Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Казанский государственный аграрный университет

Кафедра физики и математики

МАТЕМАТИКА
Часть 2
«Комплексные числа. Ряды. Дифференциальные уравнения»

Учебно-методическое пособие

Казань, 2018

УДК 51 (07)
ББК 22.1Р

Печатается по решению Методического совета Казанского ГАУ
протокол № 1 от 01.10.2018

Авторы-составители: Зиннатуллина А.Н., Киселева Н.Г., ИбятовР.И., Газизов Е.Р.

Рецензенты: к.т.н., доцент Казанского ГАУ Шайхутдинов Р.Р.;
к.п.н., доцент КФУ Галиуллин Д.Х.

Математика. Часть 2. «Комплексные числа. Ряды. Дифференциальные уравнения»: учебно-методическое пособие / А.Н. Зиннатуллина, Н.Г. Киселева, Р.И. Ибятов, Е.Р. Газизов. – Казань: Изд-во Казанского ГАУ, 2018. – 64 с.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы во внеаудиторное время по дисциплине «Математика». Пособие способствует формированию общепрофессиональных компетенций у студентов, обучающихся по всем направлениям подготовки бакалавриата и специалитета Казанского ГАУ и соответствует требованиям ФГОС ВО. Оно содержит краткие теоретические сведения, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения и типовые тестовые задания для текущего контроля.

Учебно-методическое пособие обсуждено и рекомендовано к печати на заседании кафедры физики и математики Казанского ГАУ **протокол №8 от 11.04.2018г.**

Рассмотрено, одобрено и рекомендовано в печать на заседании Методической комиссии ИМ и ТС **протокол №1 от 20.09.2018**

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие по теме «Комплексные числа. Ряды. Дифференциальные уравнения» составлены в соответствии с программой по курсу высшей математики для студентов всех специальностей и направлений подготовки, изучающих дисциплину «Математика». Пособие является продолжением учебно-методического пособия «Математика. Часть 1», в которой были изложены следующие разделы высшей математики: элементы линейной и векторной алгебры, аналитическая геометрия на плоскости, введение в анализ, интегральное исчисление функций одной независимой переменной и функции нескольких переменных.

В структуру учебно-методического пособия входят методические рекомендации по работе с данным пособием, необходимый теоретический материал, содержащий основные определения, теоремы, разобранные типовые задания. После каждой темы приведены задания для выполнения во время практических (аудиторных) занятий и во внеаудиторное время самостоятельно. В конце пособия приведены типовые тестовые задания по изложенным выше разделам высшей математики для текущего контроля знаний студентов.

Материалы, изложенные в пособии, помогут студентам систематизировать и закрепить полученные на аудиторных занятиях по математике теоретические знания, сформировать практические навыки, активизировать учебно-познавательную деятельность.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РАБОТЕ С УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИМ ПОСОБИЕМ

Прежде чем приступить к выполнению задач, представленных в данном учебно-методическом пособии, необходимо ознакомиться с рекомендациями по работе с ним.

Главное, при изучении математики – умение ***мыслить***, ***анализировать***, ***рассуждать***, и, конечно же, ***решать задачи***. Последовательно выполняя задания из предложенного пособия, студент освоит материал важных разделов математики, без знания которых невозможно стать хорошим специалистом в своей профессии.

До начала выполнения заданий рекомендуется внимательное изучение теоретического материала по данной теме из конспекта лекций или предложенного преподавателем учебника. Краткое содержание теории представлено и в данном пособии, которым также можно руководствоваться при решении задач.

Внимательное изучение темы требует неоднократного прочтения теоретического материала. При первом прочтении нужно ставить цель - ***понять***, а не запомнить. Обычно для достижения хорошего понимания материала одного прочтения недостаточно. К тому же часто приходится, полистав книгу или конспект лекций, вспомнить ранее изученный материал. Далее рекомендуется по памяти повторить формулировки основных определений, правил, теорем из изученной темы и разобраться в решении типовых заданий, представленных в данном пособии.

После успешного изучения теории, разбора типовых заданий можно приступать к самостоятельному решению задач по данной тематике. Если у студента в ходе выполнения задачи появятся вопросы или затруднения, он всегда может обратиться за консультацией к преподавателю. При решении задачи студент должен не только решить ее, но и грамотно оформить решение. Оформление задачи включает в себя: запись исходных данных, что требуется найти по условию задачи, решение задачи с указанием используемых формул и теорем, запись ответа.

В конце пособия представлены типовые тестовые задания для текущего контроля знаний студентов по дисциплине «Математика», обучающихся по всем направлениям подготовки бакалавриата и специалитета Казанского ГАУ.

ТЕМА 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

2.1 Основные понятия

Комплексным числом z называется выражение вида $z=x+iy$, где x и y – любые действительные числа. Число x называется ***действительной частью*** комплексного числа и обозначается $Re\ z$, число y – ***мнимой частью*** комплексного числа и обозначается $Im\ z$, i – мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$.

Выражение $z=x+iy$ называется ***алгебраической формой*** записи комплексного числа; знаки между составляющими числа – обычные знаки операций сложения и умножения, которые обладают теми же свойствами, что и в действительной области.

Из определения следует, что действительные числа можно рассматривать как частный случай комплексных, то есть при $y=0$ получаем $z=x$ – действительное число. Число $z=iy$ называется чисто мнимым.

Два комплексных числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ равны, если $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$.

Комплексное число $x-iy$ называется ***сопряженным*** комплексному числу $x+iy$ и обозначается $\bar{z}$. Свойство комплексно сопряженных чисел: $z\cdot\bar{z}=x^2+y^2$.

Комплексное число $z=x+iy$ изображается в плоскости XOY точкой M с координатами $(x; y)$, либо вектором, начало которого находится в точке $O(0; 0)$, а конец – в точке $M(x; y)$ (рис. 1.1). Плоскость XOY называется комплексной плоскостью. Ось OX называется действительной осью, ось OY – мнимой осью. Длина r вектора $\overline{OM}$ называется модулем числа и обозначается $|z|$, так что $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

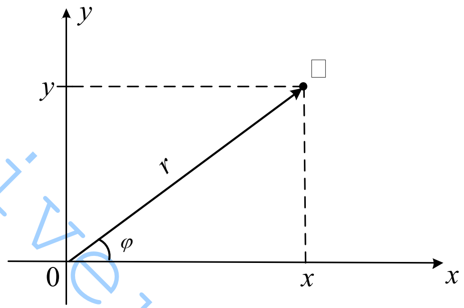

Рис. 1.1

Угол φ, образованный вектором $\overline{OM}$ с осью OX, называется ***аргументом*** комплексного числа z и обозначается $\varphi = Arg\, z$. Он определяется неоднозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π:

$$Arg\, z = \arg z + 2\pi k \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; ...),$$

где *argz* есть главное значение *Argz*, определяемое условиями $-\pi \le \arg z \le \pi$, причем

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, \text{если } x > 0; \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, \text{если } x < 0, y \ge 0; \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x}, \text{если } x < 0, y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{если } x = 0, y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{если } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Аргумент числа z=0 – величина неопределенная.

При решении примеров удобно пользоваться схемой, которая изображена на рис. 1.2.

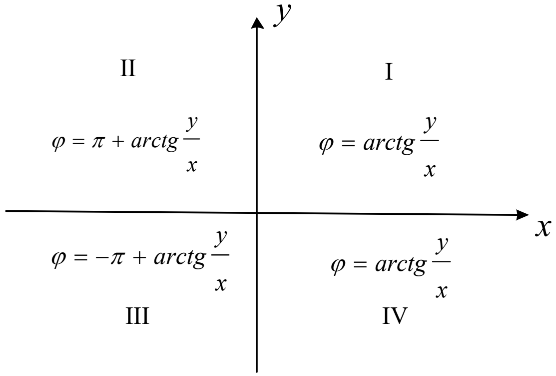

Рис.1.2

Имеют место следующие соотношения:

$$tg\varphi = \frac{y}{x}, \ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Два комплексных числа z_1 и z_2 равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а их аргументы отличаются на величину, кратную 2π:

$$|z_1| = |z_2|, \ Arg\, z_1 = Arg\, z_2 + 2\pi n \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2; ...).$$

1.2 Действия над комплексными числами

Пусть $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ – два комплексных числа. Сумма $z_1 + z_2$, разность $z_1 - z_2$, произведение $z_1 \cdot z_2$ и частное $\dfrac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \ne 0)$ комплексных чисел z_1 и z_2 вычисляются по формулам:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Сложение и умножение комплексных чисел коммутативно и ассоциативно, умножение дистрибутивно относительно сложения.

Действительная часть *Rez* и мнимая часть *Imz* комплексного числа z выражаются через сопряженные числа следующим образом:

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{z + \overline{z}}{2}; \ \mathrm{Im}\, z = i\frac{\overline{z} - z}{2} = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

1.3 Формы записи комплексных чисел

В зависимости от решаемой задачи применяются различные формы записи комплексного числа.

Алгебраическая форма: $z = x + iy$.

Показательная форма: $z = re^{i\varphi}$, где $r = |z|$ и $\varphi = Arg\, z$ – одно из значений *Arg* z.

Функция $e^{i\varphi}$ обладает всеми свойствами показательной формы.

Тригонометрическая форма: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где r и φ имеют тот же смысл, что и в показательной форме.

Переход от показательной формы к тригонометрической и обратный осуществляется на основе формулы Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Два комплексных числа, записанные в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на $2\pi k$ ($k \in Z$).

Произведением и частным двух отличных от нуля комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, записанных в тригонометрической форме, являются числа:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

n-ая степень комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ вычисляется по формуле Муавра:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Корнем n-ой степени из комплексного числа z называется комплексное число w, удовлетворяющее уравнению:

$$w^n = z.$$

Все решения этого уравнения обозначаются $\sqrt[n]{z}$ и для числа z, записанного в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, вычисляются по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $r = |z|$, $\varphi = Arg\, z$.

Точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $R = \sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

1.4 Решение типового задания

Пример 1. Найти $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2, \dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 2 - 3i, z_2 = 2 + i$.

Решение.

1) $z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (2 + i) = (2 + 2) + i(-3 + 1) = 4 - 2i$;

2) $z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (2 + i) = (2 - 2) + i(-3 - 1) = 0 + i \cdot (-4) = -4i$;

3) $z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (2 + i) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot i + (-3i) \cdot 2 + (-3i) \cdot i = 4 + 2i - 6i - 3i^2 =$
$= 4 - 4i + 3 = 7 - 4i$;

4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2 - 3i}{2 + i} = \dfrac{2 - 3i}{2 + i} \cdot \dfrac{2 - i}{2 - i} = \dfrac{2 \cdot 2 - 2 \cdot i - 3i \cdot 2 + 3i \cdot i}{2^2 + 1^2} = \dfrac{4 - 8i - 3}{4 + 1} = \dfrac{1 - 8i}{5} =$
$= \dfrac{1}{5} - \dfrac{8}{5}i.$

Пример 2. Дано число $z = -8 - 8\sqrt{3}i.$. а) Представить z в тригонометрической и показательной формах. б) Вычислить z^3. в) Вычислить все корни $\sqrt[4]{z}$.

Решение.

а) Вычислим модуль и аргумент числа z.

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-8\sqrt{3})^2} = 16$. Так как $x = -8 < 0$, $y = -8\sqrt{3} < 0$, то угол $\varphi = arctg\dfrac{y}{x} - \pi = arctg\sqrt{3} - \pi = -\dfrac{2\pi}{3}$. Следовательно, в тригонометрической форме число z имеет вид:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 16(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3})),$$

а в показательной

$$z = 16 \cdot e^{-\frac{2\pi}{3}i}.$$

б) Воспользуемся представлением числа z в тригонометрической форме и вычислим по формуле Муавра

$$z^3 = |z|^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = 16^3\left(\cos\left((-\frac{2\pi}{3}) \cdot 3\right) + i\sin\left((-\frac{2\pi}{3}) \cdot 3\right)\right) =$$

$$= 16^3(\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)) = 4096.$$

в) Теперь вычислим

$$\sqrt[4]{-8 - 8\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{16\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)\right)} =$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4}\right)\right) \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Положим последовательно k=0, 1, 2, 3. Получим четыре корня:

$$w_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} - i,$$

$$w_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 1 + \sqrt{3}i,$$

$$w_3 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -\sqrt{3} + i,$$

$$w_4 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -1 - \sqrt{3}i.$$

Задачи для самостоятельного решения №301-330.

Найти $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2, \dfrac{z_1}{z_2}$, если

301. $z_1 = -2 - 3i,\ z_2 = 1 + 2i;$
302. $z_1 = 3 - 2i,\ z_2 = 2 - i;$
303. $z_1 = 2 + 4i,\ z_2 = -2 - 3i;$
304. $z_1 = -3 + 4i,\ z_2 = 1 + 3i;$
305. $z_1 = 1 - 2i,\ z_2 = 3 - 3i;$
306. $z_1 = -1 - 3i,\ z_2 = -3 + 2i;$
307. $z_1 = 4 + i,\ z_2 = 1 - 3i;$
308. $z_1 = -4 + i,\ z_2 = -1 - 3i;$
309. $z_1 = 2 - 2i,\ z_2 = 4 + 2i;$
310. $z_1 = -3 - 3i,\ z_2 = 2 - 3i;$
311. $z_1 = -2 + 3i,\ z_2 = -4 - 2i;$
312. $z_1 = 3 + 2i,\ z_2 = 2 - 4i;$
313. $z_1 = -1 - 3i,\ z_2 = 3 + i;$
314. $z_1 = 1 - 2i,\ z_2 = 2 - 4i;$
315. $z_1 = -4 + 4i,\ z_2 = 1 - i;$
316. $z_1 = 4 + 4i,\ z_2 = -1 + i;$
317. $z_1 = -2 - i,\ z_2 = -4 + 3i;$
318. $z_1 = 3 - i,\ z_2 = -2 - 3i;$
319. $z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = 3 - 2i;$
320. $z_1 = -3 + 2i,\ z_2 = 3 - 4i;$

321. $z_1 = 4 + 4i,\ z_2 = -1 - i;$
322. $z_1 = -2 - 2i,\ z_2 = 4 - 2i;$
323. $z_1 = -2 + 2i,\ z_2 = 3 + 2i;$
324. $z_1 = -3 + 2i,\ z_2 = -2 - 4i;$
325. $z_1 = -3 - 2i,\ z_2 = -2 + i;$
326. $z_1 = 3 - 4i,\ z_2 = -1 - 3i;$
327. $z_1 = -2 + 3i,\ z_2 = 1 - 2i;$
328. $z_1 = -2 + 3i,\ z_2 = -1 - 2i;$
329. $z_1 = 3 + 2i,\ z_2 = -1 - 2i;$
330. $z_1 = -4 + 2i,\ z_2 = -3 + 2i.$

Задачи для самостоятельного решения №331-360.

Дано число z. а) Представить z в тригонометрической и показательной формах. б) Вычислить z^6. в) Вычислить все корни $\sqrt[3]{z}$.

331. $z = \sqrt{3} + i;$
332. $z = 1 + \sqrt{3}i;$
333. $z = 2 + 2i;$
334. $z = -2\sqrt{3} + 2i;$
335. $z = -2 + 2\sqrt{3}i;$
336. $z = 3 - 3i;$
337. $z = 3\sqrt{3} - 3i;$
338. $z = 3 - 3\sqrt{3}i;$
339. $z = -4 - 4i;$
340. $z = -4\sqrt{3} - 4i;$
341. $z = -4 - 4\sqrt{3}i;$
342. $z = -5 + 5i;$
343. $z = 5\sqrt{3} + 5i;$
344. $z = 5 + 5\sqrt{3}i;$
345. $z = 6 + 6i;$
346. $z = -6\sqrt{3} + 6i;$
347. $z = -6 + 6\sqrt{3}i;$
348. $z = -6 + 6i;$

349. $z=7\sqrt{3}+7i;$

350. $z=7-7\sqrt{3}i;$

351. $z=1-\sqrt{3}i;$

352. $z=-2-2\sqrt{3}i;$

353. $z=\sqrt{3}-i;$

354. $z=-\sqrt{3}+i;$

355. $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;$

356. $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;$

357. $z=-\sqrt{3}-i;$

358. $z=-5\sqrt{3}+5i;$

359. $z=-5\sqrt{3}-5i;$

360. $z=-3\sqrt{3}+3i.$

ТЕМА 2. РЯДЫ

2.1 Числовой ряд. Основные понятия

Числовым рядом называется выражение вида

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,, \qquad (2.1)$$

при этом числа $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ называются ***членами*** ряда, а число a_n - ***общим членом*** ряда.

Суммы вида $S_1=a_1, S_2=a_1+a_2,\ldots,S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n,\ldots$ называются ***частичными суммами*** ряда.

Числовой ряд называется ***сходящимся***, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$. В этом случае указанный предел называется суммой ряда.

Если же предел частичных сумм не существует, то ряд (2.1) называется ***расходящимся***.

***Необходимый признак* сходимости**. Если ряд (1.1) сходится, то его общий член стремится к нулю при $n\to\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Таким образом, если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$, то ряд (2.1) расходится.

2.2 Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

I. Признак сравнения

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ – ряды с положительными членами, причем $a_n\leq b_n$ для всех номеров n, начиная с некоторого. Тогда:

1) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$;

2) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.

II. Признак сравнения в предельной форме

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – ряды с положительными членами, причем существует конечный и отличный от нуля предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

III. Признак Даламбера

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд с положительными членами, и существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$

Тогда, если $l < 1$, то данный ряд сходится; если же $l > 1$, то – расходится. Если $l = 1$, то ряд может сходиться или расходиться; в этом случае требуется исследовать ряд с помощью других методов.

IV. Радикальный признак Коши

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд с положительными членами, и существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$

Тогда, если $l < 1$, то данный ряд сходится; если же $l > 1$, то – расходится. Если $l = 1$, то ряд может сходиться или расходиться; в этом случае требуется исследовать ряд с помощью других методов.

V. Интегральный признак Коши.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд с положительными членами, для которого существует положительная, непрерывная и монотонно убывающая на промежутке $[1, +\infty)$ функция $f(x)$ такая, что $f(n) = a_n, n = 1,2,...$.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

При исследовании рядов на сходимость часто используют следующие ***эталонные ряды***:

- *геометрический ряд*

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...,$$

составленный из членов бесконечный геометрический прогрессии со знаменателем q и первым членом $a \neq 0$. Если $|q| \geq 1$, то геометрический ряд расходится, если $|q| < 1$ – сходится (при этом его сумма S находится по формуле $S = \frac{a}{1-q}$).

- *гармонический ряд*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

который расходится.

- *ряд Дирихле*

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ... + \frac{1}{n^p} + ...,$$

где $p > 0$. Этот ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $0 < p \leq 1$. Частным случаем ряда Дирихле (при $p = 1$) является гармонический ряд.

2.3 Знакопеременные ряды. Основные понятия

Знакочередующимся рядом называется ряд, в котором любые два соседних члена имеют разные знаки. Таким образом, знакочередующийся ряд – это ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n+1} a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \qquad (2.2)$$

или

$$a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + ... + (-1)^n a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \qquad (2.3)$$

где все a_n – положительные действительные числа $(a_n > 0, n = 1,2,...)$.

Признак Лейбница. Пусть дан знакочередующийся ряд (вида (2.2) или (2.3). Если выполнены два условия:

1. $a_1 > a_2 > a_3 > ...a_n > ...$ (абсолютные величины членов ряда монотонно убывают);

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (общий член ряда стремится к нулю при $n \to \infty$), то ряд сходится.

Знакопеременным рядом называется ряд, содержащий и положительные и отрицательные члены. В частности, всякий знакочередующийся ряд является знакопеременным.

Теорема. Пусть дан знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где a_n – произвольные числа (действительные или комплексные). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из абсолютных величин его членов, сходится, то данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

В этом случае знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***абсолютно сходящимся***. Если же знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***условно сходящимся.***

2.4 Степенной ряд. Основные понятия

Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \qquad (2.4)$$

где точка $x = a$ – ***центр разложения***, a_n – ***коэффициенты ряда***.

Радиусом сходимости степенного ряда называется число R, если ряд (2.4) сходится при $|x-a| < R$ и расходится при $|x-a| > R$. При $|x-a| = R$ ряд может как сходится, так и расходится.

В частности, R может равняться нулю – в этом случае область сходимости ряда состоит из одной точки 0 (соответственно, a), или «$+\infty$» – в этом случае областью сходимости является вся числовая прямая (такой ряд называется еще *всюду сходящимся*).

Интервал $(a-R; a+R)$ называется ***интервалом сходимости*** степенного ряда (2.4).

Для вычисления радиуса сходимости R степенного ряда применяются формулы:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_n + 1`} \right| \qquad (2.5)$$

или

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad (2.6)$$

в тех случая, когда указанные пределы существуют.

2.5 Решение типового задания

<u>*Пример 1.*</u> Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$.

<u>*Решение.*</u> Найдем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n(2+\frac{1}{n})} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Необходимый признак не выполнен, значит, ряд расходится.

<u>*Пример 2.*</u> Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 1}{2^n}$.

Решение. Исследуем на сходимость, используя первый признак сравнения. Для сравнения рассмотрим ряд геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n$, который расходится, так как $q=\frac{5}{2}>1$.

В силу выполнения неравенства $\frac{5^n+1}{2^n}>\frac{5^n}{2^n}$ для всех натуральных n, следует, что исследуемый ряд также расходится по признаку сравнения.

Пример 3. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg(2n+3)}{n}$.

Решение. Проверяем сходимость ряда по признаку Даламбера. Так как общий член ряда $a_n=\frac{arctg(2n+3)}{n}$, то, заменяя в выражении n-го члена n на (n+1), находим $a_{n+1}=\frac{arctg(2n+5)}{n+1}$. Затем ищем предел отношения последующего члена a_{n+1} к предыдущему a_n при $n\to\infty$:

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot arctg(2n+5)}{(n+1)\,arctg(2n+3)}=1.$$

Поскольку полученный предел равен единице, признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Применим теперь признак сравнения в предельной форме. В качестве эталонного ряда выберем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и рассмотри предел:

$$k=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{arctg(2n+3)\cdot n}{n\cdot 1}=\lim_{n\to\infty}arctg(2n+3)=\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, исследуемый ряд является расходящимся, так как эталонный ряд с общим членом $b_n=1/n$ расходится (гармонический ряд).

Пример 4. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{9^n}$.

Решение. Проверяем сходимость ряда по признаку Даламбера, общий член которого $a_n=\frac{n!}{9^n}=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{9^n}$. Тогда $a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{9^{n+1}}=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}{9^n\cdot 9}$.

Рассмотрим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}{9^n\cdot 9}\cdot\frac{9^n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{9}=\infty>1.$$

Следовательно, ряд расходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3n+1}$.

Решение. Исследуем на сходимость по радикальному признаку Коши. Рассмотрим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{\frac{3n+1}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{1+\frac{1}{n}}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}<1.$$

Следовательно, ряд сходится по радикальному признаку Коши.

Пример 6. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

Решение. Проверяем сходимость ряда по интегральному признаку Коши.

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln(x+1)}\right)\Bigg|_1^b=\lim_{b\to\infty}-\left(\frac{1}{\ln(b+1)}-\frac{1}{\ln 2}\right)=\frac{1}{\ln 2}.$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится, а значит сходится и ряд.

Пример 7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение. Рассмотрим на сходимость ряд из абсолютных величин членов знакочередующегося ряда $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$, общий член которого имеет вид $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{1/2}}$. Получили обобщенный гармонический ряд, который расходится, так как $\alpha=\frac{1}{2}<1$. Итак, исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

Выясним, сходится ли данный знакочередующийся ряд, применяя признак Лейбница**.**

1) $1>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{4}}>\frac{1}{\sqrt{5}}>\ldots>\frac{1}{\sqrt{n}}$ (монотонно убывают);

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$.

Таким образом, для данного знакочередующегося ряда оба условия признака Лейбница выполнены, откуда следует, что исходный ряд сходится. Однако он не является абсолютно сходящимся, поэтому данный ряд сходится условно.

Пример 8. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{n}{3^n}$.

Решение.

Исследуем на сходимость ряд из абсолютных величин членов знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$, используя признак Даламбера.

Рассмотрим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^{n+1}}:\frac{n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{3^n}{3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}<1.$$

Следовательно, ряд из абсолютных величин сходится, а значит, исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 9. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}(x+2)^n$. Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

Решение. Радиус сходимости находим по формуле (2.5):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)((n+1)^2+1)}{(n+4)(n^2+1)}=1.$$

Интервал сходимости данного ряда определяется интервалом $|x+2|<1$ или $-1<x+2<1$, получаем $-3<x<-1$. Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

При $x=-1$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}(-1+2)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}$, расходимость которого может быть установлена с помощью предельного признака сравнения (эталонный ряд – гармонический).

При $x=-3$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}(-3+2)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+3}{n^2+1}$, который сходится по признаку Лейбница. Так как ряд, составленный из абсолютных членов данного ряда, т.е. ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}$, расходится, то исследуемый ряд сходится условно.

Таким образом, интервал сходимости исследуемого степенного ряда имеет вид $-3\le x<1$.

Задачи для самостоятельного решения №361-420.

Исследовать сходимости знакоположительных рядов:

361. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{5n^3+4n}$; **362.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n\cdot n!}$;

363. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+5}{2n^2+1}\right)^{n^3}$; **364.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^3 n}{n}$;

365. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+3}$; **366.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)!4^n}$;

367. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n}$;

368. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$;

369. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt{n^2+5}}$;

370. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot n^2}{(n+2)!}$;

371. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+1}{5n-2}\right)^{n^2}$;

372. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^5 n}{3n}$;

373. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^5+2}$;

374. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{(2n-1)!}$;

375. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n^2}$;

376. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$;

377. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+1}{4n^3+5n}$;

378. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n+2)!}$;

379. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$;

380. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$;

381. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{9+4n^2}}$;

382. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{2^n(3n+5)}$;

383. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$;

384. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^4 n}{n}$;

385. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{n^3+7}$;

386. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3n+3)!}$;

387. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{n^2}$;

388. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln n}}{n}$;

389. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$;

390. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)!}{10^n\cdot n^2}$;

391. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}$;

392. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{\ln n}}$;

393. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2}{n^3+3}$;

394. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(1+n)^2}{(n+3)!}$;

395. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^{n^2}$;

396. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{\ln n}}{6n}$;

397. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{3n+7}}$;

398. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{4^n(n-2)!}$;

399. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\cdot e^{-n}$;

400. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{6n}$;

401. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-5}{n^4+3n}$;

402. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3+n)!}{2^n}$;

403. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$;

404. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[5]{\ln n}}$;

405. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{5n+2}}$;

406. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n\cdot n^2}{n!}$;

407. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10n}{10n+5}\right)^{n^2}$;

408. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^5 n}$;

409. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{4n^3-1}$;

410. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot n^2}{(n+1)!}$;

411. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2}\right)^{n^3}$;

412. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{\ln^5 n}}$;

413. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{5n^5+2}$;

414. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n^2}{(3n+2)!}$;

415. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{3n-5}\right)^{n^2}$;

416. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln^3 n}}{n}$;

417. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\sqrt{n^2+2n+5}}$;

418. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot n!}{(3n+1)!}$;

419. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n^n}{(2n+1)^n}$; **420.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3}{n\ln^7 n}$.

Задачи для самостоятельного решения №421-450.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакочередующиеся ряды:

421. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$; **422.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

423. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{6n+5}$; **424.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n+1)\cdot n}$;

425. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}}$; **426.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{1}{(2n-1)\cdot 3^n}$;

427. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{n}}$; **428.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$;

429. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+5}}$; **430.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{3n-1}$;

431. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n+1}{n\cdot(n+1)}$; **432.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{2}{n^2\cdot(n+3)}$;

433. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{1}{3^n\cdot n!}$; **434.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{1}{2^n\cdot(n+2)!}$;

435. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{2n-1}{3n}$; **436.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{1}{2n^3-1}$;

437. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n+1}{5n\cdot(n+1)}$; **438.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n-1)^3}$;

439. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{1}{3n^2+1}$; **440.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n\cdot 5^n}$;

441. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{1}{n\cdot\sqrt{n}}$; **442.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}}$;

443. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{n}{9n+1}$; **444.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{3}{n^2+1}$;

445. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(n+1)\cdot(n+4)}$; **446.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{(n+3)!}{2^n}$;

447. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{2n^2}{n^4-n^2+1}$; **448.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{1}{5^n(n+1)!}$;

449. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{1}{(2n)!\cdot 5^n}$; **450.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n\cdot(n+4)!}$.

Задачи для самостоятельного решения №451-480.

Найти интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость ряда на концах интервала.

451. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{4^n\cdot n^2}$; **452.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 9^n}$;

453. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$; **454.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{3^n(5n+2)}$;

455. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{3^n(2n+1)}$; **456.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+6)^n}{(3n+1)\cdot 3^n}$;

457. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{(n+3)\cdot 2^n}$; **458.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{(n+1)^2 2^n}\cdot(x-3)^n$;

459. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{(4n+1)\cdot 3^n}$; **460.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{(3n-1)\cdot 2^n}$;

461. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(n+1)\cdot 5^n}$; **462.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(x+1)^n}{(n+3)^2\cdot 2^n}$;

463. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{(n+2)\cdot 3^n}$; **464.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n\cdot(x-2)^n}{(5n-8)\cdot 4^n}$;

465. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(n^2+1)\cdot 7^n}$; **466.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{3n\cdot 5^n}$;

467. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$; **468.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(4n-1)\cdot 2^n}$;

469. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(n+1)^2\cdot 2^n}$; **470.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(3n+1)\cdot 3^n}$;

471. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot(x+3)^n}{5^n(n+1)}$;

472. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{(2n-1)\cdot 4^n}$;

473. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{8^n(n+3)}\cdot(x+4)^n$;

474. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-1)2^n}\cdot(x-4)^n$;

475. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1)\cdot 3^n}$;

476. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(3n+8)\cdot 6^n}$;

477. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{(2n^2-5)\cdot 4^n}$;

478. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)\cdot 3^n}\cdot(x+5)^n$;

479. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n(n+2)}\cdot(x-4)^n$;

480. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n+5)\cdot 2^n}\cdot(x+1)^n$.

ТЕМА 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1 Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия

Уравнение

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (3.1)$$

связывающее между собой независимую переменную, искомую (неизвестную) функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$ ***называется дифференциальным уравнением первого порядка***.

Если уравнение (3.1) можно записать в виде $y' = f(x, y)$, то говорят, что оно разрешимо относительно производной. Это уравнение иногда записывают в виде

$$dy = f(x, y)dx$$

или

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \qquad (3.2)$$

Решением (или ***интегралом***) дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y=\varphi(x)$, которая при подстановки в это уравнение обращает его в тождество. Процесс нахождения решений данного уравнения называется ***интегрированием*** этого уравнения.

Задача отыскания решения дифференциального уравнения первого порядка (3.1), удовлетворяющему заданному ***начальному условию*** $y(x_0) = y_0$, называется ***задачей Коши***.

Общим решением уравнения (3.1) называется такая функция:

$$y=\varphi(x, C), \qquad (3.3)$$

где C – произвольная постоянная, что:

1) при любом конкретном значении C она является решением этого уравнения;

2) для любого допустимого начального условия $y(x_0) = y_0$ найдется такое значение постоянной $C=C_0$, что $\varphi(x_0, C_0)=y_0$.

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши) Пусть в дифференциальном уравнении $y' = f(x, y)$, функция $f(x, y)$ и ее частная производная $y' = f(x, y)$ непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy. Тогда для любой точки $M(x_0, y_0) \in D$ существует и притом единственное решение $y=y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

3.2 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Наиболее простым дифференциальным уравнением первого порядка является уравнение вида:

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0, \quad (3.4)$$

где $P(x)$ зависит только от x, а $Q(y)$ - от y.

Проинтегрировав почленно это уравнение, получаем:

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C \quad (3.5)$$

- его общий интеграл.

Более общий случай описывают уравнения с разделяющимися переменными, которые имеют вид

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) легко сводится к уравнению (3.5) путем почленного деления его на $Q_1(y)P_2(x) \neq 0$. Получаем:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0, \quad \int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C$$

- общий интеграл.

3.3 Однородные дифференциальные уравнения

К уравнению с разделяющимися переменными приводятся однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

Функция $f(x;\ y)$ называется ***однородной функцией n-го порядка*** (измерения), если при умножении каждого ее аргумента на произвольный множитель λ вся функция умножится на λ^n, то есть:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x;y).$$

Например, $f(x;y) = x^2 - 2xy$ - однородная функция второго порядка, так как

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 - 2(\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2(x^2 - 2xy) = \lambda^2 f(x;y).$$

Дифференциальное уравнение

$$y' = f(x;y) \quad (3.7)$$

называется ***однородным***, если функция $f(x;y)$ однородная функция нулевого порядка.

Дифференциальное однородное уравнение (3.7) можно записать в виде

$$y' = \varphi\left(\frac{x}{y}\right). \quad (3.8)$$

Если $f(x;y)$ однородная функция нулевого порядка, то по определению $f(x,y) = f(\lambda x, \lambda y)$. Положив $\lambda = \frac{1}{x}$, получаем:

$$f(x;y) = f\left(\frac{x}{x};\frac{y}{x}\right)' = f\left(1;\frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Однородное дифференциальное уравнение (3.8) преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной (подстановки):

$$\frac{y}{x} = u \ \text{ или } \ y = ux. \quad (3.9)$$

Подставив $y = ux$ и $y' = u'x + u$ в уравнение (3.8) получаем: $u'x + u = \varphi(u)$ или $u'x = \varphi(u) - u$, то есть уравнение с разделяющимися переменными. Найдя его общее решение (общий интеграл), следует заменить в нем u на $\frac{y}{x}$. Получим общее решение (интеграл) исходного уравнения.

3.4 Линейные дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение первого порядка называется ***линейным***, если оно имеет вид:

$$y' + p(x)y = g(x) \quad (3.10)$$

где $p(x)$ и $g(x)$ - некоторые (непрерывные) функции переменной x, в частности постоянные.

В случае, когда $g(x) = 0$, уравнение называется однородным; если $g(x) \neq 0$ – неоднородным.

Общее решение дифференциального уравнения (3.10) будем искать в виде: $y = u(x)v(x)$. Так как $y' = u'v + uv'$, то подставив в уравнение (3.10), получим:

$$u'v + uv' + p(x)uv = g(x) \ \text{ или } \ u'v + u(v' + p(x)v) = g(x).$$

Сначала находят частное решение $v = v(x)$ уравнения $v' + p(x)v = 0$, тогда функция $u = u(x)$ - решение уравнения $u'v = g(x)$. Учитывая, что $y = u(x)v(x)$, получим общее решение линейного дифференциального уравнения (3.10).

3.5 Дифференциальные уравнения высших порядков. Основные понятия

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются дифференциальные уравнения высших порядков. Дифференциальные второго порядка в общем случае записываются в виде:

$$F(x;y;y';y'') = 0 \quad (3.11)$$

или, если это возможно, в виде, разрешенном относительно старшей производной:

$$y'' = f(x; y; y') \qquad (3.12)$$

Решением дифференциального (3.12) называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Общим решением уравнения (3.12) называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, где C_1 и C_2 – не зависящие от x произвольные постоянные, удовлетворяющая условиям:

1. $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ является решением дифференциального уравнения для каждого фиксированного значения C_1 и C_2.

2. Каковы бы ни были начальные условия

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y'_0, \qquad (3.13)$$

существуют единственные значения постоянных $C_1 = C_1^0$ и $C_2 = C_2^0$ такие, что функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ является решением уравнения (3.12) и удовлетворяет начальным условиям (3.13).

Любое решение $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ уравнения (3.12), получающееся из общего решения $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ при конкретных значениях постоянных $C_1 = C_1^0$ и $C_2 = C_2^0$, называется ***частным решением***.

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши). Если в уравнении (3.12) функция $f(x, y, y')$ и ее частные производные f'_y и $f'_{y'}$ непрерывны в некоторой области D, изменения переменных x, y и y', то для всякой точки $(x_0, y_0, y'_0) \in D$ существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения (3.12), удовлетворяющее условиям (3.13).

3.6 Уравнения, допускающее понижение порядка

Одним из методов интегрирования дифференциального уравнения высших порядков является *метод понижения порядка*. Суть метода состоит в том, что с помощью замены переменной данное дифференциальное уравнение сводится к уравнению, порядок которого ниже.

Рассмотрим два типа уравнений, допускающих понижение порядка.

I. Пусть дано уравнение

$$y'' = f(x). \qquad (3.14)$$

Порядок можно понизить, введя новую функцию $p(x)$, положив $y' = p(x)$. Тогда $y'' = p'(x)$ и получаем дифференциальное уравнение первого порядка: $p' = f(x)$. Решив его, т.е найдя функцию $p = p(x)$, решим уравнение $y' = p(x)$. Получим общее решение заданного уравнения (3.14).

II. Пусть дано уравнение

$$y'' = f(x; y'), \qquad (3.15)$$

не содержащее явно искомой функции y.

Обозначим $y' = p$, где $p = p(x)$ – новая неизвестная функция. Тогда $y'' = p'$ и уравнение (3.15) принимает вид $p' = f(x; p)$. Пусть $p = \varphi(x; c_1)$ – общее решение полученного дифференциального уравнения первого порядка. Заменяя функцию p на y', получаем дифференциальное уравнение: $y' = \varphi(x; c_1)$. Оно имеет вид (3.14). Для отыскания y достаточно проинтегрировать последнее уравнение. Общее решение уравнения (3.15) будет иметь вид $y = \int \varphi(x; c_1)dx + c_2$.

3.7 Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Дифференциальное уравнение вида

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \qquad (3.16)$$

где a_0, a_1, a_2 – числа, причем $a_0 \neq 0$, называется ***дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами***.

Если $f(x) = 0$, то уравнение называется ***однородным***, а если $f(x) \neq 0$– ***неоднородным***.

Квадратное уравнение вида

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0 \qquad (3.17)$$

называется ***характеристическим уравнением*** дифференциального уравнения $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$.

Пусть $D = a_1^2 - 4a_0 a_2$ дискриминант квадратного уравнения. Возможны следующие случаи:

1) если $D > 0$, то общим решением уравнения $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ является функция $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, где k_1 и k_2 – корни характеристического уравнения;

2) если $D = 0$, то общим решением служит функция $y = (C_1 + C_2 x)e^{kx}$, где k – корень характеристического уравнения;

3) если $D < 0$, то общим решением является функция $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, где $k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i$ – корни характеристического уравнения.

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами основывается на следующей теореме.

Теорема. Если y^* - некоторое частное решение неоднородного уравнения $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$ и Y–общее решение соответствующего однородного уравнения $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, то общее решение неоднородного уравнения имеет вид $y=Y+y^*$.

Укажем правило нахождения частного решения неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов.

1) Пусть $f(x)= b_0 x^2 + b_1 x + b_2$; тогда:

а) $y^*= Ax^2 + Bx + C$, если нуль не является корнем характеристического уравнения;

б) $y^*= Ax^3 + Bx^2 + Cx$, если нуль является простым корнем характеристического уравнения;

в) $y^*= Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$, если нуль является двукратным корнем характеристического уравнения.

2) Пусть $f(x)= be^{\alpha x}$; тогда:

а) $y^*= Ae^{\alpha x}$, если число α не является корнем характеристического уравнения;

б) $y^*= Axe^{\alpha x}$, если число α является корнем характеристического уравнения;

в) $y^*= Ax^2 e^{\alpha x}$, если число α является двукратным корнем характеристического уравнения.

3) Пусть $f(x)= e^{\alpha x}(M \cos \beta x + N \sin \beta x)$; тогда:

а) $y^*= e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$, если число $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения;

б) $y^*= x \cdot e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$, если число $\alpha + \beta i$ является корнем характеристического уравнения.

3.8 Решение типового задания

<u>*Пример 1.*</u> Найти общее решение уравнения

$$(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0 .$$

Решение. Выносим общий множитель из первой и второй скобки:

$$y(1 + x)dx + x(1 - y)dy = 0 .$$

Получаем уравнение с разделяющимися переменными, разделив его на $xy \neq 0$, получим

$$\frac{1 + x}{x} dx + \frac{1 - y}{y} dy = 0 .$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем:

$x + \ln|x| + \ln|y| - y = C$ или $\ln|xy| + x - y = C$ – общий интеграл

<u>*Пример 2.*</u> Найти общее решение уравнения $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$.

<u>*Решение.*</u> Функции P и Q – однородные функции первого порядка.

$$(y + \sqrt{xy}) = x\frac{dy}{dx} \text{ или } (y + \sqrt{xy}) = xy' .$$

Положим $y = ux$, тогда $y' = u'x + u$. Подставляя в последнее уравнение, получаем:

$$(ux + x\sqrt{u}) = x^2 u' + ux \text{ или } x\sqrt{u} = x^2 u' .$$

Учитывая, что $u' = \dfrac{du}{dx}$, получаем $\sqrt{u}\, dx = xdu$ или $\dfrac{du}{\sqrt{u}} = \dfrac{dx}{x}$.

Интегрируя почленно это уравнение, имеем:

$$2\sqrt{u} = \ln|x| + \ln C .$$

Возвращаясь к старой переменной, получаем общее решение:

$$\ln Cx = 2\sqrt{\frac{y}{x}} \text{ или } y = \frac{x}{4}\ln^2 Cx .$$

<u>*Пример 3.*</u> Найти общее решение уравнения $xy' - 2y = 2x^4$.

<u>*Решение.*</u> Разделив левую и правую части на x, приходим к линейному неоднородному уравнению:

$$y' - \frac{2}{x} y = 2x^3 .$$

Пусть $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставляя в последнее уравнение, получаем:

$$u'v + uv' - \frac{2}{x} uv = 2x^3 \text{ или } u'v + u(v' - \frac{2}{x} v) = 2x^3 .$$

Положим $v' - \frac{2}{x}v = 0$ или $\frac{dv}{dx} = \frac{2}{x}v$, откуда $\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x}$. Проинтегрировав, найдем какое-либо частное решение этого уравнения, например, при C=0 имеем $\ln|v| = 2\ln|x|$ и $v = x^2$.

Найденное значение $v = x^2$ подставляем в уравнение $u'v = 2x^3$ или $\frac{du}{dx} = 2x$.

Решая это уравнение с разделяющимися переменными, получаем $u = x^2 + C$. Тогда окончательно имеем

$$y = uv = (x^2 + C)x^2 = x^4 + Cx^2.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения $2xy''' = y''$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=-1$; $y'(1)=0$; $y''(1)=1$.

Решение. Пусть $y'' = z$. Имеем $2xz' - z = 0$, тогда

$2x\frac{dz}{dx} = z \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln z = \frac{1}{2}\ln x + \ln C_1 \Rightarrow z = C_1\sqrt{x}.$ Но $z = y''$, значит $y'' = C_1\sqrt{x}$, тогда получаем, что

$$y' = C_1\frac{x^{3/2}}{3/2} + C_2 = \frac{2}{3}C_1x\sqrt{x} + C_2 \text{ и } y = \frac{2}{3}C_1\frac{x^{5/2}}{5/2} + C_2x + C_3.$$

Следовательно, $y = \frac{4}{15}C_1x^2 \cdot \sqrt{x} + C_2x + C_3$ – общее решение дифференциального уравнения.

Чтобы найти частное решение, подставим в выражения для y, y' и y'' значение x=1:

$y(1) = -1 \Rightarrow \frac{4}{15}C_1 + C_2 + C_3 = -1$; $y'(1) = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}C_1 + C_2 + C_3 = 0$;

$y''(1) = 1 \Rightarrow C_1 = 1$.

Из системы уравнений $C_2 + C_3 = \frac{19}{15}$; $C_2 = -\frac{2}{3}$ находим $C_2 = -\frac{2}{3}$; $C_3 = -\frac{3}{5}$. Значит, искомое частное решение имеет вид:

$$y = \frac{4}{15}x^2 - \sqrt{x} - \frac{2}{3}x - \frac{3}{5}.$$

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y'' - \frac{y'}{x} = 0$.

Решение. Данное уравнение не содержит искомой функции y. Положим $y' = p$, $y'' = p'$ и уравнение примет вид $p' - \frac{p}{x} = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными $\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x}$ или $\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$.

Интегрируя, получим $\ln|p| = \ln|x| + \ln|C_1|$. Тогда имеем

$$\ln|p| = \ln|C_1x| \text{ или } p = C_1x.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим $y' = C_1x$. Интегрируем его и находим общее решение уравнения $y = C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2$.

Пример 6. Найти общее решение уравнения $y'' + 6y' + 18y = 17e^{2x}$.

Решение. Рассмотрим однородное уравнение $y'' + 6y' + 18y = 0$. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид k^2+6k+18=0, откуда $k_1 = -3 - 3i$, $k_2 = -3 + 3i$.

Следовательно, $Y = e^{-3x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$ общее решение однородного уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y^* = Ae^{2x}.$$

Имеем:

$$(y^*)' = 2Ae^{2x},\ (y^*)'' = 4Ae^{2x}.$$

Подставим эти выражения в неоднородное уравнение

$$4Ae^{2x} + 12Ae^{2x} + 18Ae^{2x} = 17e^{2x},\ 34Ae^{2x} = 17e^{2x} \quad \Rightarrow \quad A = 0{,}5.$$

Итак, частное решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y^* = 0{,}5e^{2x},$$

а общее решение неоднородного уравнения:

$$Y = e^{-3x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + 0{,}5e^{2x}.$$

Пример 7. Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x}$.

Решение. Рассмотрим однородное уравнение $y''-5y'+6y=0$. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид k^2-5k+6=0, откуда $k_1=2, k_2=3$. Следовательно, $Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$ общее решение однородного уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y^*=Axe^{3x}.$$

Имеем:

$$(y^*)'=Ae^{3x}(1+3x),\ (y^*)''=Ae^{3x}(6+9x).$$

Подставим эти выражения в неоднородное уравнение

$Ae^{3x}(6+9x)-5Ae^{3x}(1+3x)+6Axe^{3x}=2e^{3x}$,

$A(6+9x)-5A(1+3x)+6Ax=2$,

$A=2$.

Итак, частное решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y^*=2xe^{3x},$$

а общее решение неоднородного уравнения:

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+2xe^{3x}.$$

Пример 8. Найти общее решение уравнения $y''+2y'+2y=2x^2+8x+6$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1,\ y'(0)=4$.

Решение. Рассмотрим однородное уравнение $y''+2y'+2y=0$. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид k^2+2k+2=0, откуда $k_1=-1-i, k_2=-1+i$. Следовательно, $Y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$ общее решение однородного уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y^*=Ax^2+Bx+C.$$

Имеем:

$$(y^*)'=2Ax+B,\ (y^*)''=2A.$$

Подставим эти выражения в неоднородное уравнение

$2A+4Ax+2B+2Ax^2+2Bx+2C=2x^2+8x+6$,

$2Ax^2+(4A+2B)x+2A+2B+2C=2x^2+8x+6$,

$Ax^2+(2A+B)x+(A+B+C)=x^2+4x+3$

и получим систему для вычисления коэффициентов A, B и C:

$$\begin{cases}A=1,\\2A+B=4,\\A+B+C=3\end{cases}\Rightarrow A=1,\ B=2,\ C=0.$$

Итак, частное решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y^*=x^2+2x,$$

а общее решение неоднородного уравнения:

$$y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+x^2+2x.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0)=1,\ y'(0)=4$. Вычислим производную от общего решения $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+x^2+2x$:

$$y'=-e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-x}(-C_1\sin x+C_2\cos x)+2x+2.$$

$$\Rightarrow\begin{cases}C_1=1,\\-C_1+C_2+2=4,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=1,\\C_2=3.\end{cases}$$

Таким образом искомое частное решение имеет вид:

$$y=e^{-x}(\cos x+3\sin x)+x^2+2x.$$

Пример 9. Найти общее решение уравнения $y''-10y'+21y=50\sin x$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=2,\ y'(0)=13$.

Решение. Рассмотрим однородное уравнение $y''-10y'+21y=0$. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид k^2-10k+21=0, откуда $k_1=3, k_2=7$. Следовательно, $Y=C_1e^{3x}+C_2e^{7x}$ общее решение однородного уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y^*=A\cos x+B\sin x.$$

Имеем:

$$(y^*)'=-A\sin x+B\cos x,\ (y^*)''=-A\cos x-B\sin x.$$

Подставим эти выражения в неоднородное уравнение

$-A\cos x-B\sin x+10A\sin x-10B\cos x+21A\cos x+21B\sin x=50\sin x$,

$(20A-10B)\cos x+(20B+10A)\sin x=50\sin x$

и получим систему для вычисления коэффициентов A и B:

$$\begin{cases}20A-10B=0,\\20B+10A=50\end{cases}\Rightarrow A=1,\ B=2.$$

Итак, частное решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y^{*}=\cos x+2\sin x,$$

а общее решение неоднородного уравнения:

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{7x}+\cos x+2\sin x.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0)=2,\ y'(0)=13$. Вычислим производную от общего решения $y=C_1e^{3x}+C_2e^{7x}+\cos x+2\sin x$:

$$y'=3C_1e^{3x}+7C_2e^{7x}-\sin x+2\cos x.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1+C_2+1=2, \\ 3C_1+7C_2+2=13, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1+C_2=1, \\ 3C_1+7C_2=11, \end{cases} \Rightarrow C_1=-1,\ C_2=2.$$

Таким образом искомое частное решение имеет вид:

$$y=-e^{3x}+2e^{7x}+\cos x+2\sin x.$$

Пример 10. Найти общее решение уравнения $y''+4y'+13y=5\sin 2x$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y_0=\frac{2}{29};\ y_0'=\frac{1}{29}$ при $x=0$.

Решение. Рассмотрим однородное уравнение $y''+4y'+13y=0$. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид $k^2+4k+13=0$, откуда $k_1=-2-3i, k_2=-2+3i$. Следовательно, $Y=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$ общее решение однородного уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y^{*}=(A\cos 2x+B\sin 2x).$$

Имеем:

$$(y^{*})'=-2A\cdot\sin 2x+2B\cos 2x,\ (y^{*})''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x.$$

Подставим эти выражения в неоднородное уравнение

$$-4A\cos 2x-4B\sin 2x-8A\cdot\sin 2x+8B\cos 2x+13A\cos 2x+13B\sin 2x=5\sin 2x;$$

$(9A+8B)\cos 2x+(-8A+9B)\sin 2x=5\sin 2x$

и получим систему для вычисления коэффициентов A и B:

$$\begin{cases} 9A+8B=0 \\ -8A+9B=5 \end{cases} \Rightarrow\ A=-\frac{8}{29},\quad B=\frac{9}{29}.$$

Итак, частное решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y^{*}=-\frac{8}{29}\cos 2x+\frac{9}{29}\sin 2x,$$

а общее решение неоднородного уравнения:

$$y=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)-\frac{8}{29}\cos 2x+\frac{9}{29}\sin 2x.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y_0=\frac{2}{29}\Rightarrow C_1-\frac{8}{29}=\frac{2}{29}\Rightarrow C_1=\frac{10}{29};$$

$y=-2e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+$

$e^{-2x}(-3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x)+\frac{16}{29}\sin 2x+\frac{18}{29}\cos 2x;$

$$y_0'=\frac{1}{29}\Rightarrow -2C_1+3C_2+\frac{18}{29}=\frac{1}{29}\Rightarrow C_2=\frac{1}{29}.$$

Таким образом искомое частное решение имеет вид:

$$y=e^{-2x}\left(\frac{10}{29}\cos 3x+\frac{1}{29}\sin 3x\right)-\frac{8}{29}\cos 2x+\frac{9}{29}\sin 2x.$$

Задачи для самостоятельного решения 481-510.

Найти общее решение дифференциальных уравнений.

481. а) $2xydx+(4-x^2)dy=0;$

б) $(x^2-y^2)dy+2xydx=0;$

в) $y'-y\cdot ctgx=\sin x.$

482. а) $y^2dx+(1-x)^3dy=0;$

б) $2xy\cdot y'=y^2-4x^2;$

в) $y'+y=x+2.$

483. а) $x\sqrt{9-y^2}dx-yx^2dy=0;$

б) $(x^2+y^2)dx-2xydy=0;$

в) $y'-4y=e^{2x}.$

484. а) $3x\sqrt[3]{y}dx+(1-x^2)dy=0;$

б) $(2xy+x^2)dy=(2xy+y^2)dx;$

в) $y'x-y-x^2=0.$

485. а) $ydx-(4+x^2)\ln ydy=0;$

б) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 6;$

в) $y' - \dfrac{x}{x^2+1} \cdot y = x.$

486. а) $xy^2dx - (9 - x^2)dy = 0;$

б) $y - xy' = y\ln\dfrac{y}{x};$

в) $y' + \dfrac{x}{1-x^2} \cdot y = 1.$

487. а) $2\sqrt{xy}\,dx + 3dy = 0;$

б) $xdy + ydx = ydy;$

в) $y' + \dfrac{y}{x} = 2e^{x^2}.$

488. а) $e^x dx - (1 + e^x)dy = 0;$

б) $2x^2y' - 4xy - y^2 = 0;$

в) $y' - y = e^x.$

489. а) $x(y-5)dx - \sqrt{x}dy = 0;$

б) $(xy + y^2)dx - x^2dy = 0;$

в) $(x^2+1)y' + 4xy = 3.$

490. а) $4xydx - (x^2 + 16)dy = 0;$

б) $2x^2y' - 4xy - y^2 = 0;$

в) $y' - \dfrac{y}{x} = x^2.$

491. а) $(x+3)\cos^2 ydx - x^2dy = 0;$

б) $xy' - y + x \cdot e^{\frac{y}{x}} = 0;$

в) $(2xy + e^{x^2})dx - dy = 0.$

492. а) $x\sqrt{1-y^2}dx - \sqrt{9-x^2}dy = 0;$

б) $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0;$

в) $xy' - 2y = 2x^6.$

493. а) $(y+3)\sin xdx - \cos xdy = 0;$

б) $xy \cdot y' - y^2 - x^2 = 0;$

в) $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2.$

494. а) $y^2(x+5)dx - xdy = 0;$

б) $y' = \dfrac{8x+5y}{5x-2y};$

в) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2.$

495. а) $(y^3 - 3)dx - x^2y^2dy = 0;$

б) $y' = \dfrac{y}{x} - tg\dfrac{y}{x};$

в) $y' + \dfrac{1}{x}y = x \cdot e^x.$

496. а) $(x + xy^2)dx - yx^3 dy = 0$;

б) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$;

в) $y' - \dfrac{2x - 5}{x^2} y = 5$.

497. а) $x(y + 3)dx - (1 + x^2)dy = 0$;

б) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 4\dfrac{y}{x} + 2$;

в) $xy' - y = x^2 \cdot \cos x$.

498. а) $(y - 2)dx - (x + 1)^3 dy = 0$;

б) $xy \cdot y' + x^2 + y^2 = 0$;

в) $y' + \dfrac{2y}{x + 1} = x$.

501. а) $(4 + x^2)dx - 2x^2\sqrt{y}dy = 0$;

б) $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 3$;

в) $y' - \dfrac{y}{x + 2} = x^2 + 2x$.

502. а) $\cos y dx - (x + 2)\sin y dy = 0$;

б) $xy' = y + x\cos^2\dfrac{y}{x}$;

в) $y' = \dfrac{xy}{x^2 + 2} + 1$.

503. а) $\sqrt{4 - y^2}dx - yx^3 dy = 0$;

б) $2x^2 y' + x^2 + y^2 = 0$;

в) $y' - \dfrac{y}{x} = -2\dfrac{\ln x}{x}$.

504. а) $y^3(7 + x)dx - x^3 dy = 0$;

б) $y' = \dfrac{x + 2y}{2x - y}$;

в) $y' + \dfrac{y}{x + 1} = x^2$.

505. а) $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$;

б) $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$;

в) $y' - \dfrac{2}{x + 1} y = e^x (x + 1)^2$.

506. а) $\sqrt{25 - y^2}dx - x^5 dy = 0$;

б) $y' = \dfrac{xy^2 - yx^2}{x^3}$;

в) $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{x^3}$.

507. а) $y\ln^2 x dx - 6x\sqrt{y}dy = 0$;

б) $y' = \sin^2\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}$;

в) $y' + y\cos x = \cos x$.

508. а) $\sqrt{y}\, x^2 dx + (x^3 + 2)dy = 0$;

б) $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$;

в) $y' - \dfrac{2y}{x + 1} = (x + 1)^3$.

509. а) $(xy + x)dx - x^2 ydy = 0$;

б) $y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12$;

в) $(2x+1)y' = 4x + 2y$.

510. а) $(1 - x^2)\sqrt{y}dx + xydy = 0$;

б) $y' = \frac{x - y}{x + y}$;

в) $y' - ytgx = 4\sin x$.

Задачи для самостоятельного решения №511-540.

Найти общее решение дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка:

511. $y'' \cdot x\ln x = y'$;

512. $2x \cdot y'' = y'$;

513. $y'' \cdot (x^2 + 1) = 2xy'$;

514. $y'' \cdot \ln x + y' \cdot \sin x = 0$;

515. $x \cdot y'' = (1 + 2x^2)y'$;

516. $y'' = 2x \cdot \ln x$;

517. $x \cdot y'' = y'$;

518. $y'' \cdot tgx = y' + 1$;

519. $y'' \cdot \ln x + y' \cdot \sin x = 0$;

520. $x^2 \cdot y'' = (y')^2$;

521. $y'' = (y')^2$;

522. $2xy' \cdot y'' = (y')^2 + 1$;

523. $y'' + y' \cdot tgx = \sin 2x$;

524. $xy'' - y' = e^x \cdot x^2$;

525. $(1 + x^2) \cdot y'' + 2xy' = x^3$;

526. $x \cdot y'' + y' = -x$;

527. $x \cdot y'' + y' = \ln x$;

528. $y'' - y' = x$;

529. $y'' - \frac{y'}{x} = x$;

530. $y'' + \frac{1}{x} \cdot y' = 0$;

531. $xy'' + 2y' = 0$;

532. $x^2 y'' + (y')^2 = 0$;

533. $x \cdot y'' - y' = x^2$;

534. $(1 + x^2) \cdot y'' = 3$;

535. $x^2 \cdot y'' = 4$;

536. $y'' = \sqrt{1 - (y')^2}$;

537. $y'' - \frac{y'}{x} = 0$;

538. $x \cdot (y'' + 1) + y' = 0$;

539. $x^3 \cdot y'' + x^2 \cdot y' = 1$;

540. $y'' - 3\frac{y'}{x} = x$.

Задачи для самостоятельного решения №541-570.

Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям.

541. $y'' - 5y' + 6y = 2\cos x$; $y(0) = 3$; $y'(0) = \frac{1}{2}$.

542. $y'' - 2y' + 5y = x^2 + 1$; $y(0) = -3$; $y'(0) = -\frac{1}{5}$.

543. $y'' - 4y' + 4y = -x^2 + 3x$; $y(0) = 3$; $y'(0) = \frac{4}{3}$.

544. $y'' + 2y' + 10y = -\sin 2x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = \frac{3}{4}$.

545. $y''-4y'+3y=e^{5x};\ \ y(0)=3;\ \ y'(0)=9.$

546. $y''+4y=\sin 3x\,;\ \ y(0)=\dfrac{1}{4}\,;\ \ y'(0)=0\,.$

547. $y''+2y'=e^{-x};\ \ y(0)=1;\ \ y'(0)=1.$

548. $y''-6y'+9y=9x^2-12x+2;\ \ y(0)=1;\ \ y'(0)=3.$

549. $y''+9y=36e^{3x};\ \ y(0)=0;\ \ y'(0)=0.$

550. $y''+2y'-8y=3\sin x;\ \ y(0)=-1;\ \ y'(0)=-\dfrac{3}{2}.$

551. $y''+6y'+13y=8e^{-x};\ \ y(0)=\dfrac{2}{3};\ \ y'(0)=2.$

552. $y''-4y+8y=8x^2+4;\ \ y(0)=2;\ \ y'(0)=3.$

553. $y''-9y'+18y=26\cos x-8\sin x,\ y(0)=0,\ y'(0)=2\,.$

554. $y''+2y'+5y=13e^{2x};\ \ y(0)=1;\ \ y'(0)=4.$

555. $y''-4y'+5y=10x;\ \ y(0)=10;\ \ y'(0)=6.$

556. $y''-4y'+4y=3x-x^2;\ \ y(0)=3;\ \ y'(0)=\dfrac{4}{3}.$

557. $y''-y'-12y=10e^{2x};\ \ y(0)=-1;\ \ y'(0)=-9.$

558. $y''-4y'+4y=-169\sin 3x;\ \ y(0)=-12;\ \ y'(0)=16.$

559. $y''+2y'-8y=16x+4;\ \ y(0)=2;\ \ y'(0)=6.$

560. $y''-4y'+5y=5x^2-4;\ \ y(0)=\dfrac{2}{25};\ \ y'(0)=\dfrac{3}{5}.$

561. $y''-3y'+2y=10\sin x\,;\ \ y(0)=5,\ y'(0)=4.$

562. $y''-4y'+4y=5e^{-3x};\ \ y(0)=2,\ y'(0)=0.$

563. $y''-2y'+10y=20x+6\,;\ \ y(0)=0,\ y'(0)=4.$

564. $y''+5y'+6y=12\cos 2x\,;\ \ y(0)=1,\ y'(0)=3.$

565. $y''-2y'+y=16e^{x};\ \ y(0)=1,\ y'(0)=2.$

566. $y''-4y'+13y=26x+5\,;\ \ y(0)=1,\ y'(0)=0.$

567. $y''+4y'-12y=8\sin 2x\,;\ \ y(0)=0,\ y'(0)=0.$

568. $y''-2y'+y=2x+1\,;\ y(0)=1,\ y'(0)=3.$

569. $y''-2y'-3y=e^{2x};\ \ y(0)=-1,\ y'(0)=0.$

570. $y''+16y=\sin 3x\,;\ \ y(0)=0,\ y'(0)=2.$

ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

ТЕМА 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1. Два комплексных числа называются равными если:
А) равны их действительные части
Б) равны их мнимые части
В) равны действительные и мнимые части

2. Аргумент комплексного числа это:
А) расстояние от начала координат до точки, в виде которой отображается комплексное число
Б) мнимая единица
В) угол, который радиус-вектор от начала координат до точки, в виде которой отображается комплексное число, образует с осью Ox
Г) само комплексное число без учёта знака
3. Верно, что число, сопряжённое с комплексным числом z
А) равно данному числу z
Б) отличается от числа z лишь знаком при мнимой части
В) не является комплексным числом
Г) равно данному числу z, деленному на некоторый коэффициент, который следует из условия задачи
4. Показательной формой комплексного числа называется запись вида:

А) $z = re^{i}$

Б) $z = re^{i\varphi}$

В) $z = re^{\varphi}$

Г) $z = e^{i\varphi}$

5. Тригонометрической формой комплексного числа называется запись вида
А) $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
Б) $z = r(\cos\varphi + \sin\varphi)$
В) $z = r(\sin\varphi + i\cos\varphi)$
Г) $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$

7. Модуль комплексного числа вычисляется по формуле:
А) $r = \sqrt{x + iy}$

Б) $r = x^2 + y^2$
В) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

8. Числа $z = x + iy$ и $z = x - iy$ называются:
А) равными
Б) комплексно-сопряженными
В) противоположными

9. Формула для возведения комплексного числа в степень имеет вид:

А) $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

Б) $z^n = r^n(\cos n\varphi + \sin n\varphi)$

В) $z^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

10. Умножение комплексных чисел z_1 и z_2 вычисляется по формуле
А) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
Б) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 \cdot \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 \cdot \varphi_2))$
В) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + i\cos(\varphi_1 + \varphi_2))$

11. Деление комплексных чисел z_1 и z_2 вычисляется по формуле

А) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Б) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + i\cos(\varphi_1 - \varphi_2))$

В) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

12. Сколько значений существует у корня n-й степени (отличной от нуля) из комплексного числа?
А) n

Б) i/n
В) числу, равному модулю комплексного числа
Г) координате x точки, отображающей комплексное число

13. Корень n – ой степени из комплексного числа вычисляется по формуле:

А) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$

Б) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n})$

В) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\sin\frac{\varphi}{n} + i\cos\frac{\varphi}{n})$

Г) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$

14. Конец радиус-вектора, задающего комплексное число $z = -5 + 2i$, лежит…
А) во второй четверти
Б) в первой четверти
В) в третьей четверти
Г) в четвёртой четверти

15. Аргумент комплексного числа $z = -1 - i\sqrt{3}$ равен:

А) $-\frac{2\pi}{3}$ Б) $\frac{3\pi}{4}$ В) $\frac{2\pi}{3}$ Г) $\frac{\pi}{2}$

16. Модуль комплексного числа $z = 6 + 8i$ равен…
А) 10 Б) 6 В) 14 Г) 8

17. Если $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - i$, то $\frac{z_1}{z_2}$ равно:

А) $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$ Б) $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$ В) $\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$ Г) $-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

18. Если $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 1 + i$, то $z_1 \cdot z_2$ равно:
А) 3+i Б) 2+3i В) 3-i Г) 3+3i

19. Для комплексного числа $z = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$, заданного в показательной форме, алгебраическая форма имеет вид:
А) $1 - i\sqrt{3}$ Б) $-1 - i\sqrt{3}$ В) $\sqrt{3} - i$ Г) $-\sqrt{3} - i$

20. Для квадратного уравнения $z^2 - 2z + 5 = 0$ указать верные утверждения о корнях:
А) $z_1 = 1 - 2i,\ z_2 = 1 + 2i$
Б) $z_1 = -1 - 2i,\ z_2 = 1 - 2i$
В) $z_1 = -1 - 2i,\ z_2 = -1 + 2i$

21. Произведение комплексного числа $z = 4 - 3i$ на сопряженное число $\bar{z}$ равно…
А) 25 Б) $16 - 9i$ В) 5 Г) $8 - 6i$

22. Комплексное число $2 - 5i - (1 + 2i) \cdot i$ равно …
А) $4 - 6i$ Б) $-6i$ В) $4 - 4i$ Г) $2 - 8i$

23. Даны комплексные числа $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 3 + 4i$. Тогда $3z_1 - 2z_2$ равно…
А) $-3 - 11i$ Б) $9 + 5i$ В) $-3 + 5i$ Г) $-7i$

ТЕМА 2. РЯДЫ

24. Числовой ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ называется сходящимся, если
А) известна его сумма
Б) сумма равна любому числу
В) существует предел конечных сумм
Г) предел частичных сумм конечный или бесконечный

25. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ – сходится, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = ku_1 + ku_2 + ... + ku_n + ... \quad (k \neq 0):$$

А) расходится
Б) сходится
В) сходимость зависит от k
Г) нельзя сразу ответить на вопрос – требуется исследование

26. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ сходится, то:

А) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Б) $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$

В) $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$

27. Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n +$ радиус абсолютной сходимости вычисляется по формуле:

А) $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

Б) $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

В) $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} \right|$

28. Ряд геометрической прогрессии $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$ сходится при:

А) $|q| < 1$ Б) $|q| \le 1$ В) $|q| > 1$

29. Ряд геометрической прогрессии $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$ расходится при:

А) $|q| < 1$ Б) $|q| \le 1$ В) $|q| \ge 1$

30. Обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$ сходится при:

А) $p \ge 1$ Б) $p > 1$ В) $p \le 1$

31. Обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$ расходится при:

А) $p \ge 1$ Б) $p > 1$ В) $p \le 1$

32. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n$ равен 9. Тогда интервал сходимости имеет вид

А) (-9; 9)
Б) $(-10; 8)$
В) $(-8; 8)$
Г) $(8; 10)$

33. Частичная сумма ряда задается равенством $S_n = \frac{6n+7}{3n+2}$. Тогда сумма ряда равна

А) 3 Б) 3,5 В) 0,5 Г) 2

34. Общий член ряда $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{4}{17} + \ldots$ имеет вид

А) $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$

Б) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$

В) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$

Г) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+1}$

35. Общий член ряда $3 - \frac{5}{4} + \frac{7}{9} - \frac{9}{16} + \ldots$ имеет вид

А) $a_n = (-1)^n \frac{2n+1}{n^2}$

Б) $a_n = \frac{2n-1}{n^2}$

В) $a_n = \frac{2n+1}{n^2}$

Г) $a_n = (-1)^{n+1}\frac{2n-1}{n^2}$

36. Общий член ряда $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+...$ имеет вид

А) $a_n = \frac{2n+1}{2^n}$

Б) $a_n = \frac{2n-1}{2^n}$

В) $a_n = (-1)^n\frac{2n+1}{2^n}$

Г) $a_n = (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{2^n}$

37. Сумма числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ равна…

А) 2 Б) $\frac{1}{16}$ В) $\frac{2}{3}$ Г) 1

38. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$

А) абсолютно сходится
Б) условно сходится
В) расходится

39. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+4)!}$

А) абсолютно сходится
Б) условно сходится
В) расходится

40. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5n-1}$

А) абсолютно сходится
Б) условно сходится
В) расходится

41. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)!$

А) абсолютно сходится
Б) условно сходится
В) расходится

ТЕМА 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

42. Дифференциальным уравнением называется
А) уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные
Б) уравнение, содержащее производную независимой переменной
В) уравнение, которое легко интегрируется
Г) уравнение, которое решается дифференцированием

43. Решить дифференциальное уравнение - это означает
А) дифференцирование уравнения
Б) интегрирование
В) нахождение независимой переменной
Г) нахождение производной функции

44. Число постоянных в общем решении дифференциального уравнения определяется
А) порядком дифференциального уравнения
Б) старшей степенью неизвестной функции
В) видом правой части
Г) старшей степенью независимой переменной

45. Общее решение дифференциального уравнения $y''+a_1y'+a_2y=f(x)$ содержит
А) две произвольные постоянные
Б) три произвольные постоянные
В) одну произвольную постоянную
Г) четыре произвольные постоянные

46. Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется

А) решение при $y=x$

Б) решение, получающееся из общего решения при определенном значении постоянной C

В) решение при $y=x^2$

Г) решение в виде частного двух функций

47. Дифференциальное уравнение называется линейным уравнением первого порядка, если

А) неизвестная функция y в первой степени

Б) независимая переменная x и неизвестная функция y в первой степени

В) сводится к уравнениям с разделяющимися переменными

Г) неизвестная функция y и ее производная в первой степени

48. Вид частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами зависит от

А) вида правой части и корней характеристического уравнения

Б) порядка этого уравнения

В) общего решения однородного дифференциального уравнения второго порядка

Г) произвольных постоянных

49. Характеристическое уравнение для линейного однородного уравнения $y''+a_1y'+a_2y=0$ имеет вид

А) $k^2+a_1k=a_2$

Б) $k^2+k+(a_1+a_2)=0$

В) $k^2+a_1k+a_2=0$

Г) $a_1k^2+a_2k+1=0$

50. Дифференциальное уравнение $y'+p(x)y=q(x)$ называется

А) уравнением Бернулли

Б) однородным

В) линейным уравнением первого порядка

Г) уравнением с разделяющимися переменными

51. Начальное условие $y(x_0)=y_0$ в дифференциальном уравнении $y'=f(x,y)$ задается для определения

А) общего решения

Б) частного решения

В) правой части этого уравнения

Г) порядка уравнения

52. При решении однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y''+py'+qy=0$:

А) вводится подстановка вида $y=u\times v$, где $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – некоторые неизвестные функции

Б) вводится подстановка вида $y=u\times x$, где $u=u(x)$ – некоторая неизвестная функция

В) составляется характеристическое уравнение $k^2+pk+q=0$

53. Характеристическое уравнение $k^2+pk+q=0$ имеет два различных действительных корня k_1 и k_2. Тогда общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y''+py'+qy=0$ имеет вид:

А) $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$

Б) $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

В) $y=C_1e^{k_1x}+C_2xe^{k_1x}$

Г) $y=e^{\beta x}(C_1\cos\alpha x+C_2\sin\alpha x)$

54. Характеристическое уравнение $k^2+pk+q=0$ имеет комплексные корни $k_{1,2}=\alpha\pm i\beta$. Тогда общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y''+py'+qy=0$ имеет вид:

А) $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$

Б) $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

В) $y=C_1e^{k_1x}+C_2xe^{k_1x}$

Г) $y=e^{\beta x}(C_1\cos\alpha x+C_2\sin\alpha x)$

55. Характеристическое уравнение $k^2+pk+q=0$ имеет равные корни $k_1=k_2$. Тогда общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y''+py'+qy=0$ имеет вид:

$y''+py'+qy=0$ имеет вид:

А) $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$

Б) $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

В) $y=C_1e^{k_1x}+C_2xe^{k_1x}$

Г) $y = e^{\beta x}(C_1 \cos\alpha x + C_2 \sin\alpha x)$

56. Общий интеграл дифференциального уравнения $\cos y dy = \dfrac{dx}{x^2}$ имеет вид

А) $-\sin y = \dfrac{x^2}{2} + C$

Б) $\sin y = x^2 + C$

В) $-\sin y = -\dfrac{1}{x} + C$

Г) $\sin y = -\dfrac{1}{x} + C$

57. Общий интеграл дифференциального уравнения $\dfrac{dy}{y^2} = \dfrac{dx}{1+x^2}$ имеет вид

А) $-\dfrac{1}{y} = arctg\dfrac{1}{x} + C$

Б) $-\dfrac{1}{y} = arctgx + C$

В) $\dfrac{1}{y} = \ln(1+x^2) + C$

Г) $\dfrac{1}{y} = -\ln(1+x^2) + C$

58. Общий интеграл дифференциального уравнения $e^y dy = \dfrac{dx}{x}$ имеет вид

А) $e^y = -\dfrac{1}{x^2} + C$

Б) $e^y = x + C$

В) $y = \ln|x| + C$

Г) $e^y = \ln|x| + C$

59. Частному решению линейного неоднородного дифференциального $y'' - 4y' + 4y = (x-1)\cdot e^{2x}$ по виду его правой части соответствует функция

А) $y^* = x^2(Ax+B)\cdot e^{2x}$

Б) $y^* = (Ax^2+Bx)\cdot e^{2x}$

В) $y^* = (Ax+B)\cdot e^{2x}$

60. Частному решению линейного неоднородного дифференциального $y'' - 3y' + 2y = (x-1)\cdot e^{2x}$ по виду его правой части соответствует функция

А) $y^* = x^2(Ax+B)\cdot e^{2x}$

Б) $y^* = (Ax^2+Bx)\cdot e^{2x}$

В) $y^* = (Ax+B)\cdot e^{2x}$

61. Частному решению линейного неоднородного дифференциального $y'' + 3y' + 2y = (x-1)\cdot e^{2x}$ по виду его правой части соответствует функция

А) $y^* = x^2(Ax+B)\cdot e^{2x}$

Б) $y^* = (Ax^2+Bx)\cdot e^{2x}$

В) $y^* = (Ax+B)\cdot e^{2x}$

62. Общее решение однородного уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$ имеет вид

А) $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$

Б) $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$

В) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{3x}$

63. Общее решение однородного уравнения $y'' - 3y' - 4y = 0$ имеет вид

А) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{4x}$

Б) $y = C_1e^{x} + C_2e^{-4x}$

В) $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{4x}$

60. Общее решение однородного уравнения $y'' - 2y' + 10y = 0$ имеет вид

А) $y = e^{x}(C_1\cdot\cos 3x + C_2\cdot\sin 3x)$

Б) $y = e^{3x}(C_1\cdot\cos 3x + C_2\cdot\sin 3x)$

В) $y = e^{3x}(C_1\cdot\cos x + C_2\cdot\sin x)$

64. Общее решение однородного уравнения $y'' - 2y' = 0$ имеет вид

А) $y = C_1 + C_2 e^{2x}$

Б) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$

В) $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

65. Общее решение однородного уравнения $y'' - 4y = 0$ имеет вид

А) $y = C_1 + C_2 e^{4x}$

Б) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$

В) $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

66. Среди дифференциальных уравнений:

1) $2y' - xy^2 = e^{-x}$

2) $y' + 5xy = \sin 2x$

3) $y \cdot y' - y = e^{2x}$

4) $y' + \dfrac{3x}{y} = tgx$

линейными дифференциальными уравнениями первого порядка являются уравнения

А) 3) Б) 2) В) 3) и 4) Г) 1) и 3)

67. Из дифференциальных уравнений:

1) $y' + y = x$

2) $y' - 2y = \cos x$

3) $y' + \dfrac{x}{y^2} = \sin 2x$

4) $y' - xy = e^{-x}$

не является линейным дифференциальным уравнением первого порядка только уравнение

А) 1) Б) 2) В) 3) Г) 4)

68. Уравнение $y' + 2xy = x^2 e^{-x^2}$ является уравнением типа

А) уравнение с разделяющимися переменными
Б) однородное уравнение первого порядка
В) линейное уравнение первого порядка

Г) уравнение Бернулли

69. Уравнение $y' + xy + (2 - x)e^{x} y^2 = 0$ является уравнением типа

А) уравнение с разделяющимися переменными
Б) однородное уравнение первого порядка
В) линейное уравнение первого порядка
Г) уравнение Бернулли

70. Уравнение $(1 + x^2)\mathrm{d}y + y dx = 0$ является уравнением типа

А) уравнение с разделяющимися переменными
Б) однородное уравнение первого порядка
В) линейное уравнение первого порядка
Г) уравнение Бернулли

71. Уравнение $xy' \sin\dfrac{y}{x} + x = y \sin\dfrac{y}{x}$ является уравнением типа

А) уравнение с разделяющимися переменными
Б) однородное уравнение первого порядка
В) линейное уравнение первого порядка
Г) уравнение Бернулли

72. Способ решения уравнения второго порядка $y'' ctg 3x + y' = 0$ заключается в следующем:

А) последовательное интегрирование обеих частей уравнения
Б) подстановка $y' = z(x),\ y'' = z'(x)$
В) подстановка $y' = p(y),\ y'' = p\dfrac{dp}{dy}$

73. Способ решения уравнения второго порядка $y'' = \cos^2 x + e^{3x} + 8x^2$ заключается в следующем:

А) последовательное интегрирование обеих частей уравнения
Б) подстановка $y' = z(x),\ y'' = z'(x)$
В) подстановка $y' = p(y),\ y'' = p\dfrac{dp}{dy}$

74. Способ решения уравнения второго порядка $(y')^2 = (2y + 3y')y''$ заключается в следующем:

А) последовательное интегрирование обеих частей уравнения

Б) подстановка $y' = z(x),\ y'' = z'(x)$

В) подстановка $y' = p(y),\ y'' = p\frac{dp}{dy}$

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Баранова Е., Васильева Н., Федотов В. Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты: Учебное пособие. – 2-е изд. – СПб: Питер, 2013. – 400 с.: ил.
2. Зиннатуллина А.Н., Киселева Н.Г. Математика. Часть 2: Учебно – методическое пособие / А.Н. Зиннатуллина, Н.Г. Киселева. - Казань: Изд-во Казанского ГАУ, 2015. – 120 с.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – 11-е изд.– М.: Айрис-пресс, 2013. – 608 с.: ил. – (Высшее образование).
4. Сборник задач по высшей математике. 2 курс/ К.Н.Лунгу и др.; под. ред. С.Н.Федина.- 6-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 592 с.:ил. – (Высшее образование)
5. Соболь Б.В. Практикум по высшей математике / Б.В. Соболь, Н.Т. Мишняков, В.М. Поркшеян. – Изд. 6-е. – Ростов н/Д: Феникс, 2010. – 630, [1]с. – (Высшее образование).
6. Шапкин А.С. Задачи по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию с решениями: Учебное пособие / А.С. Шапкин, В.А Шапкин. – 7-е изд., – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2010. – 432 с.
7. Шипачев В.С. Курс высшей математики: Учебник для вузов / В.С. Шипачев; Под ред. А.Н. Тихонова. – 4-е изд., испр. – М.: Издательство Оникс, 2009. – 608 с: ил.