформировать практические навыки, активизировать учебно-познавательную деятельность.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РАБОТЕ С УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИМ ПОСОБИЕМ

Прежде чем приступить к выполнению задач, представленных в данном учебно-методическом пособии, необходимо ознакомиться с рекомендациями по работе с ним.

Главное, при изучении математики – умение ***мыслить***, ***анализировать***, ***рассуждать***, и, конечно же, ***решать задачи***. Последовательно выполняя задания из предложенного пособия, студент освоит материал важных разделов математики, без знания которых невозможно стать хорошим специалистом в своей профессии.

До начала выполнения заданий рекомендуется внимательное изучение теоретического материала по данной теме из конспекта лекций или предложенного преподавателем учебника. Краткое содержание теории представлено и в данном пособии, которым также можно руководствоваться при решении задач.

Внимательное изучение темы требует неоднократного прочтения теоретического материала. При первом прочтении нужно ставить цель - ***понять***, а не запомнить. Обычно для достижения хорошего понимания материала одного прочтения недостаточно. К тому же часто приходится, полистав книгу или конспект лекций, вспомнить ранее изученный материал. Далее рекомендуется по памяти повторить формулировки основных определений, правил, теорем из изученной темы и разобраться в решении типовых заданий, представленных в данном пособии.

После успешного изучения теории, разбора типовых заданий можно приступать к самостоятельному решению задач по данной тематике. Если у студента в ходе выполнения задачи появятся вопросы или затруднения, он всегда может обратиться за консультацией к преподавателю. При решении задачи студент должен не только решить ее, но и грамотно оформить решение. Оформление задачи включает в себя: запись исходных данных, что требуется найти по условию задачи, решение задачи с указанием используемых формул и теорем, запись ответа.

В конце пособия представлены типовые тестовые задания для текущего контроля знаний студентов по дисциплине «Математика», обучающихся по всем направлениям подготовки бакалавриата и специалитета Казанского ГАУ.

ТЕМА 1 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей **–** математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений. Под случайными явлениями понимаются явления с неопределенным исходом, происходящие при неоднократном воспроизведении определенного комплекса условий.

1.1 Элементы комбинаторики

В теории вероятностей часто приходится иметь дело с задачами, в которых необходимо подсчитывать число возможных способов каких-либо действий. Задачи такого типа называются ***комбинаторными***, а раздел математики, занимающийся решениями таких задач, - ***комбинаторикой***.

Факториалом натурального числа n называется число

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n. \qquad (1.1)$$

По определению, *факториалом нуля* является единица:

$$0! = 1.$$

Рассмотрим некоторое множество S, состоящее из n *различных* элементов. Пусть $1 \le k \le n$. Назовём *множество*, состоящее из k элементов, *упорядоченным*, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие число от 1 до k, причём различным элементам множества соответствуют разные числа.

Размещениями из n элементов по k называются упорядоченные подмножества множества S, состоящие из k *различных* элементов и отличающиеся друг от друга составом элементов или порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по k равно

$$A_n^k = \frac{k!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1). \qquad (1.2)$$

Перестановками из n элементов называются размещения из n *элементов по* n, т. е. упорядоченные подмножества множества S, состоящие из всех элементов данного множества и отличающиеся друг от друга только порядком их расположения.

Число перестановок из n элементов равно

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n. \qquad (1.3)$$

Сочетаниями из n элементов по k называются подмножества множества S, состоящие из k *различных* элементов и отличающиеся друг от друга только составом элементов.

Число сочетаний из n элементов по k равно

$$C_n^k = \frac{k!}{(n-k)!\,k!}. \qquad (1.4)$$

Размещениями с повторениями из n элементов по k называются упорядоченные подмножества множества S, состоящие из k элементов, среди которых могут оказаться одинаковые, и отличающиеся друг от друга составом элементов или порядком их расположения.

Число размещений с повторениями из n элементов по k равно

$$\tilde{A}_n^k = n^k. \qquad (1.5)$$

Сочетаниями с повторениями из n элементов по k называются подмножества множества S, состоящие из k элементов, среди которых могут оказаться одинаковые, и отличающиеся друг от друга только составом элементов.

Число сочетаний с повторениями из n элементов по k равно

$$\tilde{C}_n^k = \tilde{N}_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}. \qquad (1.6)$$

Если во множестве S, состоящем из n элементов, есть только *m различных* элементов, то ***перестановками с повторениями из n элементов*** называются упорядоченные подмножества множества S, в которые первый элемент множества S входит n_1 раз, второй элемент — n_2 раз и так до m -го элемента, который входит n_m раз ($n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$).

Число перестановок с повторениями из n элементов, в которые первый элемент множества S входит n_1 раз, второй элемент — n_2 раз и так до m -го элемента, который входит n_m раз ($n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$), равно

$$\tilde{P}_n(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots ! n_m!}. \qquad (1.7)$$

1.2 Классическое и геометрическое определение вероятности

В практической деятельности часто приходится сталкиваться со случайными событиями, т.е. с событиями, которые могут произойти, но могут и не произойти по причинам, не поддающимся непосредственному учету в данных условиях. Изучение количественных закономерностей, которым подчиняются массовые однородные случайные события, и составляет предмет теории вероятностей.

При ***классическом определении*** вероятность события определяется равенством:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \qquad (1.8)$$

где m – число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события A; n – общее число произведенных испытаний.

Одним из недостатков классического определения вероятности, ограничивающим его применение, является то, что оно предполагает конечное число возможных исходов испытания.

Этот недостаток можно преодолеть, используя геометрическое определение вероятности, т.е. находя вероятность попадания точки в некоторую область (отрезок, часть плоскости и т.п.).

Геометрической вероятностью события A называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события A, к мере всей области, т.е.

$$P(A) = \frac{mesg}{mesG}. \qquad (1.9)$$

1.3 Теоремы сложения и умножения вероятностей. Вероятность появления хотя бы одного события

Два события называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление другого события в одном и том же опыте; в противном случае события называются ***совместными***.

Два события называются ***независимыми***, если вероятность появления одного из них не влияет на вероятность появления другого события, в противном случае события зависимы.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Теорема сложения вероятностей (для несовместных событий).

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \qquad (1.10)$$

Следствие 1. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Теорема сложения (***для совместных событий***).

Вероятность того, что наступит одно из совместных событий, равна сумме вероятностей этих событий, из которой вычтена вероятность общего наступления обоих событий, то есть произведение вероятностей.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (1.11)$$

Теорема умножения вероятностей (для независимых событий).

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (1.12)$$

Следствие. Вероятность произведения нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1A_2A_3...A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot ...\cdot P(A_n).$$

Теорема умножения (для зависимых событий).

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже произошло:

$$P(AB) = P(A)\cdot P_A(B). \qquad (1.13)$$

Следствие. Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условные вероятности других; при этом условная вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события произошли:

$$P(A_1A_2A_3...A_n) = P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\cdot ...\cdot P_{A_1A_2A_3...A_{n-1}}(A_n).$$

Теорема (вероятность появления хотя бы одного события).

Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, A_3,..., A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3,..., \overline{A}_n$: $P(A) = 1 - q_1q_2...q_n$.

Частный случай. Если события $A_1, A_2, A_3,..., A_n$, имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий $P(A) = 1 - q^n$.

1.4 Формула полной вероятности. Формула Бейеса

Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2,..., B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)\cdot P_{B_n}(A). \qquad (1.14)$$

Формула (1.14) называется ***формулой полной вероятности***.

Пусть событие A может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) $B_1, B_2,..., B_n$, которые образуют полную группу событий. Если событие A уже произошло, то условная вероятность любой гипотезы $B_i, i = \overline{1,n}$ может быть вычислена по формуле:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(A)},\ i = \overline{1,n} \qquad (1.15)$$

где $P(A)$ – формула полной вероятности.

Формулы (1.15) называются ***формулами Бейеса***.

Если производятся испытания, при которых вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события A*.

1.5 Формула Бернулли. Приближенные формулы в схеме Бернулли

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0<p<1$), событие наступит ровно k раз (безразлично в какой последовательности), равна:

$$P_n(k) = C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot p^k\cdot q^{n-k}, \qquad (1.16)$$

где $q=1-p$.

Формула (1.16) называется ***формулой Бернулли***.

Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит: а) менее k раз; б) более k раз; в) не менее k раз; г) не более k раз – находят соответственно по формулам:

$$P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(k-1);$$
$$P_n(k+1) + P_n(k+2) + ... + P_n(n);$$
$$P_n(k) + P_n(k+1) + ... + P_n(n);$$
$$P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(k).$$

Наиболее вероятное число успехов в n испытаниях Бернулли удовлетворяет неравенству:

$$np - q \le k_0 < np + p, \qquad (1.17)$$

причем:

а) если число $np - q$ – дробное, то существует одно наивероятнейшее число k_0;

б) если число $np - q$ – целое, то существует два наивероятнейших числа, а именно k_0. и $k_0 + 1$;

в) если число np – целое, то наивероятнейшее число $k_0 = np$.

Если число испытаний n велико, а вероятность p появления события в каждом испытании очень мала, то используют ***приближенную формулу Пуассона***:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}, \qquad (1.18)$$

где k – число появлений события в n независимых испытаниях, $\lambda = n\cdot p$ – среднее число появлений события в n испытаниях.

Локальная теорема Муавра – Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0 < p < 1$), событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше n):

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \tag{1.19}$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Значения функции $\varphi(x)$, соответствующие положительным значениям аргумента x, находят по таблицам. Для отрицательных значений аргумента пользуются теми же таблицами, так как функция $\varphi(x)$ четна, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$. При $x \geq 4$ можно считать, что $\varphi(x)=0$.

Интегральная теорема Муавра – Лапласа. Вероятность того, что в n испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0 < p < 1$), событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно равна

$$P(k_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'), \tag{1.20}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-(z^2/2)} dz$ – функция Лапласа, $x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Значения функции Лапласа для положительных значений x ($0<x<5$) приведены в таблице.

Для значений $x > 5$ полагают $\Phi(x) = 0{,}5$. Для отрицательных значений x используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетная:

$$\Phi(-x) = -\Phi(x).$$

1.6 Случайные величины

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперёд неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Случайные величины обычно обозначают последними заглавными буквами латинского алфавита: X, Y, Z, а их возможные значения – соответствующими строчными буквами: x, y, z. Если случайная величина X имеет три возможных значения, то они будут обозначены: x_1, x_2, x_3.

Случайные величины задают законами распределения. Законы распределения могут быть заданы тремя способами: табличным, графическим, аналитическим. Способ задания зависит от типа случайной величины.

Случайные величины делятся на дискретные (прерывные) и непрерывные.

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определёнными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

1.6.1 Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины

Для дискретной случайной величины закон распределения может быть задан в виде таблицы, аналитически (в виде формулы) и графически.

Каждое значение дискретной случайной величины имеет определенную вероятность появления. Пусть возможное значение x_1 наступает с вероятностью p_1, значение x_2 – с вероятностью p_2 и т.д.

Законом распределения вероятностей дискретной случайной величины X называется любое правило, позволяющее находить все вероятности вида $p_k = P(X = x_k)$.

Простейшей формой задания закона распределения дискретной случайной величины X является таблица, которая состоит из двух строк. В первой строке записываются все возможные значения случайной величины, а во второй – вероятности появления этих значений:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Здесь $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически. В прямоугольной системе координат строят точки $M_1(x_1, p_1)$, $M_2(x_2, p_2)$, …, $M_n(x_n, p_n)$ (x_i – возможные значения случайной величины X, p_i – соответствующие вероятности) и соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют ***многоугольником распределения*** (рис. 1) или ***полигоном распределения вероятностей***.

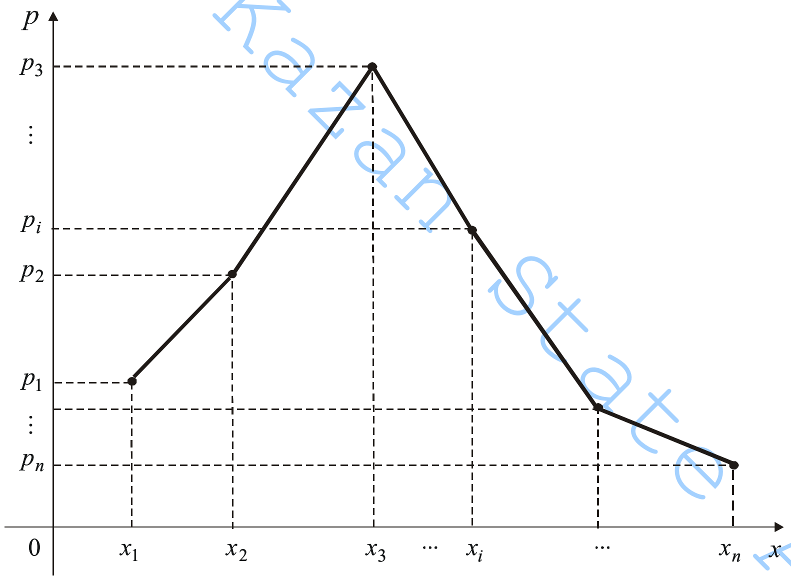


Рисунок 1.1 - Многоугольник распределения вероятностей

Многоугольник распределения, так же как и ряд распределения, полностью характеризует случайную величину.

1.6.2 Числовые характеристики дискретной случайной величины

Если дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей вида:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

то ***математическое ожидание*** $M(X)$ величины X вычисляется по формуле:

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n=\sum_{k=1}^{n}x_kp_k. \qquad (1.21)$$

Математическое ожидание $M(X)$ величины X служит характеристикой среднего значения случайной величины X.

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1^0. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$M(C)=C, \text{ где } C=const.$$

2^0. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX)=C\cdot M(X), \text{ где } C=const.$$

3^0. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

Это равенство распространяется на n случайных величин:

$$M(X_1+X_2+\ldots+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n).$$

4^0. Математическое ожидание разности двух случайных величин равно разности их математических ожиданий:

$$M(X-Y)=M(X)-M(Y).$$

5^0. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин:

$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y).$$

Это равенство распространяется на n независимых случайных величин:

$$M(X_1\cdot X_2\cdot\ldots\cdot X_n)=M(X_1)\cdot M(X_2)\cdot\ldots\cdot M(X_n).$$

Дисперсией дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2 \text{ или } D(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-M(X))^2\cdot p_k. \qquad (10.22)$$

Дисперсию удобно вычислять по формулам:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2 \text{ или } D(X)=\sum_{k=1}^{n}x_k^2\cdot p_k-\left(\sum_{k=1}^{n}x_kp_k\right)^2.$$

Дисперсия обладает следующими свойствами:

1^0. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(C)=0.$$

2^0. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат:

$$D(CX)=C^2D(X), \text{ где } C=const.$$

3^0. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Это равенство распространяется на n случайных величин:

$$D(X_1+X_2+\ldots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n).$$

4^0. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X–Y)=D(X)+D(Y).$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\,. \qquad (1.23)$$

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение характеризуют рассеяние возможных значений случайной величины вокруг её математического ожидания.

1.6.3 Функция распределения случайной величины

Непрерывную случайную величину нельзя охарактеризовать перечнем всех ее возможных значений и их вероятностей. Естественно, встает вопрос о том, нельзя ли охарактеризовать случайную величину иным способом, одинаково годным как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин.

Функция распределения является универсальной характеристикой случайной величины, т.к. полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения, то есть является одной из форм закона распределения.

Функцией распределения вероятностей называют функцию $F(x)$, определяемую формулой:

$$F(x)=P(X<x)\,. \qquad (1.24)$$

Свойства функции распределения:

1^0. Значения функции распределения принадлежат отрезку [0;1]:

$$0\le F(x)\le 1\,.$$

2^0. Функция распределения есть неубывающая функция:

$$F(x_2)\ge F(x_1)\,,\ \text{если}\ x_2>x_1\,.$$

Следствие 1. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в промежутке $(a;\,b)$, равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a<X<b)=F(b)–F(a).$$

Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, например x_1, равна нулю: $P(X=x_1)=0$.

3^0. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a;\,b)$, то

$$F(x)=0\ \text{при}\ x\le a\,;\ F(x)=1\ \text{при}\ x\ge b\,.$$

Следствие. Справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0\,,\quad \lim_{x\to+\infty}F(x)=1\,.$$

Функция распределения дискретной случайной величины является кусочно-постоянной функцией со скачками в точках, являющихся значениями случайной величины; величины скачков равны вероятностям, с которыми эти значения принимаются, т.е. если X –дискретная случайная величина, то $F(X)=\sum\limits_{x_k<x}p_k$.

1.6.4 Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Плотностью распределения непрерывной случайной величины X называют функцию $f(x)$ – первую производную от функции распределения $F(x)$:

$$f(x)=F'(x). \qquad (1.25)$$

Из этого определения следует, что функция распределения является первообразной для плотности распределения.

Заметим, что для описания распределения вероятностей дискретной случайной величины плотность распределения неприменима.

Свойства плотности распределения:

1^0. Плотность распределения – неотрицательная функция: $f(x)\ge 0$, т.к. $F(x)$ – неубывающая функция.

2^0. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(a;b)$, определяется равенством:

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx\,. \qquad (1.26)$$

Геометрически – это значит, что вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(a;b)$, равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, кривой распределения $f(x)$ и прямыми $x=a$, $x=b$.

3^0. Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1\,.$$

Геометрически – это означает, что вся площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox и кривой распределения, равна единице.

Частный случай. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = 1 .$$

1.6.5 Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(-\infty;+\infty)$, то числовые характеристики непрерывной случайной величины находят по формулам:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx \text{ , } D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x)dx \qquad (1.27)$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - [M(X)]^2 \text{ , } \sigma(X) = \sqrt{D(X)} . \qquad (1.28)$$

Если все возможные значения случайной величины X принадлежат конечному интервалу $(a;b)$, то пределы интегрирования в приведенных выше формулах заменяются соответственно $-\infty$ на a, $+\infty$ на b.

Все свойства математического ожидания и дисперсии для дискретных случайных величин переносятся и на случай непрерывных случайных величин.

1.7 Решение типового задания

Пример 1. Найти вероятность того, что получится слово «АНАНАС», если на отдельных карточках написаны три буквы «А», две буквы «Н» и одна буква «С».

Решение.

Событие A – получится слово «АНАНАС».

Общее число случаев равно числу перестановок с повторениями из шести элементов, т.е. $n = P_6(3;2;1) = \frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{3!\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 60$, из которых событию A благоприятствует одна комбинация $m = 1$. Искомая вероятность:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{60} .$$

Пример 2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7.

Решение.

Событие A – сумма выпавших очков равна 7.

При бросании одной игральной кости возможны 6 элементарных исходов (1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков), каждый из которых может сочетаться с шестью исходами на второй кости. Следовательно, общее число элементарных исходов равно $n = 6\cdot 6 = 36$.

Благоприятствующими являются следующие элементарные исходы: 1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1, т.е. их число равно $m = 6$.

Согласно классическому определению вероятности, получаем:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} .$$

Пример 3. В бригаде работают 6 мужчин и 4 женщины. Среди членов бригады разыгрываются 7 билетов в театр. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 3 женщины.

Решение.

Событие A – среди обладателей 7 билетов окажутся 3 женщины.

Общее число возможных элементарных исходов равно числу сочетаний из 10 элементов по 7 элементов, т.е.

$$n = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 120 .$$

Подсчитаем число благоприятствующих исходов. 3 женщин из 4 можно отобрать C_4^3 способами, оставшихся 4 человек из 6-ти можно отобрать C_6^4 способами. Следовательно,

$$m = C_4^3 \cdot C_6^4 = \frac{4!}{1!\cdot 3!}\cdot\frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{3!\cdot 4}{1\cdot 3!}\cdot\frac{4!\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 4!} = \frac{4}{1}\cdot\frac{5\cdot 6}{2} = 60 .$$

Искомая вероятность равна:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2} .$$

Пример 4. Буквы Т, Е, И, Я, Р, О написаны на отдельных карточках. Ребенок берет карточки в случайном порядке и прикладывает одну к другой: *а*) 3 карточки; *б*) все 6 карточек. Какова вероятность того, что получится слово: *а*) «ТОР»; *б*) «ТЕОРИЯ»?

Решение.

а) Событие A – получение слова «ТОР».

Различные комбинации трех букв из имеющихся шести представляют размещения, т.к. могут отличаться как составом входящих букв, так и порядком их следования, то есть общее число случаев $n = A_6^3$, из которых благоприятствуют событию A $m = 1$ случай.

Получаем:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{A_6^3}=\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}=\frac{1}{120}.$$

б) Событие B – получение слова «ТЕОРИЯ».

Различные комбинации шести букв из имеющихся шести представляют собой перестановки, т.к. отличаются только порядком следования букв; т.е. общее число случаев $n=P_n=6!$, из которых благоприятствуют событию B m=1 случай. Поэтому

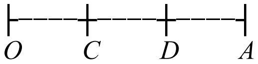
$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{1}{P_6}=\frac{1}{6!}=\frac{1}{720}.$$

__Пример 5__. На отрезок единичной длины наудачу поставлена точка. Определить вероятность того, что расстояние от точки до концов отрезка превосходит величину 1/3.

__Решение.__

Пусть событие A – расстояние от точки до концов отрезка превосходит величину 1/3.

Построим отрезок OA единичной длины и разобьем его точками C и D таким образом, чтобы $|OC|$=1/3 и $|DA|$=1/3.



Требование задачи будет выполнено, если точка попадет на отрезок CD длины 1/3. Тогда, согласно геометрической вероятности, искомая вероятность вычисляется по формуле:

$$P(A)=\frac{|CD|}{|OA|}=\frac{1}{3}.$$

__Пример 6.__ Вероятность того, что будет снег (событие A), равна 0,6, а того, что будет дождь (событие B), равна 0,5. Найти вероятность плохой погоды, если вероятность дождя со снегом (событие AB) равна 0,25.

__Решение__.

События A и B совместны, поэтому

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,6 + 0,45-0,25 = 0,8.$

__Пример 7.__ В денежно-вещевой лотерее на каждые 10 000 билетов разыгрывается 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему равна вероятность выигрыша, безразлично денежного или вещевого, для владельца одного лотерейного билета?

__Решение__.

Событие A – выигрыш одного билета;

событие A_1 – вещевой выигрыш;

событие A_2 – денежный выигрыш.

$$P(A_1)=\frac{150}{10000};\ P(A_2)=\frac{50}{10000}.$$

По теореме сложения имеем:

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{150}{10000}+\frac{50}{10000}=\frac{200}{10000}=0,2.$$

__Пример 8__. Бросают две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна 12?

__Решение.__

Событие A – сумма выпавших очков равна 12;

событие A_1 – 6 очков на первой кости;

событие A_2 – 6 очков на второй кости.

$$P(A_1)=\frac{1}{6};\quad P(A_2)=\frac{1}{6}.$$

По теореме умножения независимых событий:

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}.$$

__Пример 9.__ В урне 20 белых и 6 черных шаров. Из нее вынимают два шара. Найти вероятность того, что оба шара черные.

__Решение.__

Событие A – оба шара черные;

событие A_1 – 1-й шар черный;

событие A_2 – 2-й шар черный.

$$P(A_1)=\frac{6}{26};\quad P(A_2)=\frac{5}{25}.$$

По теореме умножения:

$$P(A)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)=\frac{6}{26}\cdot\frac{5}{25}=\frac{3}{65}.$$

__Пример 10.__ Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: p_1=0,8; p_2=0,7; p_3=0,9. Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие A) при одном залпе из всех орудий.

__Решение.__ Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события A_1 (попадание первого орудия), A_2 (попадание второго орудия) и A_3 (попадание третьего орудия) независимы в совокупности. Вероятности событий, противоположных событиям A_1, A_2 и A_3(т.е. вероятности промахов), соответственно равны: q_1=1-p_1=1-0,8=0,2; q_2=1-p_2=1-0,7=0,3; q_3=1-p_3=1-0,9=0,1.

Искомая вероятность $P(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot q_3=1-0,2\cdot 0,3\cdot 0,1=0,994.$

__Пример 11.__ В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлено отлично, 4 – хорошо, 2 – посредственно и 1 плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный – на 16, посредственно – на 10, плохо – на 5. Найти вероятность того, что вызванный наугад студент ответит на три произвольно заданных вопроса.

Решение.

Событие A – студент ответит на три произвольно заданных вопроса;
событие B_1 – студент подготовлен отлично;
событие B_2 – студент подготовлен хорошо;
событие B_3 – студент подготовлен посредственно;
событие B_4 – студент подготовлен плохо.

$$P(B_1)=0{,}3;\quad P(B_2)=0{,}4;\quad P(B_3)=0{,}2;\quad P(B_4)=0{,}1.$$

$$P_{B_1}(A)=1;\quad P_{B_2}(A)=0{,}8;\quad P_{B_3}(A)=0{,}5;\quad P_{B_4}(A)=0{,}25\,.$$

По формуле полной вероятности (10.14):

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)+P(B_4)\cdot P_{B_4}(A);$$

$$P(A)=0{,}3\cdot 1+0{,}4\cdot 0{,}8+0{,}2\cdot 0{,}5+0{,}1\cdot 0{,}25=0{,}745\,.$$

Пример 12. В торговую фирму поступили телевизоры от трех поставщиков в отношении 1:4:5. Практика показала, что телевизоры, поступающие от 1-го, 2-го и 3-го поставщиков, не потребуют ремонта в течение гарантийного срока соответственно в 98%, 88% и 92% случаев. Найти вероятность того, что поступивший в торговую фирму телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока.

Решение.

Событие A – телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока;
событие B_1 – телевизор поступил в торговую фирму от 1-го поставщика;
событие B_2 – телевизор поступил в торговую фирму от 2-го поставщика;
событие B_3 – телевизор поступил в торговую фирму от 3-го поставщика.

$$P(B_1)=\frac{1}{1+4+5}=0{,}1;\quad P(B_2)=\frac{4}{1+4+5}=0{,}4;\quad P(B_3)=\frac{5}{1+4+5}=0{,}5;$$

$$P_{B_1}(A)=0{,}98;\quad P_{B_2}(A)=0{,}88;\quad P_{B_3}(A)=0{,}92\,.$$

По формуле полной вероятности (10.14) получим:

$$P(A)=0{,}1\cdot 0{,}98+0{,}4\cdot 0{,}88+0{,}5\cdot 0{,}92=0{,}91.$$

Пример 13. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата в 5 раз больше производительности второго. I автомат производит в среднем 75 % деталей отличного качества, а II автомат – 87 %. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что деталь произведена II автоматом.

Решение.

Событие A – деталь отличного качества;
событие B_1 – деталь произведена первым автоматом;
событие B_2 – деталь произведена вторым автоматом.

$$P(B_1)=\frac{5}{6};\quad P(B_2)=\frac{1}{6};\quad P_{B_1}(A)=0{,}75;\quad P_{B_2}(A)=0{,}87\,.$$

Вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется отличного качества, по формуле полной вероятности (1.14) равна

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)=5/6\cdot 075+1/6\cdot 0{,}87=0{,}7704\,.$$

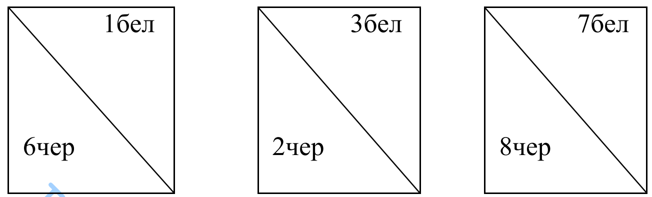
Искомая вероятность того, что взятая отличная деталь произведена вторым автоматом, по формуле Бейеса (1.15) равна

$$P_A(B_2)=\frac{P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}{P(A)}=\frac{1/6\cdot 0{,}87}{0{,}7704}=0{,}192\,.$$

Пример 14. Имеются три одинаковые урны: I урна содержит 1 белый и 6 черных шаров, II – 3 белых и 2 черных шаров, III – 7 белых и 8 черных шаров. Из наудачу выбранной урны вынут шар. Он оказался белым. Чему равна вероятность того, что шар вынут из I урны?

Решение.

Событие A – вынут белый шар;
событие B_1 – выбрана I урна;
событие B_2 – выбрана II урна;
событие B_3 – выбрана III урна.



$$P(B_1)=\frac{1}{3};\quad P(B_2)=\frac{1}{3};\quad P(B_3)=\frac{1}{3};$$

$$P_{B_1}(A)=\frac{1}{7};\quad P_{B_2}(A)=\frac{3}{5};\quad P_{B_3}(A)=\frac{7}{15}\,.$$

По формуле полной вероятности (10.14):

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{15}=\frac{127}{315}\,.$$

Искомая вероятность по формуле (1.15) равна:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{1/3\cdot 1/7}{127/315}=\frac{15}{127}.$$

Пример 15. Вероятность того, что в данный день торговая база уложится в норму расходов на транспорт, равна 3/4. Какова вероятность того, что лишь в один из дней рабочей недели (6 дней) база уложится в норму?

Решение.

A – база уложится в норму в один день из шести.

$n = 6$, $k = 1$, $p = 3/4$, $q = 1/4$.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна:

$$P_6(1)=C_6^1\cdot p^1\cdot q^5=\frac{6!}{5!\cdot 1!}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{18}{4096}=\frac{9}{2048}.$$

Пример 16. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найти вероятность появления не более 2-х бракованных деталей среди 5 отобранных.

Решение.

A – появление не более 2-х бракованных деталей среди 5 отобранных.

Вероятность изготовления бракованной детали $p=1-0{,}8=0{,}2$.

Искомая вероятность равна:

$$P(A)=P_5(0)+P_5(1)+P_5(2).$$

Вычислим вероятности:

$$P_5(0)=C_5^0\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^5=0{,}32768;$$

$$P_5(1)=C_5^1\cdot 0{,}2^1\cdot 0{,}8^4=0{,}4096;$$

$$P_5(2)=C_5^2\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^3=0{,}2048.$$

Получаем:

$$P(A)=P_5(0)+P_5(1)+P_5(2)=0{,}32768+0{,}4096+0{,}2048=0{,}94208.$$

Пример 17. Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,9. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.

Решение.

По условию, n=15, p=0,9, q=0,1. Найдем наивероятнейшее число k_0. из неравенства

$$np-q\le k_0<np+p.$$

Подставив данные задачи, получим

$$15\cdot 0{,}9-0{,}1\le k_0<15\cdot 0{,}9+0{,}9 \text{ или } 13{,}5\le k_0<14{,}4.$$

Так как $np-q$ – дробное, то существует одно наивероятнейшее число k_0. Поскольку между числами 13,5 и 14,4 заключено одно целое число, а именно 14, то искомое наивероятнейшее число k_0.= 14.

Пример 18. На контрольно-семенную станцию поступило 200 семян сосны для определения всхожести. Вероятность того, что семя не взойдет, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 семян 6 не взойдёт.

Решение.

Так как число n велико, а вероятность p мала, то применим формулу Пуассона:

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}, \text{ где } \lambda=n\cdot p.$$

По условию $n=200,\ p=0{,}01,\ k=6$.

Вычислим $\lambda=200\cdot 0{,}01=2$.

Искомая вероятность равна:

$$P_{200}(6)=\frac{2^6\cdot e^{-2}}{6!}=\frac{64}{720e^2}=0{,}012.$$

Пример 19. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что при 5400 выстрелах цель будет поражена 3240 раз.

Решение.

По условию задачи n=5400, p=0,6, q=0,4, k=3240. Воспользуемся локальной теоремой Муавра–Лапласа (1.19):

$$P_{5400}(3240)=\frac{1}{\sqrt{5400\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}}\cdot\varphi(x).$$

Вычислим $x=\dfrac{3240-5400\cdot 0{,}6}{\sqrt{5400\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}}=0$.

По таблице значений функции $\varphi(x)$ находим: $\varphi(0)=0{,}3989$, тогда искомая вероятность равна:

$$P_{5400}(3240)=\frac{1}{36}\cdot 0{,}3989=0{,}011.$$

Пример 20. В некоторой местности из каждых 100 семей 80 имеют холодильники. Найти вероятность того, что от 300 до 360 (включительно) семей из 400 имеют холодильники.

Решение.

Вероятность того, что семья имеет холодильник, равна p=80/100=0,8; $\Rightarrow q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ – вероятность того, что семья не имеет холодильник.

По условию $n = 400, k_1 = 300, k_2 = 360$.

Воспользуемся интегральной теоремой Муавра – Лапласа (1.20):

$$P_{400}(300{,}360) = \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Вычислим $x' = \dfrac{300 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -2{,}5$; $x'' = \dfrac{360 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 5$.

Учитывая, что функция Лапласа нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, по таблице значений функции $\Phi(x)$ находим: $\Phi(2{,}5) = 0{,}4938$; $\Phi(5) = 0{,}5$.

Тогда искомая вероятность равна:

$$P_{400}(300{,}360) = 0{,}4938 + 0{,}5 = 0{,}9938.$$

Пример 21. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, если известен ее закон распределения:

X	–1	4	6	7
P	0,3	0,2	0,4	0,1

Решение.

3. Математическое ожидание $M(X)$ вычисляем по формуле:

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = -1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}4 + 7 \cdot 0{,}1 = 3{,}6.$$

2. Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - [M(X)]^2 = (-1)^2 \cdot 0{,}3 + 4^2 \cdot 0{,}2 + 6^2 \cdot 0{,}4 + 7^2 \cdot 0{,}1 - 3{,}6^2 =$$
9,84.

3. Среднее квадратическое отклонение вычисляем по формуле:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{9{,}84} \approx 3{,}14.$$

Пример 22. Дискретная случайная величина задана законом распределения вероятностей:

X	4	6	9
P	0,3	0,5	0,2

Найти функцию распределения вероятностей и построить ее график.

Решение.

По формуле

$$F(X) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k)$$

получаем:

если $x \le 4$, то $F(x) = P(X < x) = P(X < 4) = 0$;

если $4 < x \le 6$, то $F(x) = P(X < 6) = P(X = 4) = 0{,}3$;

если $6 < x \le 9$, то $F(x) = P(X < 9) = 0{,}3 + 0{,}5 = 0{,}8$;

если $x > 9$, то $F(x) = P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 9) = 1$.

Искомая функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 4, \\ 0{,}3, & \text{при } 4 < x \le 6, \\ 0{,}8, & \text{при } 6 < x \le 9, \\ 1, & \text{при } x > 9. \end{cases}$$

Построим график этой функции:

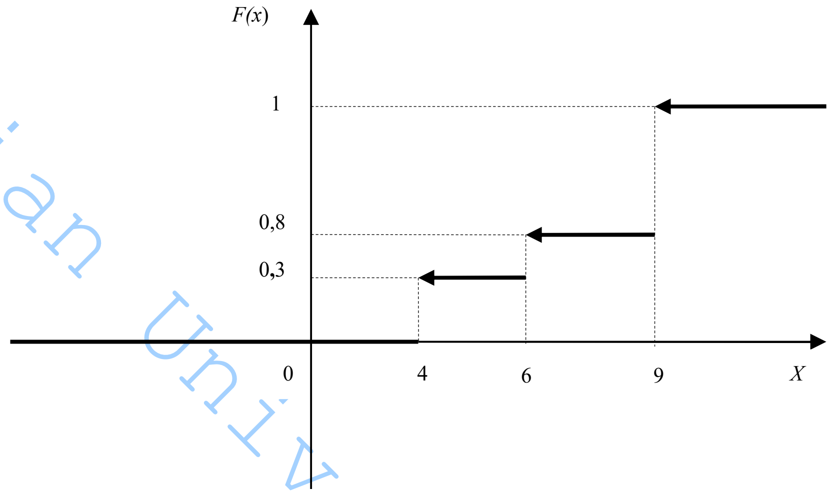


Рисунок 1.2 – График функции распределения вероятностей

Пример 23. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения вероятностей $F(x)$. Требуется: а) найти плотность распределения вероятностей $f(x)$; б) найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение; в) построить графики функции распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$.

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{169}, \text{при } 0<x\le 13,\\ 1, \text{при } x>13.\end{cases}$$

Решение.

1. Найдем плотность распределения вероятностей:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{2x}{169}, \text{при } 0<x\le 13,\\ 0, \text{при } x>13.\end{cases}$$

2. Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int_0^{13} x\cdot f(x)dx=\int_0^{13} x\cdot\frac{2x}{169}dx=\frac{2}{169}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{13}=\frac{26}{3}.$$

3. Вычислим дисперсию:

$$D(X)=\int_0^{13} x^2\cdot f(x)dx-[M(X)]^2=\int_0^{13} x^2\cdot\frac{2x}{169}dx-\left(\frac{26}{3}\right)^2=$$

$$=\frac{2}{169}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^{13}-\left(\frac{26}{3}\right)^2=\frac{169}{18}\approx 9{,}39.$$

4. Найдем среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{9{,}39}\approx 3{,}06.$$

5. Построим графики функции распределения $F(x)$ и плотности $f(x)$.

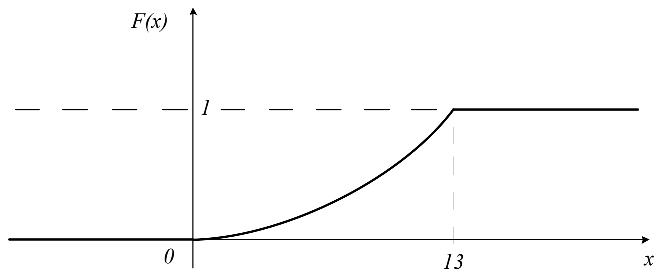


Рисунок 1.3 – График функции распределения $F(x)$

График плотности распределения $f(x)$:

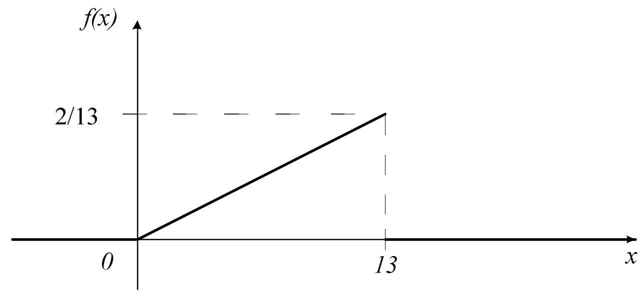


Рисунок 1.4 – График плотности распределения $f(x)$

Задачи для самостоятельного решения №571-595:

571. Найдите вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 1 до 27 является делителем числа 60.

572. Из полного набора 28 костей домино извлечена кость. Какова вероятность того, что сумма очков на взятой кости равна 5.

573. Из 35 экзаменационных билетов наудачу извлекается один. Какова вероятность того, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

574. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков кратна 6.

575. Из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 выбираются два числа. Найти вероятность того, что их сумма четная.

576. Длины пяти отрезков равны соответственно 1, 3, 4, 5, 6 единицам. Найдите вероятность того, что из трех случайно выбранных из них отрезков можно построить треугольник.

577. В группе 16 студенток и 6 студентов. Найти вероятность того, что среди четырех наугад выбранных учащихся окажется одна студентка и три студента.

578. На четырех карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4. Карточки перевернули и перемешали. Наугад открыли последовательно три карточки и положили в ряд. Какова вероятность, что в результате получится число 312 или 321.

579. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона содержит только одну цифру «7».

580. Монету бросают три раза. Найти вероятность того, что выпадет хотя бы две решки.

581. На пяти одинаковых карточках написаны буквы Л, М, О, О, Т. Какова вероятность того, что извлекая карточки по одной наугад, получим в порядке их выхода слово «МОЛОТ».

582. В колоде 36 карт. Вынимаются три карты без возвращения. Найти вероятность того, что будут вынуты бубновая, пиковая карта и шестёрка треф.

583. В группе из 5 юношей и 3 девушек по жребию разыгрываются два билета в кино. Какова вероятность того, что билеты достанутся юноше и девушке.

584. Длины отрезков равны 2, 6, 8, 11, 12 единицам. Найдите вероятность того, что из трех случайно выбранных из них отрезков можно построить треугольник.

585. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков не менее 6.

586. В корзине 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Вынули два шара. Какова вероятность, что оба шара белые.

587. Из полного набора 28 костей домино извлечена кость. Какова вероятность того, что вторую наудачу извлеченную кость можно приставить к первой, если первая кость оказалась дублем.

588. На девяти карточках написаны цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Вынимаются наугад две карточки. Найти вероятность того, что их сумма нечетная.

589. На пяти одинаковых карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5. Наугад выбираются две карточки и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что сумма цифр более шести.

590. Из 7 карточек разрезной азбуки составлено слово КОЛОКОЛ. Эти карточки рассыпали и затем собрали в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово КОЛОКОЛ.

591. Найти вероятность того, что случайно взятое двузначное число делится на 7.

592. Из колоды в 36 карт извлекаются три карты. Найти вероятность того, что все они пиковой масти.

593. Брошены две игральные кости. Найти вероятность, что произведение выпавших очков делится на 3.

594. В ящике 10 шаров: 7 черных и 3 белых. Из ящика вынимают 5 шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется 3 черных и 2 белых шара.

595. В коробке лежат десять карточек, на которых написаны цифры от 0 до 9. Вынимают две карточки. Найти вероятность, что сумма цифр меньше десяти.

Задачи для самостоятельного решения №596-620:

596. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает: а) только один из стрелков; б) хотя бы один из стрелков.

597. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.

598. Из 20 сбербанков 10 расположены за чертой города. Для аудиторской проверки случайно выбраны 5 сбербанков. Какова вероятность того, что хотя бы 2 из них окажутся в черте города.

599. Три студента сдают экзамен. Вероятность того, что отдельный студент сдаст экзамен на «отлично» равна для первого студента 0,7, для второго – 0,6, для третьего – 0,2. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан на «отлично»: а) только одним из студентов; б) двумя студентами; в) хотя бы одним?

600. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сначала выбирается одна, а затем из оставшихся четырех – вторая цифра. Найти вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра: а) во второй раз; б) в оба раза.

601. В ящике 5 белых, 6 черных шаров. Какова вероятность того, что из двух вынутых шаров один белый, а другой – черный? Вынутый шар в ящик не возвращается.

602. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

603. Три друга сдают вступительные экзамены. Вероятность того, что первый поступит в институт, равна 0,6, второй – 0,5, третий – 0,45. Какова вероятность того, что в институт поступит хотя бы один из них.

604. На сессии студенту предстоит сдать экзамен по трем предметам. Студент освоил 90% вопросов по первому предмету, 95% по второму и 50% по третьему. Какова вероятность того, что студент успешно сдаст: а) все экзамены; б) хотя бы два экзамена.

605. Девушка назначила свидание двум юношам одновременно в одном месте. Вероятность того, что первый юноша придет на свидание, равна 0,4, а второй – 0,5. Найти вероятность того, что хотя бы один юноша придет на свидание.

606. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее чем в двух ящиках.

607. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей?

608. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках, равна соответственно 0,6, 0,7 и 0,8. Найти вероятность того, что эта формула содержится не менее, чем в двух справочниках.

609. В первой корзине 7 белых и 3 черных шара, во второй корзине – 5 белых и 5 черных, в третьей – 4 белых и 6 черных. С каждой корзины наугад выбирают по одному шару. Найти вероятность того, что среди выбранных шаров будет: а) только один белый; б) два белых шара; в) три белых шара; г) хотя бы один белый шар.

610. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе - 0,9, в третье - 0,8. Найти вероятность следующих событий: а) только одно отделение получит газеты вовремя; б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

611. В цехе работают три станка. Вероятность отказа в течение смены для станков соответственно равна 0,1, 0,2 и 0,15. Найти вероятность того, что в течение смены безотказно проработают два станка.

612. Вероятность того, что при одном измерении допущена ошибка, равна 0,4. Производят 3 независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них допущена ошибка.

613. В магазин вошли три покупателя. Вероятность того, что каждый что-нибудь купит, равна 0,3. Найти вероятность того, что: а) два из них совершат покупки; б) все три совершат покупки; в) ни один не совершит покупки.

614. Вероятность получить высокие дивиденды по акциям на первом предприятии – 0,2, на втором – 0,35, на третьем – 0,15. Определить вероятность того, что акционер, имеющий акции всех предприятий, получит высокие дивиденды: а) на всех предприятиях; б) только на одном предприятии; в) хотя бы на одном предприятии.

615. На стадионе установлены три экрана. Вероятности того, что в данный момент горят экраны, равны соответственно 0.9; 0.8 и 0.7. Найти

вероятности событий: а) в данный момент горят два экрана; б) в данный момент горит не более одного экрана; в) в данный момент горят 3 экрана.

616. На сборку поступают детали с трех станков. Первый станок дает 20% деталей, второй - 30%, а третий - 50%. Найти вероятности того, что из трех взятых наугад деталей: а) все будут выпущены разными станками; б) все будут выпущены третьим станком; в) две детали выпущены вторым станком.

617. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; для второго экзамена эта вероятность равна 0,7; для третьего - 0,6. Найти вероятности событий: A – «студент сдаст два экзамена»; B – «студент сдаст хотя бы два экзамена»; C – «студент сдаст не более двух экзаменов».

618. Для сообщения об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора – автомата. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна 0,95; второй – 0,9. Найти вероятность того, что при аварии поступит сигнал: а) хотя бы от одного сигнализатора; б) только от одного сигнализатора.

619. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый, второй вопросы, равна по 0,9; на третий – 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить: а) на все вопросы; б) по крайней мере, на два вопроса билета.

620. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 1/7. Какова вероятность того, что обладатель пяти билетов лотереи выиграет: а) по всем пяти билетам; б) ни по одному; в) хотя бы по одному билету.

Задачи для самостоятельного решения №621-645:

621. Стрелковое отделение получило десять винтовок, из которых восемь пристрелянных, две нет. Вероятность попадания в цель из пристрелянной винтовки – 0,6, а из не пристрелянной – 0,4. Найти вероятность, что стрелок из наудачу взятой винтовки попадет в цель при одном выстреле.

622. Имеются 3 урны со следующим составом: в первой урне 5 белых и 5 черных шаров, во второй урне – 6 белых и 8 черных шаров, а в третьей урне – 3 белых и 10 черных шаров. Из урны, выбранной наугад, извлечен белый шар. Найти вероятность того, что извлечение производилось из второй урны.

623. Три завода выпускают электролампы. Первый завод выпускает 45% всей продукции, второй – 40% и третий – 15%. 70% электроламп первого завода стандартны, 80% - со второго и 81% - с третьего. Найти вероятность того, что купленная в магазине электролампа будет стандартной.

624. Курс доллара повышается в течение квартала с вероятностью 0,9 и понижается с вероятностью 0,1. При повышении курса доллара фирма рассчитывает получить прибыль с вероятностью 0,85, при понижении – с вероятностью 0,5. Найти вероятность того, что фирма получит прибыль.

625. Бросается монета, и если она падает так, что сверху оказывается герб, вынимаем шар из урны I; в противном случае – из урны II. Урна I содержит 3 красных и 5 белых шара. Урна II содержит 1 красный и 7 белых шаров. Какова вероятность того, что вынутый шар красный?

626. В данный район изделия поставляются тремя фирмами в отношении 3:4:6. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 95%, второй – 80%, третьей – 75%. Приобретенное изделие оказалось стандартным. Какова вероятность того, что оно изготовлено второй фирмой?

627. В двух ящиках имеются радиолампы. В первом ящике содержится 12 ламп, из них 2 нестандартных; во втором 10 ламп, из них 1 нестандартная. Из первого ящика наудачу взята лампа и переложена во второй. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная из второго ящика лампа будет нестандартной.

628. В данный район изделия поставляются тремя фирмами в соотношении 5:8:7. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90%, второй – 85%, третьей – 75%. Найти вероятность того, что приобретенное изделие окажется нестандартным.

629. При передаче сообщения сигналами «точка» и «тире» эти сигналы встречаются в отношении 5:3. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений «точка» и 1/3 сообщений «тире». Найти вероятность того, что произвольный из принятых сигналов не искажен.

630. В первой урне: 5 белых и 10 черных шаров, во второй урне: 3 белых и 7 черных шаров. Из второй урны в первую переложили один шар, а затем из первой урны вынули наугад один шар. Определить вероятность того, что вынутый шар – белый.

631. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложили 2 шара в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Вычислить вероятность вынуть белый шар из второй урны.

632. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность I автомата вдвое больше производительности II –го. I автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а II-й – 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена II автоматом.

633. Среди проживающих в общежитии 80% составляют студенты и 20% сотрудники. Через проходную в общежитие проходят без пропуска 15% сотрудников и 10% студентов. Через проходную общежития кто-то прошел без пропуска. Какова вероятность, что это был сотрудник?

634. На занятии по теории вероятностей присутствовало из I группы 75%, а из II группы – 90% студентов. Ежедневно пропускают занятия из I группы – 5%, из II группы – 1% (без причины). При проверке в какой-то группе не оказалось студента. Какова вероятность того, что это был студент I группы?

635. Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, а для второго – 0,3. В мишени оказалась одна пробоина. Найти вероятность того, что она принадлежит второму стрелку.

636. Имеются три урны с шарами: в первой – 4 белых и 6 красных, во второй – 7 белых и 3 красных, в третьей – 8 белых и 2 красных. Бросают игральную кость. При выпадении одного, двух, трех очков вынимают шар из первой урны, четырех очков – из второй, другого количества очков – из третьей урны. Вынутый шар оказался белым. Найти вероятность того, что шар вынут из третьей урны.

637. На складе имеется 28 комплектующих изделий от двух компаний поставщиков, из них 20 изделий от первой компании. Известно, что с вероятностью 0,7 среди поставок первой компании встречаются изделия, выполненные по новейшей технологии. Среди изделий второй компании такие встречаются с вероятностью 0,8. Случайным образом выбранное изделие оказалось выполненным по новейшей технологии. Какова вероятность того, что это изделие от первой компании?

638. В первой урне 2 белых и 6 черных шаров, во второй – 4 белых и 2 черных. Из первой урны наудачу переложили 2 шара во вторую, после чего из второй урны наудачу вынули один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

639. Имеются три одинаковых ящика. В первом ящике лежат 2 белых 2 черных шара; во втором – 3 черных; в третьем – 1 черный и 5 белых. Случайным образом выбирается ящик и наугад вынимается из него шар. Какова вероятность, что шар будет белый?

640. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали на первом автомате равна 0,06, на втором – 0,02. Производительность первого автомата втрое больше, чем второго. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь нестандартна.

641. Всхожесть семян данного растения имеет вероятность 0,8. Какова вероятность, что из 5 посеянных семян взойдет не менее 4?

642. Вероятность банкротства одной из 6 фирм к концу года равна p=0,2. Какова вероятность того, что к концу года обанкротится не более 3 фирм?

643. Каждое из 8 предприятий отрасли выполняет месячный план с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что в конце месяца план выполнят по крайней мере 6 предприятий.

644. Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 41-го размера, равна 0,2. Найдите вероятность того, что из 5 первых покупателей обувь этого размера понадобится: а) одному покупателю; б) по крайней мере одному покупателю.

645. Предполагается, что 10 % открывающихся новых малых предприятий прекращают свою деятельность в течение года. Какова вероятность того, что из 6-ти малых предприятий не более 2-х в течение года прекратят свою деятельность?

Задачи для самостоятельного решения №646-670:

646. Учебник издан тиражом 10000 экземпляров. Вероятность того, что экземпляр учебника сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит: а) 4 бракованных книги; б) не менее 3-х бракованных книг.

647. В среднем 20 % пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене будет продано: а) 5 пакетов; б) хотя бы 2 пакета.

648. Счетчик Гейгера регистрирует частицы, вылетающие из некоторого радиоактивного источника, с вероятностью 0,001. Предположим, что за время наблюдения из источника вылетело 30000 частиц. Какова вероятность того, что счетчик зарегистрирует: а) ровно 3 частицы; б) хотя бы одну частицу.

649. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятности того, что магазин получит разбитых бутылок: а) ровно 2; б) менее 2-х; в) более 2-х; г) хотя бы 3.

650. При наборе слова оператор делает ошибку с вероятностью 0,002. Какова вероятность, что в набранной статье, состоящей из 3000 слов, будет не более 2 ошибок?

651. Вероятность изготовления изделия высшего качества равна 0,8. Найти вероятность того, что среди взятых 60 изделий 30 окажутся высшего качества.

652. Вероятность некоторого события в единичном испытании оставляет 0,004. Найти вероятность того, что в 2500 испытаниях данное событие произойдёт ровно 4 раза.

653. Вероятность наступления события А в одном опыте равна 0,6. Найти вероятность того, что событие А наступит 1400 раз в 2400 испытаниях.

654. Монета подброшена 40 раз. Найти вероятность того, что орел выпадает в 25 случаях.

655. Вероятность изготовления изделия высшего качества равна 0,7. Найти вероятность того, что среди взятых 70 изделий 40 окажутся высшего качества.

656. Вероятность появления события А в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0,8. Найти вероятность того, что событие А появится не более 74 раз.

657. Найти вероятность того, что событие А наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

658. Вероятность того, что деталь не прошла проверку отклонений равна 0,2. Найти вероятность, что среди 400 отобранных деталей непригодных окажется от 70 до 100.

659. Вероятность покупки при посещении клиентом магазина составляет p=0,75. Найти вероятность того, что при 100 посещениях клиент совершит покупку ровно 80 раз.

660. Вероятность найти белый гриб среди прочих равна 0,25. Какова вероятность того, что среди 80 грибов белых будет 20?

661. Каждый моряк из экипажа судна, прибывшего в порт, может с вероятностью, равной 1/3, осматривать город, остаться на корабле или находиться в ресторане. Найти вероятность того, что из 203 членов экипажа в данный момент 71 моряк осматривает город.

662. Доля стандартных однолетних сеянцев сосны в питомнике составляет 70%. Определить вероятность того, что в партии из 1000 сеянцев стандартных сеянцев ровно 700.

663. Какова вероятность, что при 100 бросаниях монеты «герб» появится от 40 до 60 раз?

664. Игральный кубик подбросили 125 раз. Какова вероятность того, что цифра 6 появилась не более 60 раз?

665. Вероятность получения по лотерее безвыигрышного билета равна 0,1. Какова вероятность того, что среди 400 наугад купленных билетов не менее 50 и не более 60 безвыигрышных.

666. Аудиторную работу по теории вероятностей с первого раза успешно выполняют 50 % студентов. Найти вероятность того, что из 400 студентов работу успешно выполнят: а) 180 студентов; б) не менее 180 студентов.

667. Вероятность того, что покупателю требуется обувь 41-го размера, равна 0,2. Найдите вероятность того, что среди 100 покупателей потребуют обувь 41-го размера: а) 25 человек; б) от 10 до 30 человек; в) не более 30 человек; г) не менее 35 человек.

668. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз.

669. В цехе имеется 125 станков, работающих независимо друг от друга. Каждый станок оказывается включенным 0,85 всего рабочего времени. Какова вероятность, что в некоторый момент времени окажутся включенными: а) 106 станков; б) не менее 123 станков; в) хотя бы один станок.

670. Группа ботаников делали опыты по скрещиванию желтого (гибридного) гороха. По гипотезе Менделя вероятность появления зеленого гороха в таких опытах равна 1/4. Какова вероятность того, что при 34 153 скрещиваниях зеленый горох будет получен от 8 493 до 8 507 раз?

Задачи для самостоятельного решения №671-695:

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*, заданной законом распределения:

671

X	2	3	4
p	0,2	0,4	0,4

672

X	1	3	7
p	0,1	0,3	0,6

673

X	4	6	8
p	0,2	0,4	0,5

674

X	2	3	4
p	0,2	0,3	0,5

675

X	1	3	5
p	0,2	0,3	0,5

676

X	1	3	7
p	0,2	0,3	0,5

677

X	2	4	5
p	0,1	0,2	0,7

678

X	1	2	6
p	0,2	0,2	0,6

679

X	1	3	7
p	0,2	0,3	0,5

680

X	1	4	5
p	0,3	0,3	0,4

681

X	2	3	5
p	0,2	0,3	0,5

682

X	3	4	6
p	0,3	0,3	0,4

683

X	2	4	7
p	0,3	0,1	0,6

684

X	2	3	5
p	0,2	0,4	0,4

685

X	5	1	4
p	0,1	0,3	0,6

686

X	1	2	4
p	0,2	0,3	0,5

687

X	1	3	4
p	0,2	0,2	0,6

688

X	5	1	4
p	0,2	0,3	0,5

689

X	2	3	4
p	0,2	0,3	0,5

690

X	2	4	6
p	0,3	0,2	0,5

691

X	2	3	7
p	0,1	0,3	0,6

692

X	2	3	8
p	0,2	0,4	0,4

693

X	1	3	5
p	0,2	0,2	0,6

694

X	5	2	4
p	0,2	0,3	0,5

695

X	2	3	4
p	0,2	0,3	0,5

Задачи для самостоятельного решения №696-720:

Непрерывная случайная величина задана функцией распределения вероятностей *F*(*x*). Требуется: а) найти плотность распределения вероятностей *f*(*x*); б) найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение; в) построить графики функции распределения *F*(*x*) и плотности распределения *f*(*x*).

696

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{25}, \text{ при } 0<x\le 5,\\ 1, \text{ при } x>5.\end{cases}$$

697

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{4}, \text{ при } 0<x\le 2,\\ 1, \text{ при } x>2.\end{cases}$$

698

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{100}, \text{ при } 0<x\le 10,\\ 1, \text{ при } x>10.\end{cases}$$

699

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{144}, \text{ при } 0<x\le 12,\\ 1, \text{ при } x>12.\end{cases}$$

700

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{36}, \text{ при } 0<x\le 6,\\ 1, \text{ при } x>6.\end{cases}$$

701

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{49}, \text{ при } 0<x\le 7,\\ 1, \text{ при } x>7.\end{cases}$$

702
$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x \le 0,\\ \dfrac{x^2}{16}, \text{ при } 0 < x \le 4,\\ 1, \text{ при } x > 4.\end{cases}$$

703
$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x \le 0,\\ \dfrac{x^2}{81}, \text{ при } 0 < x \le 9,\\ 1, \text{ при } x > 9.\end{cases}$$

704
$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x \le 0,\\ \dfrac{x^2}{64}, \text{ при } 0 < x \le 8,\\ 1, \text{ при } x > 8.\end{cases}$$

705
$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x \le 0,\\ \dfrac{x^2}{121}, \text{ при } 0 < x \le 11,\\ 1, \text{ при } x > 11.\end{cases}$$

706
$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x \le 0,\\ \dfrac{x^2}{9}, \text{ при } 0 < x \le 3,\\ 1, \text{ при } x > 3.\end{cases}$$

707
$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x \le 0,\\ \dfrac{x^2}{4}, \text{ при } 0 < x \le 2,\\ 1, \text{ при } x > 2.\end{cases}$$

708
$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x \le 0,\\ \dfrac{x^2}{16}, \text{ при } 0 < x \le 4,\\ 1, \text{ при } x > 4.\end{cases}$$

709
$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x \le 0,\\ \dfrac{x^2}{144}, \text{ при } 0 < x \le 12,\\ 1, \text{ при } x > 12.\end{cases}$$

710
$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x \le 0,\\ \dfrac{x^2}{25}, \text{ при } 0 < x \le 5,\\ 1, \text{ при } x > 5.\end{cases}$$

711
$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x \le 0,\\ \dfrac{x^3}{8}, \text{ при } 0 < x \le 2,\\ 1, \text{ при } x > 2.\end{cases}$$

712
$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x \le 0,\\ \dfrac{x^2}{100}, \text{ при } 0 < x \le 10,\\ 1, \text{ при } x > 10.\end{cases}$$

713
$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x \le 0,\\ \dfrac{x^2}{64}, \text{ при } 0 < x \le 8,\\ 1, \text{ при } x > 8.\end{cases}$$

714
$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x \le 0,\\ \dfrac{x^2}{36}, \text{ при } 0 < x \le 6,\\ 1, \text{ при } x > 6.\end{cases}$$

715
$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x \le 0,\\ \dfrac{x^2}{121}, \text{ при } 0 < x \le 11,\\ 1, \text{ при } x > 11.\end{cases}$$

716
$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x \le 0,\\ \dfrac{x^2}{4}, \text{ при } 0 < x \le 2,\\ 1, \text{ при } x > 2.\end{cases}$$

717
$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x \le 0,\\ \dfrac{x^2}{144}, \text{ при } 0 < x \le 12,\\ 1, \text{ при } x > 12.\end{cases}$$

718
$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x \le 0,\\ \dfrac{x^2}{81}, \text{ при } 0 < x \le 9,\\ 1, \text{ при } x > 9.\end{cases}$$

719
$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x \le 0,\\ \dfrac{x^2}{49}, \text{ при } 0 < x \le 7,\\ 1, \text{ при } x > 7.\end{cases}$$

720
$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x \le 0,\\ \dfrac{x^2}{64}, \text{ при } 0 < x \le 8,\\ 1, \text{ при } x > 8.\end{cases}$$

ТЕМА 2 ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Математическая статистика **–** раздел математики, изучающий математические методы сбора, систематизации, обработки и интерпретации результатов наблюдений с целью выявления статистических закономерностей.

2.1 Генеральная совокупность и выборка. Основные понятия

Генеральной совокупностью называется вся исследуемая совокупность объектов.

Она может состоять из конечного числа случайной величины, часто весьма ограниченного (например, небольшой участок лесных культур); в других случаях генеральная совокупность может быть бесконечной (количество участков определенного типа леса).

Чаще всего имеем дело с ситуацией, когда измерение каждого элемента генеральной совокупности невозможно из-за большого их числа (например, деревья в пределах таксационного выдела). В таких случаях для характеристики генеральной совокупности прибегают к выборке из нее единиц наблюдения, и обработке подвергается лишь часть единиц изучаемой совокупности.

Выборочной совокупностью или просто **выборкой** называют совокупность случайно отобранных объектов.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности.

Например, если из 1000 деталей отобрано для обследования 150 деталей, то объем генеральной совокупности $N = 1000$, а объем выборки $n = 150$.

Выборки подразделяют на повторные и бесповторные выборки.

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

На практике обычно пользуются бесповторным случайным отбором.

Выборочным методом называется метод, основанный на том, что заключение о генеральной совокупности делается по результатам выборки.

Для применения выборочного метода необходимо, чтобы выборка правильно представляла свойства генеральной совокупности, или, говорят, что выборка должна быть репрезентативной (представительной). А это возможно, если все объекты генеральной совокупности имеют одинаковую вероятность (возможность) попасть в выборку.

Простой случайный бесповторный отбор – это отбор, при котором объекты извлекаются по одному из генеральной совокупности, не возвращая их обратно.

Например, для извлечения n объектов из генеральной совокупности объема N поступают так: записывают номера от 1 до N на карточках, которые тщательно перемешивают, и наугад вынимают одну карточку. Объект, имеющий одинаковый номер с извлеченной карточкой, подвергают обследованию. Затем карточки перемешивают и снова вынимают карточку и т.д. Так поступают n раз. В итоге получают простую случайную бесповторную выборку объема n.

Простой случайный повторный отбор – это отбор, при котором объекты извлекаются по одному из генеральной совокупности, возвращая их обратно. Например, если карточки возвращать обратно в пачку, то выборка является простой случайной повторной.

Типический отбор – это отбор, при котором объекты генеральной совокупности разбивают на непересекающиеся группы и из любой группы случайным образом отбирают объекты. Так, если детали изготавливают на нескольких станках, то отбор производят не из всей совокупности деталей, произведенных всеми станками, а из продукции каждого станка в отдельности.

Механический отбор – отбор, при котором объекты выбирают через определенный интервал. Например, если нужно отобрать 20 % изготовленных станком деталей, то отбирают каждую 5-ю деталь. При анализе качества яиц отбирают каждое 25-е.

Серийный отбор – генеральная совокупность делится на непересекающиеся группы и случайным образом отбирают некоторые группы. К примеру, если изделия изготавливаются большой группой станков-автоматов, то подвергают сплошному обследованию продукцию только нескольких станков; генеральную совокупность разбивают на серии одинакового объема, затем простым случайным отбором выбирают несколько серий, и из каждой серии простым случайным отбором извлекают отдельные объекты.

На практике эти методы обычно комбинируют.

2.2 Статистическое распределение выборки

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем значение x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 наблюдалось n_2 раз, …, $x_к$ наблюдалось $n_к$ раз. Общий объем выборки можно определить как

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i \, . \tag{2.1}$$

Наблюдаемые значения x_i называют ***вариантами***, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, – ***вариационным рядом***.

Числа наблюдений называют ***частотами***, а их отношения к объему выборки $\frac{n_i}{n} = W_i$ – ***относительными частотами***.

Модой M_0 называется варианта, имеющая наибольшую частоту.

Медианой M_e называется варианта, которая делит вариационный ряд на две части с одинаковым числом вариант в каждой.

Для дискретного вариационного ряда с нечетным числом членов медиана равна серединной варианте, а для ряда с четным числом членов – полусумме двух серединных вариант.

Размахом выборки называется разность между максимальным и минимальным элементами выборки.

Статистическим распределением выборки (*статистическим рядом*) называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

или

x_i	x_1	x_2	…	x_k
w_i	w_1	w_2	…	w_k

Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов одинаковой длины и соответствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал).

x	$x_0 - x_1$	$x_1 - x_2$	…	$x_{к\text{-}1} - x_к$
n_i	n_1	n_2	…	$n_к$

В таком виде под распределением понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике – соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами, или относительными частотами.

2.3 Эмпирическая функция распределения. Полигон частот и гистограмма

Предположим, что получено статистическое распределение выборки. Обозначим через n_x число наблюдений, при которых значения вариант оказываются меньше, чем x.

Эмпирической функцией распределения случайной величины (функцией распределения выборки) называют функцию F_x^* относительной частоты числа наблюдений n_x:

$$F_x^* = \frac{n_x}{n}, \qquad (2.2)$$

т.е. относительной частоты события $X<x$.

Наглядное представление о статистическом распределении выборки дают графики.

Полигоном частот называют ломаную (рис. 2.1), отрезки которой соединяют точки $(x_1;n_1)$, $(x_2;n_2)$, …, $(x_k;n_k)$. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i. Точки $(x_i;n_i)$ соединяют отрезками прямых и получают полигон частот.

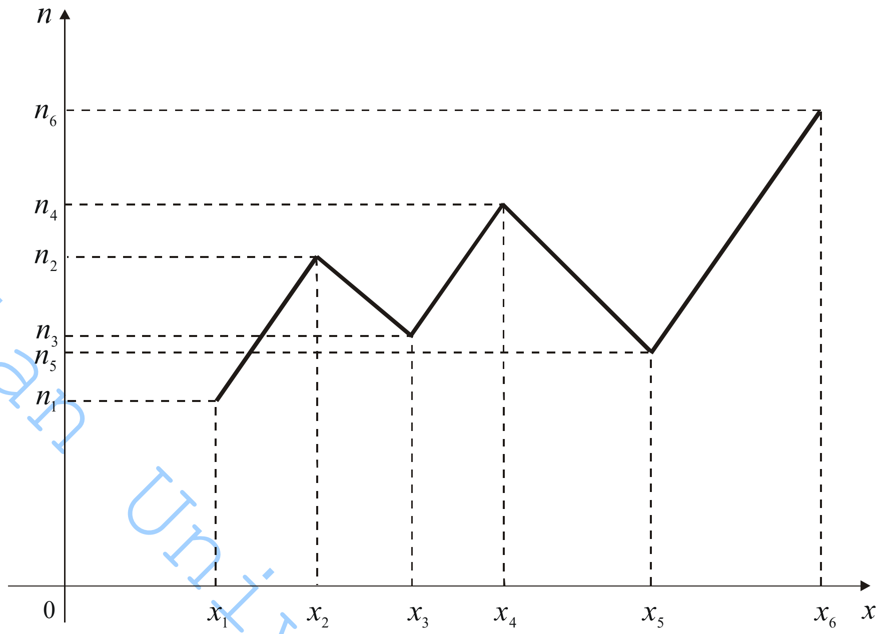


Рисунок 2.1 - Полигон частот

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1;W_1)$, $(x_2;W_2)$, …, $(x_k;W_k)$. Для построения полигона относительных частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им относительные частоты W_i. Точки $(x_i;W_i)$ соединяют отрезками прямых и получают полигон относительных частот.

Полигон обычно строят для дискретного признака.

В тех случаях, когда рассматривается непрерывная случайная величина, которая может принимать любые, сколь угодно мало отличающиеся друг от друга значения, строится не полигон, а гистограмма. Для этого весь интервал, в котором заключены все значения случайной величины, разбивается на несколько интервалов длиной *h* каждый. На этих интервалах подсчитывается сумма частот вариант, попавших в *i*-й интервал, и составляется отношение n_i / h.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру (рис. 2.2), состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною *h*, а высоты равны отношению n_i / h (плотность частоты).

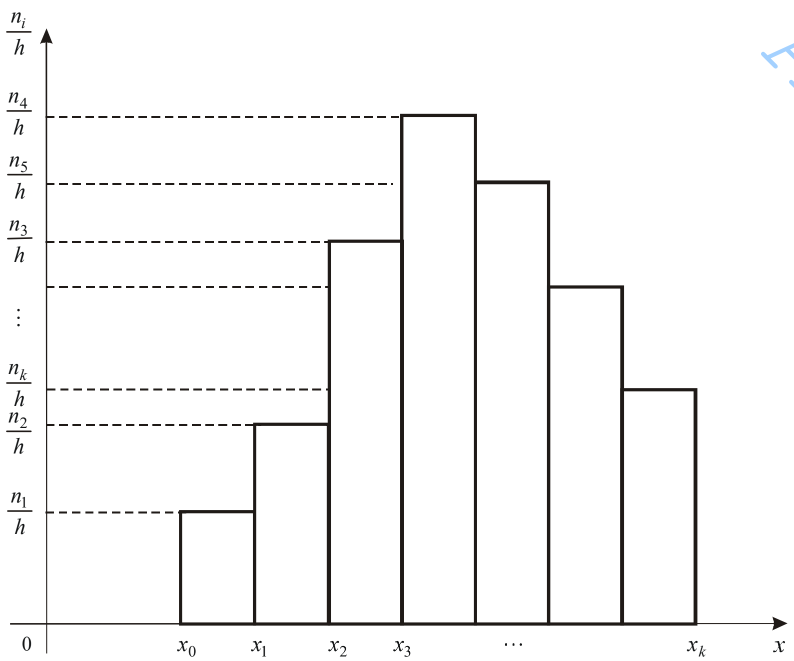


Рисунок 2.2 - Гистограмма частот

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси

абсцисс на расстоянии n_i / h. Площадь *i*-го частичного прямоугольника равна $hn_i / h = n_i$ – сумме частот вариант *i*-го интервала; следовательно, площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною *h*, а высоты равны отношению W_i / h (плотность относительной частоты).

Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии W_i / h. Площадь *i*-го частичного прямоугольника равна $hW_i / h = W_i$ – относительной частоте вариант, попавших в *i*-й интервал. Следовательно, площадь гистограммы относительных частот равна сумме относительных частот, т.е. единице.

2.4 Решение типового задания

Пример. Имеется выборка, содержащая 30 числовых значений некоторого признака случайной величины *X*:

19	25	22	16	22	14	17	19	18	20
22	26	24	18	16	19	22	14	18	14
25	17	18	14	20	18	24	25	16	18

Построить:
1) статистическое распределение выборки;
2) полигон частот;
3) эмпирическую функцию распределения;
4) интервальный ряд;
5) гистограмму частот;

вычислить:
6) выборочную среднюю;
7) выборочную дисперсию;
8) выборочное среднее квадратическое отклонение;
9) моду;
10) медиану.

Решение.

1. Статистическое распределение выборки представляет собой таблицу, в которой первая строка содержит варианты (значения случайной величины, расположенные в порядке возрастания), а вторая – соответствующие частоты (сколько раз эти значения встречались).

x_i	14	16	17	18	19	20	22	24	25	26
n_i	4	3	2	6	3	2	4	2	3	1

2. Полигон частот – это ломаная, соединяющая точки с координатами $(x_i; n_i)$.

3. Проведем вычисления для построения эмпирической функции распределения:

Если $x \le 14$, то $F_x^* = 0$

если $14 < x \le 16$, то $F_x^* = \dfrac{4}{30} = \dfrac{2}{15} \approx 0{,}13$

если $16 < x \le 17$, то $F_x^* = \dfrac{4+3}{30} = \dfrac{7}{30} \approx 0{,}23$

если $17 < x \le 18$, то $F_x^* = \dfrac{4+3+2}{30} = \dfrac{9}{30} = 0{,}3$

если $18 < x \le 19$, то $F_x^* = \dfrac{4+3+2+6}{30} = \dfrac{15}{30} = 0{,}5$

если $19 < x \le 20$, то $F_x^* = \dfrac{4+3+2+6+3}{30} = \dfrac{18}{30} = 0{,}6$

если $20 < x \le 22$, то $F_x^* = \dfrac{4+3+2+6+3+2}{30} = \dfrac{20}{30} \approx 0{,}67$

если $22 < x \le 24$, то $F_x^* = \dfrac{4+3+2+6+3+2+4}{30} = \dfrac{24}{30} = 0{,}8$

если $24 < x \le 25$, то $F_x^* = \dfrac{4+3+2+6+3+2+4+2}{30} = \dfrac{26}{30} \approx 0{,}87$

если $25 < x \le 26$, то $F_x^* = \dfrac{4+3+2+6+3+2+4+2+3}{30} = \dfrac{29}{30} \approx 0{,}97$

если $x > 26$, то $F_x^* = \dfrac{4+3+2+6+3+2+4+2+3+1}{30} = \dfrac{30}{30} = 1$

Получили эмпирическую функцию распределения:

$$F_x^* = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 14 \\ 0{,}13, & \text{при } 14 < x \le 16 \\ 0{,}23, & \text{при } 16 < x \le 17 \\ 0{,}3, & \text{при } 17 < x \le 18 \\ 0{,}5, & \text{при } 18 < x \le 19 \\ 0{,}6, & \text{при } 19 < x \le 20 \\ 0{,}67, & \text{при } 20 < x \le 22 \\ 0{,}8, & \text{при } 22 < x \le 24 \\ 0{,}87, & \text{при } 24 < x \le 25 \\ 0{,}97, & \text{при } 25 < x \le 26 \\ 1, & \text{при } x > 26 \end{cases}$$

4. Построим интервальный ряд.

Найдем наименьшее и наибольшее значения признака в совокупности и определим размах варьирования: $R=x_{max}-x_{min}=26-14=12$.

Определим число интервалов k. Для этого воспользуемся формулой Стерджесса:

$$k = 1+3{,}322 \cdot lgn = 1+3{,}322 \cdot lg30 \approx 6.$$

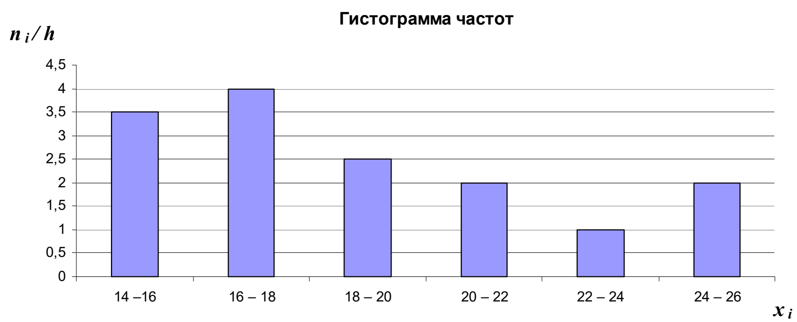
Найдем постоянную величину интервала: $h = \dfrac{R}{k} = \dfrac{12}{6} = 2$.

Определим границы интервалов. За начало первого интервала следует взять $x_0=x_{min}=14$. Промежуточные интервалы получаем, прибавляя к концу предыдущего интервала длину частичного интервала h=2: x_1=14+2=16, x_2=16+2=18, x_3=18+2=20, x_4=20+2=22, x_5=22+2=24, x_6=24+2=26. Будем рассматривать следующие промежутки: [14; 16], (16; 18], (18; 20], (20; 22], (22; 24], (24; 26] и посчитаем количество вариант для каждого промежутка.

Получим статистическое распределение интервального ряда:

x_i	14 –16	16 – 18	18 – 20	20 – 22	22 – 24	24 – 26
n_i	7	8	5	4	2	4

5. Построим гистограмму частот:



6. Вычислим характеристики ряда. Статистическое распределение ряда, вычисленное выше (пункт 1), имеет вид:

x_i	14	16	17	18	19	20	22	24	25	26
n_i	4	3	2	6	3	2	4	2	3	1

Выборочная средняя:

$$\bar{x}_{в} = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \frac{14\cdot 4 + 16\cdot 3 + 17\cdot 2 + 18\cdot 6 + 19\cdot 3 + 20\cdot 2 + 22\cdot 4 + 24\cdot 2 + 25\cdot 3 + 26\cdot 1}{30} = \frac{580}{30} \approx 19{,}3$$

7. Выборочная дисперсия:

$$D_{\hat{a}} = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_{\hat{A}})^2}{n} = \frac{1}{30}(4(14-19{,}3)^2 + 3(16-19{,}3)^2 + 2(17-19{,}3)^2 + 6(18-19{,}3)^2 + 3(19-19{,}3)^2 +$$

$$2(20-19{,}3)^2 + 4(22-19{,}3)^2 + 2(24-19{,}3)^2 + 3(25-19{,}3)^2 + 1(26-19{,}3)^2) = \frac{382{,}7}{30} \approx 12{,}76 \cdot$$

8. Среднее квадратическое отклонение: $\sigma_{в} = \sqrt{D_{в}} = \sqrt{12{,}76} \approx 3{,}57$.

9. Запишем вариационный ряд (все значения в порядке возрастания):

14, 14, 14, 14, 16, 16, 16, 17, 17, **18, 18**, **18**, **18**, **18**, **18**, 19, 19, 19, 20, 20, 22, 22, 22, 22, 24, 24, 25, 25, 25, 26

Мода – наиболее часто встречаемое значение, $M_0 = 18$.

10. Медиана – варианта, которая делит вариационный ряд на две части с одинаковым числом вариант в каждой. Для нашего ряда с четным числом членов – медиана равна полусумме двух серединных вариант.

14, 14, 14, 14, 16, 16, 16, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 18, **18**, **19**, 19, 19, 20, 20, 22, 22, 22, 22, 24, 24, 25, 25, 25, 26

Медиана $M_e = \frac{18+19}{2} = 18{,}5$.

Задачи для самостоятельного решения №721-745:

Имеется выборка, содержащая 15 числовых значений некоторого признака случайной величины X.

Построить:
1) статистическое распределение выборки;
2) полигон частот;
3) эмпирическую функцию распределения;
4) интервальный ряд;
5) гистограмму частот;

вычислить:
6) выборочную среднюю;
7) выборочную дисперсию;
8) выборочное среднее квадратическое отклонение;
9) моду;
10) медиану.

721	***X***	17	10	26	20	4	17	20	26	20	4	10	29	20	17	10

722	***X***	13	8	3	17	8	20	13	8	3	23	8	13	17	8	13
723	***X***	15	22	27	6	15	36	27	22	15	27	22	27	6	27	31
724	***X***	14	12	7	14	12	17	14	12	17	22	20	12	14	20	12
725	***X***	11	5	14	18	23	11	14	5	18	25	11	18	14	18	23
726	***X***	12	16	23	30	12	5	28	12	16	23	5	12	16	12	16
727	***X***	13	18	8	21	28	13	21	26	21	8	13	18	21	18	21
728	***X***	10	6	13	10	17	10	13	20	17	10	20	13	10	21	13
729	***X***	18	13	24	7	32	24	18	30	7	24	13	18	30	13	24
730	***X***	15	10	4	15	17	22	10	15	24	10	15	4	10	17	10
731	***X***	13	7	10	13	3	13	7	17	13	18	3	13	7	10	13
732	***X***	12	19	12	5	19	24	12	19	35	24	19	30	12	30	12
733	***X***	14	9	20	14	23	20	26	9	23	14	26	23	20	29	23
734	***X***	15	10	3	19	15	10	28	15	3	10	15	19	10	24	10
735	***X***	17	7	14	12	17	20	22	17	14	7	12	17	12	17	14
736	***X***	16	11	6	25	16	21	11	26	11	16	11	25	16	21	11
737	***X***	13	16	20	7	13	27	20	24	13	7	20	16	24	20	16
738	***X***	12	25	8	12	8	25	8	12	3	12	3	8	33	8	30
739	***X***	19	8	14	24	19	24	33	24	19	8	14	24	30	24	14

740	***X***	10	14	8	10	14	8	3	10	8	16	8	10	8	18	16
741	***X***	14	18	22	14	7	18	22	25	14	22	27	25	22	7	18
742	***X***	15	11	4	11	15	22	15	11	4	15	25	11	29	22	11
743	***X***	17	24	12	24	17	12	24	4	17	34	24	4	30	24	12
744	***X***	16	13	8	16	13	18	21	16	13	21	18	13	16	23	13
745	***X***	10	5	16	10	20	5	22	20	10	22	16	20	25	20	16

ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

ТЕМА 1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Два размещения считаются различными, если они отличаются
А только порядком расположения элементов
Б) только составом элементов
В) только числом элементов
Г) или составом элементов, или их порядком

2. Два сочетания считаются различными только в том случае, если
А) у них все элементы различны
Б) отличаются порядком расположения элементов
В) отличаются двумя элементами
Г) отличаются хотя бы одним элементом

3. Перестановка $P_n -$ это
А) сочетание из n элементов по n
Б) сочетание из n элементов по 0
В) размещение из n элементов по n
Г) размещение из n элементов по 1

4. Число размещений A_n^m вычисляется по формуле:

А) $\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

Б) $\dfrac{n!}{(n-m)!}$

В) $n!$

5. Число размещений с повторениями из n элементов по k вычисляется по формуле:
А) n^k
Б) k^n
В) kn

6. Число сочетаний C_n^m вычисляется по формуле:

А) $\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

Б) $\dfrac{n!}{(n-m)!}$

В) $n!$

7. Число сочетаний с повторениями из n элементов по k вычисляется по формуле:

А) $\dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$

Б) $\dfrac{(n+k)!}{(n-1)!k!}$

В) $\dfrac{(n+k-1)!}{(n+1)!k!}$

Г) $\dfrac{(n-k-1)!}{(n-1)!k!}$

8. Число размещений P_n вычисляется по формуле:

А) $\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

Б) $\dfrac{n!}{(n-m)!}$

В) $n!$

9. Число перестановок с повторениями из n элементов вычисляется по формуле:

А) $\dfrac{n!}{n_1!n_2!...!n_m!}$

Б) $\dfrac{n_1!n_2!...n_m!}{n!}$

В) $\dfrac{n!}{n_1!+n_2!+...+!n_m!}$

10. Случайным называется событие A, которое

А) может произойти, а может не произойти

Б) никогда не произойдет

В) обязательно произойдет

Г) произойдет только совместно с событием $\overline{A}$

11. События A и B называются зависимыми, если

А) сумма их вероятностей обязательно равна 1

Б) вероятности событий А и В не зависят друг от друга

В) вероятность наступления одного из событий зависит от появления или не появления другого

Г) они происходят одновременно

12. События A и B называются несовместными, если

А) вероятность наступления одного из событий
зависит от появления или не появления другого

Б) появление одного из них исключает появление другого

В) сумма их вероятностей никогда не равна 1

Г) если одновременно они могут появиться только
конечное число раз

13. Рассматривается пространство из N элементарных событий. Событию A благоприятствуют M элементарных событий. Классическая вероятность события A равна

А) $\dfrac{N}{M}$ Б) $1-\dfrac{N}{M}$ В) $\dfrac{M}{N}$ Г) $1-\dfrac{N}{M}$

14. Произведено n испытаний. Событие A произошло m раз. Относительная частота события A равна

А) $W(A)=\dfrac{n}{m}$ Б) $W(A)=1-\dfrac{m}{n}$

В) $W(A)=\dfrac{m}{n}$ Г) $W(A)=m\cdot n$

15. Вероятность P любого события принадлежит отрезку

А) [1;2]

Б) [0;2]

В) [1;4]

Г) [0;1]

16. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна

А) 0

Б) 1/2

В) 1

Г) 4

17. Два события называются противоположными, если они
А) независимы
Б) не совместны
В) единственно возможны
Г) образуют полную группу событий

18. События образуют полную группу событий, если являются
А) независимыми
Б) единственно возможными и независимыми
В) несовместными и единственно возможными
Г) несовместными и равновозможными

19. Суммой событий A и B называется событие C, которое происходит, если происходят:
А) только событие A
Б) только событие B
В) одно из событий A или B
Г) оба события A и B

20. Произведением событий A и B называется событие C, которое происходит, если происходит:
А) только событие A
Б) только событие B
В) одно из событий A или B
Г) оба события A и B

21. Обязательным условием применения формулы

$$\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB)$$

является
А) независимость события A и B
Б) события A и B единственно возможны
В) события A и B противоположны
Г) совместность событий A и B

22. Обязательным условием применения формулы

$$\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

является
А) независимость события A и B
Б) несовместность событий A и B
В) события A и B единственно возможны
Г) совместность событий A и B

23. Вероятность $\mathrm{P}(A/B)$ это – …
А) вероятность события A при условии, что A и B противоположные события
Б) вероятность события A при условии, что A и B несовместные события
В) вероятность события A при условии, что событие B произошло
Г) произведение событий A и B

24. Обязательным условием применения формулы

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

является
А) противоположность событий A и B
Б) независимость событий A и B
В) несовместность событий A и B
Г) зависимость событий A и B

25. Обязательным условием применения формулы

$$\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(A/B)$$

является

А) противоположность событий A и B
Б) независимость событий A и B
В) несовместность событий A и B
Г) зависимость событий A и B

26. Формула полной вероятности имеет вид:

А) $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(A)\cdot P_{H_i}(A)$

Б) $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_A(H_i)$

В) $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)$

Г) $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(A)\cdot P_A(H_i)$

27. Вероятность появления события A m раз в n повторных независимых испытаниях при $n<10$ определяется
А) формулой Бернулли
Б) локальной теоремой Лапласа

В) интегральной теоремой Лапласа
Г) формулой Пуассона

28. Формула Бернулли имеет вид

А) $P_n(m) = C_m^n p^n q^{n-m}$

Б) $P_n(m) = C_n^m p^n q^m$

В) $P_n(m) = C_m^n p^n q^m$

Г) $P_n(m) = C_n^m p^n q^{n-m}$

29. Наивероятнейшим числом наступлений события *A* в *n* независимых испытаниях называется
А) наибольшее число наступлений события *A*
Б) наибольшая вероятность наступления события *A*
В) число наступлений события *A* при наибольшем числе испытаний
Г) число наступлений события *A*, при котором вероятность наступления события *A* в *n* независимых испытаниях наибольшая

30. Формула для определения наивероятнейшего числа m_0 имеет вид

А) $np - p \le m_0 \le np + p$

Б) $np - q \le m_0 \le np + q$

В) $np - q \le m_0 \le np + p$

Г) $q \le m_0 \le p$

31. Локальная теорема Лапласа позволяет вычислить
А) наивероятнейшее число наступлений события в *n* независимых испытаниях
Б) относительную частоту наступлений события в *n* независимых испытаниях
В) вероятность появления события *m* раз в *n* независимых испытаниях (*n*>10)
Г) вероятность отклонения числа появлений события *m* от числа независимых испытаний *n*

32. В локальной теореме Лапласа $P \approx \dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$ аргумент функции $\varphi(x)$ равен

А) $x = \dfrac{m}{\sqrt{npq}}$ В) $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$

Б) $x = \dfrac{np}{\sqrt{npq}}$ Г) $x = m - np$

33. Интегральная теорема Лапласа позволяет вычислить
А) вероятность появления события *A m* раз в *n* испытаниях (*n*>10)
Б) вероятность появления события *A* в *n* испытаниях не менее *a*, но не более *b* раз (*n*>10)
В) наивероятнейшее число появлений события *A* в *n* независимых испытаниях (*n*>10)
Г) относительную частоту наступлений события *A* в *n* независимых испытаниях

34. В интегральной формуле Лапласа $P(k_1 \le m \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, аргумент x_1 равен

А) $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ Б) $x_1 = \dfrac{k_1}{\sqrt{npq}}$

В) $x_1 = \dfrac{np}{\sqrt{npq}}$ Г) $x_1 = k_1 - np$

35. В интегральной формуле Лапласа $P(k_1 \le m \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, аргумент x_2 равен

А) $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ Б) $x_2 = \dfrac{k_2}{\sqrt{npq}}$

В) $x_2 = \dfrac{np}{\sqrt{npq}}$ Г) $x_2 = k_2 - np$

36. Случайные величины делятся на
А) переменные и постоянные
Б) четные и нечетные
В) рациональные и нерациональные
Г) дискретные и непрерывные

37. Математическое ожидание дискретной случайной величины вычисляется по формуле

А) $\sum_{i=1}^{n} x_i$ Б) $\sum_{i=1}^{n} (x_i - p_i) \cdot x_i$

В) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i$ Г) $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

38. Математическое ожидание случайной величины (c X+Y), где c=const, а X, Y – независимые случайные величины, равно:
А) $cM(X)+M(Y)$
Б) $cM(X)–M(Y)$
В) $M(X)+M(Y)$
Г) $M(X) \cdot M(Y)$

39. Математическое ожидание постоянной величины C равно
А) C
Б) 1
В) 0
Г) не определено

40. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин X и Y равно
А) $M(X) + M(Y)$ Б) $M(X) – M(Y)$
В) $\frac{M(X)}{M(Y)}$ Г) $M(X) \cdot M(Y)$

41. Дисперсия дискретной случайной величины определяется по формуле:
А) $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i p_i)^2$ В) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$
Б) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i p_i)^2$ Г) $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i p_i)^2$

42. Дисперсия случайной величины ($cX+Y$), где c=const, а X, Y – независимые случайные величины, равно
А) cD(X)+D(Y)
Б) c^2D(X)+D(Y)
В) D(X)+D(Y)
Г) cD(X)–D(Y)

43. Дисперсия разности двух независимых случайных величин X и Y равна:
А) $D(X)–D(Y)$
Б) 0
В) $D(X)+D(Y)$
Г) $D(X) \cdot D(Y)$

44. Дисперсия постоянной величины C равна
А) 1
Б) С
В) 0
Г) не определена

45. Математическое ожидание квадрата отклонения $M(X – M(X))^2$ равно
А) $D(X)$
Б) $\delta(X)$
В) $M(X)$
Г) V

46. Дисперсия от математического ожидания $D(M(X))$ равна
А) $M(X)$
Б) 0
В) X
Г) 1

47. Среднее квадратическое отклонение $\sigma(x)$ случайной величины X равно
А) D(X)
Б) $\sqrt{\mathrm{M(X)}}$
В) $\sqrt{\mathrm{D(X)}}$
Г) M(X)

48. Математическое ожидание M(X) непрерывной случайной величины X, заданной на интервале (a,b), определяется формулой:
А) M(X)= $\int_a^b x^2 f(x)dx$ Б) M(X)= $\int_a^b xf(x)dx$

49. Дисперсия D(X) непрерывной случайной величины, заданной на интервале (a, b), определяется формулой

А) $D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-(M(X))^2$ В) $D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2 dx$

Б) $D(X)=\int_a^b (x-M(X))\cdot f(x)dx$ Г) $D(X)=\int_a^b (x-M(X))dx$

50. Графическая форма задания закона распределения случайной величины – это
А) парабола
Б) прямая линия
В) окружность
Г) полигон

51. Табличная форма задания закона распределения случайной величины называется
А) суммой распределения
Б) интегралом распределения
В) рядом распределения
Г) полем распределения

52. Дискретная случайная величина принимает …:
А) только множество целых значений
Б) только множество положительных значений
В) все значения из интервала $(-\infty; +\infty)$
Г) конечное или бесконечное счетное множество значений

53. Непрерывная случайная величина принимает
А) множество целых значений
Б) множество рациональных значений
В) конечное множество значений
Г) любое значение из конечного или бесконечного интервала

54. Если X – непрерывная случайная величина, a и b – конкретные значения, то отсюда следует, что
А) $P(a\le X<b) \ne P\{a<X\le b)$
Б) $P(a<X\le b) \ne P(a<X<b)$
В) $P(a<X<b) \ne P(a\le X\le b)$
Г) $P(a\le X<b) = P(a\le X\le b) = P(a<X\le b) = P(a<X<b)$

55. Если $f(x)$ – плотность распределения, то $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ равен
А) ∞
Б) –1
В) 0
Г) 1

56. Если $f(x)$ – плотность распределения, то $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ определяет
А) M(X)
Б) D(X)
В) σ (X)
Г) F(X)

57. Функция распределения случайной величины X задается формулой:
А) $F(x)=P(X>x)$
Б) $F(x)=P(X=x)$
В) $F(x)=P(X<x)$
Г) $F(x)=X$

58. Дискретная случайная величина, выражающая число появления события А в n независимых испытаниях, проводимых в равных условиях и с одинаковой вероятностью появления события в каждом испытании, называется распределенной по … :
А) нормальному закону
Б) по закону Пуассона
В) биномиальному закону
Г) по показательному закону

59. Если случайная величина имеет биномиальное распределение, n – число независимых испытаний, а p – вероятность наступления события, то математическое ожидание вычисляется по формуле
А) M(X)=n
Б) M(X)=p
В) M(X)=npq
Г) M(X)=np

60. Если случайная величина имеет биномиальное распределение, n – число независимых испытаний, а p – вероятность наступления события, то дисперсия случайной величины вычисляется по формуле
А) D(X)=npq
Б) D(X) = np
В) D(X) = n-p
Г) D(X) = p

61. Математическое ожидание равномерно распределенной случайной величины вычисляется по формуле
А) M(X)=$\frac{a-b}{2}$
Б) M(X)=$\frac{a+b}{2}$
В) M(X)=$\frac{b-a}{2}$
Г) M(X)=a+b

62. Дисперсия равномерно распределенной случайной величины вычисляется по формуле
А) D(X)=$b-a$
Б) D(X)=$b+a$
В) D(X)=$\frac{(b-a)^2}{12}$
Г) D(X)=$\frac{(b-a)}{12}$

63. Вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины в интервал $[\alpha;\beta] \subset [a,b]$ вычисляется по формуле:
А) $P(\alpha \le X \le \beta)=\frac{\alpha+\beta}{a+b}$
Б) $P(\alpha \le X \le \beta)=\frac{\alpha-\beta}{a+b}$
В) $P(\alpha \le X \le \beta)=\frac{\beta-\alpha}{a+b}$
Г) $P(\alpha \le X \le \beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}$

64. Плотность распределения случайной величины с показательным распределением имеет вид:
А) $f(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, x\ge 0\end{cases}$
В) $f(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ \lambda e^{\lambda x}, x\ge 0\end{cases}$
Б) $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x<0,\\ 0, x\ge 0\end{cases}$
Г) $f(x)=e^{\lambda x}$

65. Функция распределения случайной величины с показательным распределением имеет вид:
А) $F(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ e^{\lambda x}, x\ge 0\end{cases}$
В) $F(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ 1-e^{\lambda x}, x\ge 0\end{cases}$
Б) $F(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, x\ge 0\end{cases}$
Г) $F(x)=e^{\lambda x}$

66. У показательного распределения математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение
А) всегда различны
Б) всегда различаются на единицу
В) всегда равны

67. Функция плотности нормального распределения с математическим ожиданием а и средне – квадратическим отклонением δ задается формулой:
А) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$
В) $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma}}$
Б) $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$
Г) $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}$

68. График плотности нормального распределения называется
А) кривой Гаусса
Б) кривой Бернулли
В) кривой Пауссона
Г) кривой Лапласа

69. В точке x=a кривая Гаусса имеет

А) точку перегиба
Б) точку минимума
В) точку разрыва
Г) точку максимума

70. Точки $x_1 = a - \sigma$ и $x_2 = a + \sigma$ являются для кривой Гаусса
А) точками перегиба
Б) точками максимума
В) точками минимума
Г) точками разрыва

71. Параметрами нормального распределения являются:
А) математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение
Б) функция распределения и функция плотности распределения
В) функция $p(x)$ и $\Phi(x)$
Г) дисперсия и среднеквадратическое отклонение

72.Число сочетаний C_{12}^3 равно
А) 1320
Б) 6
В) 240
Г) 220

73. Число размещений A_6^3 равно
А) 20
Б) 120
В) 720
Г) 360

74. В отделе из 15 человек нужно выбрать начальника отдела, его заместителя и профорга. Число способов равно
А) 455
Б) 2730
В) 1320
Г) 620

75. Вероятность $P(A)$=0,8, тогда $P(\overline{A})$ равна
А) 0,7
Б) 0,4
В) 0,2
Г) 0,5

76. На склад поступает продукция трех цехов. Доли цехов соответственно равны: 1) 30%; 2) 50%; 3) 20%. Процент брака в продукции первого цеха 4%, второго цеха 6%, третьего – 8%. Полная вероятность того, что случайно взятое на складе изделие – бракованное, равна
А) 0,025
Б) 0,058
В) 0,03
Г) 0,045

77. Вероятность того, что размер изделия не соответствует стандарту, равна 0,7. Вероятность того, что вес изделия не соответствует стандарту, равна 0,6. Вероятность, что изделие не стандартно, равна
А) 0,8
Б) 0,62
В) 0,88
Г) 0,53

78. Вероятность того, что студент Иванов сдаст сессию на «отлично», равна 0,7. Вероятность, что студент Петров сдаст сессию на «отлично», равна 0,6. Вероятность, что оба студента станут отличниками, равна
А) 0,51
Б) 0,42
В) 0,24
Г) 0,31

79. Вероятность наступления каждого из трех событий p=0,8. Вероятность наступления хотя бы одного из них равна
А) 0,995
Б) 0,992
В) 0,904
Г) 0,97

80. В корзине 5 красных и 8 зеленых яблок. Извлекается одно яблоко и съедается. Вероятность второй раз извлечь красное яблоко, если в первый раз извлечено красное, равна
А) 7/8
Б) 1/3
В) 5/8
Г) 5/39

81. Осенью в речной порт Казани приходят пассажирские суда только из трех городов: Нижнего Новгорода, Москвы и Самары. Вероятность прибытия из Москвы равна 0,1, из Нижнего Новгорода – 0,6. Вероятность прибытия из Самары равна
А) 0,2
Б) 0,5
В) 0,4
Г) 0,3

82. Брошены 2 игральные кости. Вероятность, что сумма очков равна 7, есть
А) 5/36
Б) 7/36
В) 1/9
Г) 1/6

83. В первом ящике находятся шары с номерами 1-5 во втором – с номерами 6-10. Из каждого ящика вынули по 1 шару. Какова вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров не меньше 7?
А) 1
Б) 0
В) 1/2
Г) 1/10

84. В урне 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Вынули один шар, какова вероятность того, что белый или черный?
А) 5/14
Б) 25/45
В) 9/14
Г) 3/14

85. Три стрелка, независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75, для второго –0,8 и для третьего – 0,9. Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель.
А) 0,995
Б) 0,005
В) 1
Г) 0,54

86. В классе 12 мальчиков и 18 девочек. Нужно выбрать делегацию из 2-х человек. Какова вероятность (при случайном выборе) выбрать двух мальчиков?
А) 22/145
Б) 51/145
В) 72/145
Г) 24/145

87. Вероятность попадания стрелком в цель 0,7, сделано 25 выстрелов, определить наивероятнейшее число попаданий.
А) 17
Б) 18
В) нет правильного ответа
Г) 19

88. Рабочий за смену может изготовить 120 деталей. Вероятность того, что это изделия высшего сорта 0,94. Определить наивероятнейшее число изделий высшего сорта, изготовленных рабочим.
А) 114
Б) 112
В) 113
Г) нет правильного ответа

89. Если $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = 10$, а $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 3$, то дисперсия случайной величины равна
А) 1
Б) 3
В) 5
Г) 7

90. Если $\sigma(X) = 3$, $\sigma(Y) = 2$, то $D(X) - D(Y)$ равна
А) 1
Б) 5
В) 13
Г) 16

91. Если $\sigma(X) = 2$, $\sigma(Y) = 1$, то $D(X) + D(Y)$ равна
А) 1
Б) 3

В) 5
Г) 9

92. Если D(X)=4; а D(Y)=1, то $\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)$ равно
А) 1
Б) 3
В) 5
Г) 17

93. Если $\sigma(X)=2$, $\sigma(Y)=1$, то $D(X–Y)$ равна
А) 1
Б) 3
В) 5
Г) 7

94. Случайная величина равномерно распределена на отрезке [2,6]. Ее дисперсия равна
А) 1/7
Б) 3
В) 4/3
Г) 2

95. Если ξ имеет распределение Бернулли с параметрами $n=100$, $p=0{,}3$, то верны оба равенства
А) $M\xi=30$, $D\xi=21$
Б) $M\xi=21$, $D\xi=30$
В) $M\xi=31$, $D\xi=20$

96. Пусть $M\xi=2$, $M\eta$=3. Тогда $M(5\xi-2\eta)$ равно
А) 4
Б) 16
В) 11

97. Плотность распределения нормальной случайной величины имеет вид $f_\xi(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-8)^2}{32}}$. Тогда верны равенства
А) $M\xi=8;\quad D\xi=16$
Б) $M\xi=4;\quad D\xi=8$

В) $M\xi=8;\quad D\xi=32$
Г) $M\xi=8;\quad D\xi=4$

98. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид $f_\xi(x)=\begin{cases}5e^{-5x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$. Тогда верны равенства
А) $M\xi=\frac{1}{5};\quad D\xi=\frac{1}{25}$
Б) $M\xi=\frac{1}{5};\quad D\xi=\frac{1}{5}$
В) $M\xi=\frac{1}{25};\quad D\xi=\frac{1}{25}$

ТЕМА 2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

99. Генеральная совокупность – это …
А) вся исследуемая совокупность объектов
Б) совокупность случайно отобранных объектов
В) совокупность объектов, выбранных через определенный интервал
Г) совокупность из непересекающихся групп

100. Выборочная совокупность – это …
А) совокупность из непересекающихся групп
Б) совокупность случайно отобранных объектов
В) вся исследуемая совокупность объектов
Г) совокупность объектов, выбранных через определенный интервал

101. Объем выборки – это …
А) число, равное количеству объектов генеральной или выборочной совокупности
Б) число, равное среднему арифметическому объектов
В) число, равное максимальному значению совокупности
Г) число, равное минимальному значению совокупности

102. При повторном отборе зарегистрированные и обследованные единицы
А) вновь возвращаются в генеральную совокупность и снова могут принять участие в дальнейшем отборе
Б) в генеральную совокупность не возвращаются

В) в генеральную совокупность возвращаются, но принять участие в дальнейшем отборе не могут
Г) помечаются специальным знаком

103. При бесповторном отборе зарегистрированные и обследованные единицы
А) возвращаются в генеральную совокупность
Б) не возвращаются в генеральную совокупность
В) возвращаются в генеральную совокупность и могут принять участие в дальнейшем отборе
Г) либо возвращаются, либо не возвращаются в генеральную совокупность

104. Графическая форма задания закона распределения случайной величины – это
А) парабола
Б) прямая линия
В) окружность
Г) полигон

105. … – это наиболее часто встречающееся значение варианты.
А) медиана
Б) мода
В) размах варьирования
Г) среднее значение

106. … – это варианта, которая делит вариационный ряд на две равные части
А) медиана
Б) мода
В) размах варьирования
Г) среднее значение

107. … – это разность между наибольшей и наименьшей вариантой
А) медиана
Б) мода
В) размах варьирования
Г) среднее значение

108. Формула Стерджесса имеет вид …
А) k=3,32 lg$n$
Б) k=1+3,32 lg$n$

В) k=1-3,32 lg$n$

109. Выборочная средняя вычисляется по формуле

А) $\bar{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i$

Б) $\bar{x}_B = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i$

В) $\bar{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_i$

110. Выборочная дисперсия вычисляется по формуле

А) $D_B = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_B)^2 \cdot n_i$

Б) $D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_B)^2 \cdot n_i$

В) $D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_B) \cdot n_i$

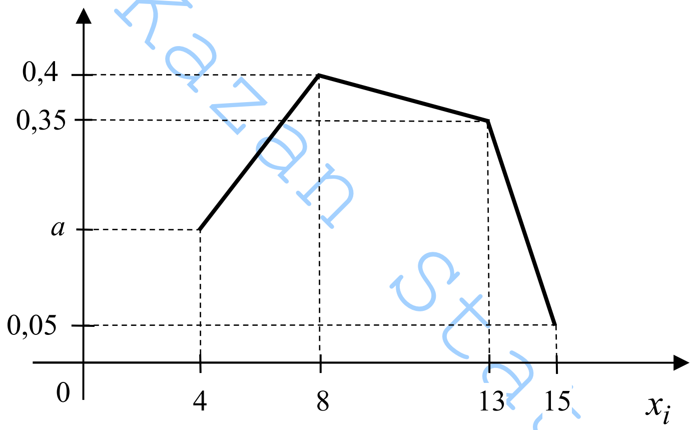
111. При выборочном обследовании некоторой совокупности, полученной случайным способом, были получены следующие данные:

x	10-20	20-30	30-40	40-50
m	10	40	30	20

Выборочная средняя равна
А) 28
Б) 29
В) 30
Г) 31

112. По выборке объема $n = 100$ построен полигон относительных частот:

$\frac{n_i}{n}$



Тогда значение a равно…
А) 0,15
Б) 0,2
В) 0,04
Г) 0,8

113. Из генеральной совокупности X извлечена выборка объема $n = 20$:

$x_i - x_{i+1}$	1-3	3-5	5-7
n_i	3	n_2	11

Тогда относительная частота w_2 равна…
А) 7
Б) 6
В) 0,3
Г) 0,35

114. Мода вариационного ряда

x_i	0	1	2
n_i	14	16	10

равна…
А) 10
Б) 16
В) 2
Г) 1

115. Медиана вариационного ряда 0,1,1,1,2,2,3,4,4 равна…
А) 2
Б) 1
В) 4
Г) 3

116. Размах варьирования вариационного ряда 3,4,6,6,7,8,8,8 равен…
1) 6
2) 8
3) 11
4) 5

117. Средняя выборочная вариационного ряда 1, 2, 3, 3, 4, 5 равна…
1) 3
2) 3,6
3) 2,5
4) 6

118. Из генеральной совокупности X извлечена выборка:

x_i	1	2	3	4
n_i	16	12	8	14

Тогда выборочная средняя равна…
1) 2,5
2) 0,2
3) 2,4
4) 30

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0264	0258	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,24	0,0948	0,48	0,1844	0,72	0,2642
0,01	0,0040	0,25	0,0987	0,49	0,1879	0,73	0,2673
0,02	0,0080	0,26	0,1026	0,50	01915	074	0,2703
0,03	0,0120	0,27	0,1064	0,51	0,1950	0,75	0,2734
0,04	0,0160	0,28	0,1103	0,52	0,1985	0,76	0,2764
0,05	0,0199	0,29	0,1141	0,53	0,2019	0,77	0,2794
0,06	0,0239	0,30	0,1179	0,54	0,2054	0,78	0,2823
0,07	0,0279	0,31	0,1217	0,55	0,2088	0,79	0,2852
0,08	0,0319	0,32	0,1255	0,56	0,2123	0,80	0,2881
0,09	0,0359	0,33	0,1293	0,57	0,2157	0,81	0,2910
0,10	0,0398	0,34	0,1331	0,58	0,2190	0,82	0,2939
0,11	0,0438	0,35	0,1368	0,59	0,2224	0,83	0,2967
0,12	0,0478	0,36	0,1406	0,60	0,2257	0,84	0,2995
0,13	0,0517	0,37	0,1443	0,61	0,2291	0,85	0,3023
0,14	0,0557	0,38	0,1480	0,62	0,2324	0,86	0,3051
0,15	0,0596	0,39	0,1517	0,63	0,2357	0,87	0,3078
0,16	0,0636	0,40	0,1554	0,64	0,2389	0,88	0,3106
0,17	0,0675	0,41	0,1591	0,65	0,2422	0,89	0,3133
0,18	0,0714	0,42	0,1628	0,66	0,2454	0,90	0,3159
0,19	0,0753	0,43	0,1664	0,67	0,2486	0,91	0,3186
0,20	0,0793	0,44	0,1700	0,68	0,2517	0,92	0,3212
0,21	0,0832	0,45	0,1736	0,69	0,2549	0,93	0,3238
0,22	0,0871	0,46	0,1772	0,70	0,2580	0,94	0,3264
0,23	0,0910	0,47	0,1808	0,71	0,2611	0,95	0,3289
0,96	0,3315	1,37	0,4147	1,78	0,4625	2,36	0,4909
0,97	0,3340	1,38	0,4162	1,79	0,4633	2,38	0,4913
0,98	0,3365	1,39	0,4177	1,80	0,4641	2,40	0,4918
0,99	0,3389	1,40	0,4192	1,81	0,4649	2,42	0,4922
1,00	0,3413	1,41	0,4207	1,82	0,4656	2,44	0,4927
1,01	0,3438	1,42	0,4222	1,83	0,4664	2,46	0,4931
1,02	0,3461	1,43	0,4236	1,84	0,4671	2,48	0,4934
1,03	0,3485	1,44	0,4251	1,85	0,4678	2,50	0,4938
1,04	0,3508	1,45	0,4265	1,86	0,4686	2,52	0,4941
1,05	0,3531	1,46	0,4279	1,87	0,4693	2,54	0,4945
1,06	0,3554	1,47	0,4292	1,83	0,4699	2,56	0,4948
1,07	0,3577	1,48	0,4306	1,89	0,4706	2,58	0,4951

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,08	0,3599	1,49	0,4319	1,90	0,4713	2,60	0,4953
1,09	0,3621	1,50	0,4332	1,91	0,4719	2,62	0,4956
1,10	0,3643	1,51	0,4345	1,92	0,4726	2,64	0,4959
1,11	0,3665	1,52	0,4357	1,93	0,4732	2,66	0,4961
1,12	0,3686	1,53	0,4370	1,94	0,4738	2,68	0,4963
1,13	0,3708	1,54	0,4382	1,95	0,4744	2,70	0,4965
1,14	0,3729	1,55	0,4394	1,96	0,4750	2,72	0,4967
1,15	0,3749	1,56	0,4406	1,97	0,4756	2,74	0,4969
1,16	0,3770	1,57	0,4418	1,98	0,4761	2,76	0,4971
1,17	0,3790	1,58	0,4429	1,99	0,4767	2,78	0,4973
1,18	0,3810	1,59	0,4441	2,00	0,4772	2,80	0,4974
1,19	0,3830	1,60	0,4452	2,02	0,4783	2,82	0,4976
1,20	0,3849	1,61	0,4463	2,04	0,4793	2,84	0,4977
1,21	0,3869	1,62	0,4474	2,06	0,4803	2,86	0,4979
1,22	0,3883	1,63	0,4484	2,08	0,4812	2,88	0,4980
1,23	0,3907	1,64	0,4495	2,10	0,4821	2,90	0,4981
1,24	0,3925	1,65	0,4505	2,12	0,4830	2,92	0,4982
1,25	0,3944	1,66	0,4515	2,14	0,4838	2,94	0,4984
1,26	0,3962	1,67	0,4525	2,16	0,4846	2,96	0,4985
1,27	0,3980	1,68	0,4535	2,18	0,4854	2,98	0,4986
1,28	0,3997	1,69	0,4545	2,20	0,4861	3,00	0,49865
1,29	0,4015	1,70	0,4554	2,22	0,4868	3,20	0,49931
1,30	0,4032	1,71	0,4564	2,24	0,4875	3,40	0,49966
1,31	0,4049	1,72	0,4573	2,26	0,4881	3,60	0,499841
1,32	0,4066	1,73	0,4582	2,28	0,4887	3,80	0,499928
1,33	0,4082	1,74	0,4591	2,30	0,4893	4,00	0,499968
1,34	0,4099	1,75	0,4599	2,32	0,4898	4,50	0,499997
1,35	0,4115	1,76	0,4608	2,34	0,4904	5,00	0,499997
1,36	0,4131	1,77	0,4616				

Приложение 3

Таблица значений функции $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	231	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Приложение 4

Таблица значений функции $q = q(\gamma, n)$

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Приложение 5

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Битнер Г.Г. Теория вероятностей / Г.Г. Битнер. – Ростов н/Д: ФЕНИКС, 2012. – 329, [1]с.: ил. – (Высшее образование).
2. Киселева Н.Г., Зиннатуллина А.Н., Еникеева С.Р. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебно-методическое пособие / Н.Г. Киселева, А.Н. Зиннатуллина, С.Р. Еникеева. Казань: Изд-во Казанского ГАУ, Казань, 2014. – 133 с.
3. Киселева Н.Г. Математические методы обработки данных: Методические указания для практ. и самост. работ / Н.Г. Киселева. Казань: Изд-во Казанского ГАУ, 2016. – 54с.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Дмитрий Письменный. – 3-е изд.– М.: Айрис-пресс, 2008. – 288 с.: ил. – (Высшее образование).
5. Семенов В.А. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие. Стандарт третьего поколения. – СПб.: Питер, 2013. – 192 с.: ил.
6. Сборник задач по высшей математике. 2 курс/ К.Н.Лунгу и др.; под. Ред. С.Н.Федина.- 6-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 592 с.:ил. – (Высшее образование)
7. Шапкин А.С. Задачи по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию с решениями: Учебное пособие / А.С. Шапкин, В.А Шапкин. – 7-е изд., – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2010. – 432 с.