

**Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Казанский государственный аграрный университет»
Институт механизации и технического сервиса**

Кафедра физики и математики

ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Методические указания
для практических и самостоятельных работ

Казань, 2017

УДК 51 (07)
ББК 22.01Р

Составители: Ибяттов Р.И.
Киселева Н.Г.

Рецензенты:

Кандидат технических наук, доцент кафедры «Тракторы, автомобили и энергетические установки», доцент Халиуллин Ф.Х.

Зам. директора по научной работе ООО «НПП ЭкоЭнергоМаш», кандидат технических наук Иванов В.В.

Печатается по решению методической комиссии ИМ и ТС (протокол №4 от 12. 12. 2017 г.), кафедры физики и математики (протокол №3 от 25. 10. 2017 г.).

Ибяттов Р.И., Киселева Н.Г. Задачи линейного программирования: методические указания для практических и самостоятельных работ. – Казань: Изд-во Казанского ГАУ, 2017. – 51 с.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлениям: 35.03.06 – Агроинженерия, 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, 20.03.01 – Техносферная безопасность, 23.05.01 – Наземные транспортно-технологические средства, изучающие дисциплину «Математическое моделирование в инженерии», 21.04.02 – Землеустройство и кадастры при изучении дисциплины «Прикладная математика». Содержат краткие теоретические сведения, примеры построения математических моделей, методы решения задач линейного программирования, задачи, связанные с рациональным использованием ресурсов. Приведены задания для самостоятельной работы.

Методические указания также можно использовать для самостоятельной работы магистров, аспирантов при изучении дисциплины «Математическое моделирование».

УДК 51 (07)
ББК 22.01Р

© Казанский государственный аграрный университет, 2017 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. Линейное программирование.....	5
1.1. Постановка задачи линейного программирования.....	5
1.2 Геометрический метод решения задач линейного программирования.....	10
1.3. Симплексный метод решения ЗЛП.....	18
2. Транспортная задача линейного программирования.....	26
2.1. Математическая модель и формулировка задачи.....	26
2.2. Методы построения опорного решения.....	28
2.3. Проверка опорного плана на оптимальность.....	30
Задания для самостоятельной работы.....	44
Использованная литература.....	51

Введение

Разнообразные задачи человеческой деятельности связаны с отысканием наилучшего (оптимального) варианта решения. Каждый день, даже не осознавая этого, человек решает задачи, связанные с ограничением средств, желая получить наибольшую выгоду. Для получения желаемого, необходимо составить план. Задачи на отыскание лучшего плана принято называть задачами оптимизации. Во всех задачах оптимизации существует множество вариантов решений, а требуется найти наилучший вариант решения.

Моделирование многих задач производственных ситуаций сводится к решению оптимизационных задач с линейными функциями. Методические указания рассматривают примеры построения математических моделей отдельных операций сельскохозяйственного производства, которые сводятся к решению задач линейного программирования.

1.1. Постановка задачи линейного программирования

Стандартная модель ЗЛП на максимум

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_j \geq 0 \quad j=1,n \end{cases}$$

Стандартная модель ЗЛП на минимум

[illegible]

Рассмотрим примеры построения математических моделей стандартной ЗЛП.

Пример 1.1. Предприятие производит два вида изделий A_1 и A_2 . Для изготовления одного изделия вида A_1 требуется 3ед. металла и 2 часа рабочего времени, а для изготовления одного изделия вида A_2 – 7ед. металла и 8 часов рабочего времени. Всего в наличие имеется 20 ед. металла и 40 ч рабочего времени (табл. 1.1).

Таблица 1.1

	Вид изделий		Запас
	A_1	A_2	
Металл, ед	3	7	20
Рабочее время, ч	2	8	40

Прибыль при производстве изделия вида A_1 составляет 3 ден. ед., при производстве изделия вида A_2 – 5 ден. ед. Сколько изделий необходимо изготовить, чтобы получить максимальную прибыль?

Решение.

Для составления математической модели обозначим:

X_1 - число изготовленных изделий вида A_1 ;

X_2 - число изготовленных изделий вида A_2 .

Принимая во внимание значения, приведенные в таблице 1.1, получаем систему ограничений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \leq 20, \\ 2x_1 + 8x_2 \leq 40. \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Общую прибыль при производстве изделий можно выразить в виде линейной функции $f(x) = 3x_1 + 5x_2$.

Стандартная математическая модель задачи: необходимо найти значения x_1 и x_2 , удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \leq 20, \\ 2x_1 + 8x_2 \leq 40, \end{cases}$$

условиям $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, при которых линейная функция $f(x) = 3x_1 + 5x_2$ принимает максимальное значение.

Пример 1.2. Сельскохозяйственное предприятие может приобрести тракторы марок M_1 и M_2 для выполнения работ P_1 , P_2 и P_3 . Производительность тракторов при выполнении указанных работ, общий объем работ, и стоимость каждого трактора приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Вид работ	Объем работ, га	Производительность трактора марки	
		M_1	M_2
P_1	60	4	3
P_2	40	8	1
P_3	30	1	3
Стоимость трактора, ден. ед.		7	2

Найти такой оптимальный вариант приобретения тракторов, обеспечивающий выполнение всего комплекса работ, чтобы затраты на технику были минимальными.

Решение.

Для составления математической модели обозначим:

x_1 - число тракторов марки M_1 ;

x_2 - число тракторов марки M_2 .

Принимая во внимание значения, приведенные в таблице 1.2, получаем систему ограничений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 60, \\ 8x_1 + x_2 \geq 40, \\ x_1 + 3x_2 \geq 30. \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Общую стоимость техники можно выразить в виде линейной функции $f(x) = 7x_1 + 2x_2$.

Стандартная математическая модель задачи: необходимо найти значения x_1 и x_2 , удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 60, \\ 8x_1 + x_2 \geq 40, \\ x_1 + 3x_2 \geq 30. \end{cases}$$

условиям $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, при которых линейная функция $f(x) = 7x_1 + 2x_2$ принимает минимальное значение.

Канонической называют ЗЛП, в которой все ограничения системы заданы уравнениями, и все переменные удовлетворяют условию неотрицательности ($x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$).

Каноническая форма ЗЛП в координатной форме имеет вид:

[illegible]

или с использованием знака суммирования

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (\min), \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i \quad i = \overline{1, m}, \\ x_j &\geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Для приведения общей ЗЛП к каноническому виду необходимо неравенства преобразовать в равенства с помощью введения *дополнительных* (балансовых, выравнивающих) переменных. Если линейное неравенство вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b$, то дополнительная неотрицательная переменная x_{n+1} вводится со знаком «+»:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + x_{n+1} = b,$$

в неравенство-ограничение вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq b$, со знаком «-»:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n - x_{n+1} = b.$$

Дополнительные переменные вводятся в целевую функцию с нулевыми коэффициентами и поэтому не влияют на ее значение.

Пример 1.3. Привести ЗЛП к каноническому виду

$$f(x) = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 13, \\ x_1 - 5x_2 \geq 20, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение.

В левые части первого и второго ограничений-неравенств типа « $\leq$ » вводим соответственно дополнительные неотрицательные переменные x_3 и x_4 со знаком «+», а в левую часть третьего ограничения-неравенства типа « $\geq$ » дополнительную неотрицательную переменную x_5 со знаком «-». В целевую функцию дополнительные переменные x_3 , x_4 , x_5 входят с коэффициентом ноль. Получаем

$$f(x) = 3x_1 + 5x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 13, \\ x_1 - 5x_2 - x_5 = 20, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5} \end{cases}$$

- каноническая форма ЗЛП.

1.2. Геометрический метод решения ЗЛП с двумя переменными

Пусть требуется найти максимальное значение функции

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2, \quad (5)$$

удовлетворяющей системе ограничений:

[illegible]

На плоскости в прямоугольной системе координат изображают графически решение неравенств системы (6). Рассмотрим неравенство $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$, которое определяет полуплоскость, лежащую по одну из сторон прямой $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$. Координаты точки другой полуплоскости удовлетворяют противоположному неравенству $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$ (рис. 1.1).

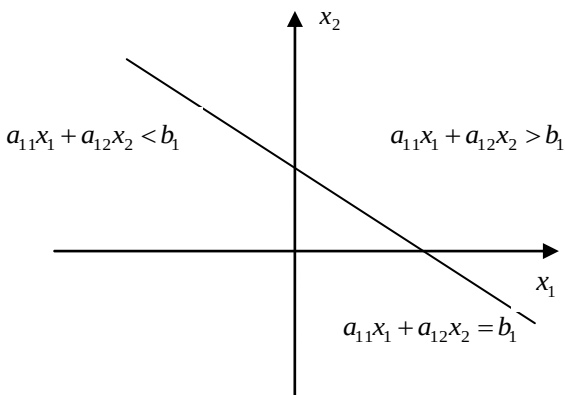


Рисунок 1.1 – Полуплоскости прямой $a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = b_1$

Чтобы определить, какую именно полуплоскость определяет неравенство, достаточно взять произвольную точку плоскости (x_1, x_2) , (например, начало координат) и подставить ее координаты в неравенство. Если получится верное утверждение, то полуплоскость, содержащая данную точку – искомая. В противном случае нужная полуплоскость лежит по другую сторону прямой $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$. Точки пересечения всех полуплоскостей, определяемых каждым из ограничений, составляют ОДР системы (6).

Для решения ЗЛП с двумя переменными используют следующий алгоритм:

1) строится область допустимых значений переменных, являющихся решениями соответствующих неравенств – допустимый многоугольник X ;

2) изображается целевой вектор $\bar{n} = (c_1; c_2)$;

3) через допустимое множество проводится перпендикуляр к целевому вектору – это линия уровня целевой функции;

4) линию уровня параллельно самой себе перемещают по направлению (против направления) целевого вектора до тех пор, пока не определится последняя точка касания с многоугольником X . Эта точка и будет точкой максимума (минимума) (рис. 1.2);

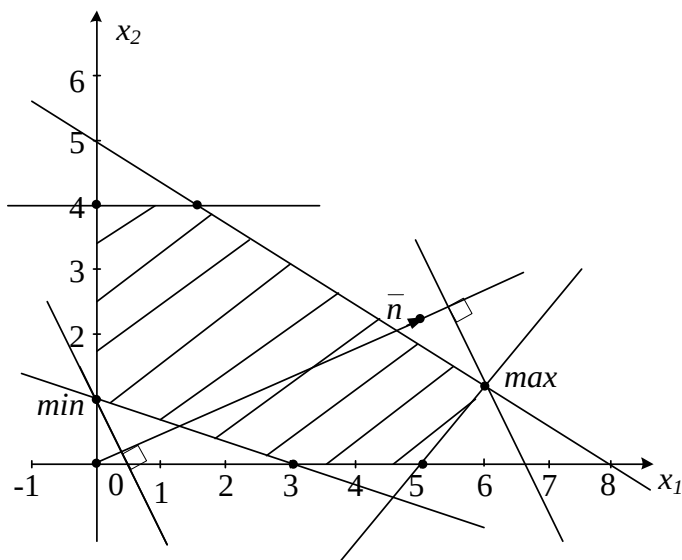


Рисунок 1.2 – Многоугольник допустимых значений

5) вычисляют значение целевой функции в точке максимума (минимума).

Решением ЗЛП, исходя от вида ОДР и целевой функции $f(x)$, могут быть следующие случаи: единственное решение, отрезок прямой, бесконечное множество решений или нет ни одного оптимального решения (рис. 1.3).

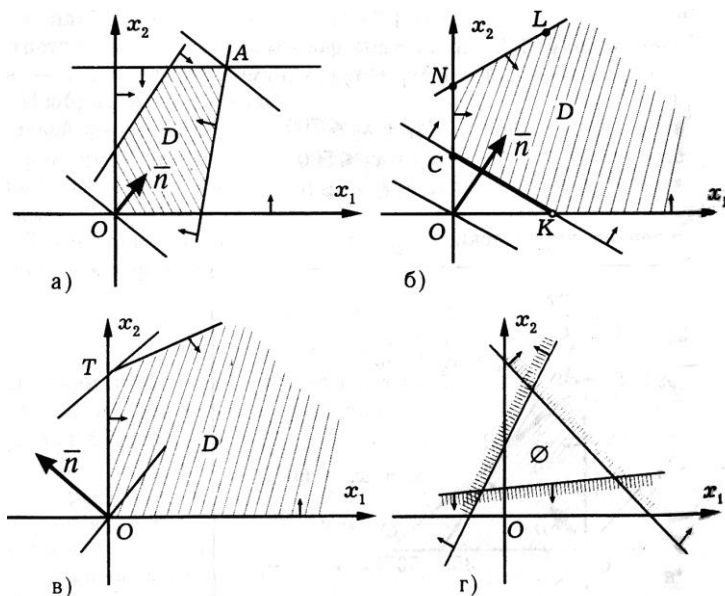


Рисунок 1.3 – Различные случаи ОДР

Задача имеет единственное решение – рис. 1.3а при решении на максимум (точка A), рис. 1.3в при решении на максимум (точка T) и рис. 1.3а при решении на минимум (точка O); отрезок прямой – рис. 1.3б при решении на минимум (отрезок CK); бесконечное множество решений – рис. 1.3б при решении на максимум и рис. 1.3в при решении на минимум; нет решений – рис. 1.3г.

Пример 1.4. Хозяйству требуется не более 6 шт. двухтонных и не более 4 шт. пятитонных автомашин. На приобретение машин у хозяйства имеется 40 у.е., а стоимость одной машины равна 5 у.е. и 8 у.е. соответственно. Сколько следует приобрести машин каждой марки, чтобы их суммарная грузоподъемность была максимальной?

Решение.

Для составления математической модели обозначим:

x_1 - количество двухтонных машин;

x_2 - количество пятитонных машин.

Учитывая условие задачи, получаем систему ограничений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \leq 40, \\ x_1 \leq 6, \\ x_2 \leq 4 \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Суммарную грузоподъемность машин можно выразить в виде линейной функции $f(x) = 2x_1 + 5x_2$.

Стандартная математическая модель задачи:

$$f(x) = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \leq 40, \\ x_1 \leq 6, \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решим ЗЛП геометрическим способом.

Для построения прямой $5x_1 + 8x_2 = 40$ определим точки пересечения ее с осями координат, то есть для данной прямой имеем таблицу значений:

x_1	0	8
x_2	5	0

Возьмем точку $(0; 0)$ и подставим в неравенство $5x_1 + 8x_2 \leq 40$, получим $0 \leq 40$ - неравенство выполняется $\Rightarrow$ данному неравенству соответствует нижняя полуплоскость, содержащая точку $(0; 0)$.

Построим прямые $x_1 = 6$ и $x_2 = 4$.

Неравенство $x_1 \leq 6$ геометрически определяет полуплоскость, лежащую левее граничной прямой $x_1 = 6$. Решением неравенства $x_2 \leq 4$ является нижняя полуплоскость с граничной прямой $x_2 = 4$.

Решением неравенств $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ является I четверть плоскости X_1OX_2 .

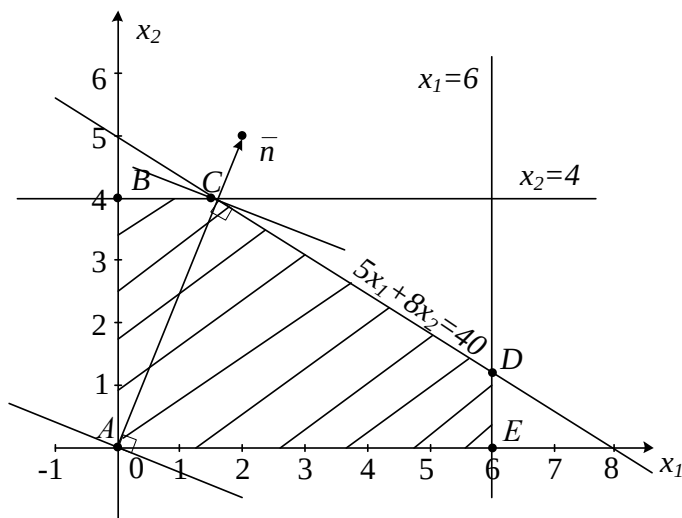


Рисунок 1.4 – Область допустимых решений системы неравенств

Выпуклый пятиугольник $ABCDE$, имеющий пять угловые точки $A(0; 0)$, $B(0; 4)$, $C(1,6; 4)$, $D(6; 1,33)$ является областью допустимых решений системы неравенств (рис. 1.4).

Построим вектор $\bar{n} = (2; 5)$ и прямую $2x_1 + 5x_2 = 0$, она будет проходить через начало координат перпендикулярно вектору $\bar{n} = (2; 5)$. Перемещая линию уровня по направлению вектора $\bar{n}$, получим, что на пятиугольнике решений максимальное значение линейной формы будет достигнуто в угловой точке $C(1,6; 4)$:

$$F_{\max} = 2 \cdot 1,6 + 5 \cdot 4 = 23,2.$$

Так как по смыслу задачи переменные x_1 и x_2 – количество машин, следовательно, они должны быть целочисленные, то линию уровня перемещаем назад до нахождения ближайшей целой точки $(1; 4)$:

$$F_{\max} = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 = 22.$$

Таким образом, для того, чтобы суммарная грузоподъемность машин была максимальной, хозяйству следует приобрести 1 двухтонную машину и 4 пятитонных машин. Любой другой вариант приобретения машин дает меньшую суммарную грузоподъемность.

Пример 1.5. Агрофирма для кормления животных использует два вида корма I и II, которые содержат питательные вещества S_1 , S_2 , S_3 . В рационе животного на один день должно быть не менее 9 ед. питательного вещества S_1 , 8 ед. вещества S_2 , 12 ед. вещества S_3 . Стоимость 1 кг корма I составляет 7 ден. ед., корма II – 5 ден. ед. Содержание количества единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Питательные вещества	Кол-во единиц питательных веществ в 1 кг корма	
	корм I	корм II
S_1	3	1
S_2	1	2
S_3	1	6
Цена 1 кг корма, ден. ед.	7	5

Необходимо составить такой дневной рацион, который бы имел минимальную стоимость, а содержание питательных веществ каждого вида не выходило бы за нормы допустимого.

Решение.

Для составления математической модели обозначим:

x_1 - количество корма I;

x_2 - количество корма II,

входящих в дневной рацион животных.

Принимая во внимание значения, приведенные в таблице 1.3, и условие, что дневной рацион удовлетворяет требуемой питательности только в случае, если количество единиц питательных веществ не меньше предусмотренного, получаем систему ограничений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12. \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Общую стоимость рациона можно выразить в виде линейной функции $f(x) = 7x_1 + 5x_2$.

Стандартная математическая модель задачи: необходимо найти значения x_1 и x_2 , удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12. \end{cases}$$

условиям $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, при которых линейная функция $f(x) = 7x_1 + 5x_2$ принимает минимальное значение.

Решим ЗЛП геометрическим способом.

Для построения прямой $3x_1 + x_2 = 9$ определим точки пересечения ее с осями координат, то есть для данной прямой имеем таблицу значений:

x_1	0	3
x_2	9	0

Определим какая полуплоскость соответствует неравенству $3x_1 + x_2 \geq 9$. Возьмем точку $(0;0)$ и подставив в неравенство, получим $0 \geq 9$ - неравенство не выполняется $\Rightarrow$ данному неравенству соответствует верхняя полуплоскость, не содержащая точку $(0; 0)$.

Аналогично, для прямой $x_1 + 2x_2 = 8$ имеем таблицу значений:

x_1	0	8
x_2	4	0

Определим какая полуплоскость соответствует неравенству $x_1 + 2x_2 \geq 8$. Возьмем точку $(0;0)$ и подставив в неравенство, получим $0 \geq 8$ - неравенство не выполняется $\Rightarrow$ данному неравенству соответствует верхняя полуплоскость, не содержащая точку $(0; 0)$.

Аналогично строим прямую $x_1 + 5x_2 = 12$, для нее соответствует таблица значений:

x_1	0	12
x_2	2	0

Для определения полуплоскости берем точку $(0;0)$, имеем $0 \geq 12$ - неравенство не выполняется $\Rightarrow$ данному неравенству соответствует верхняя полуплоскость, не содержащая точку $(0; 0)$.

Решением неравенств $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ является I четверть плоскости X_1OX_2 .

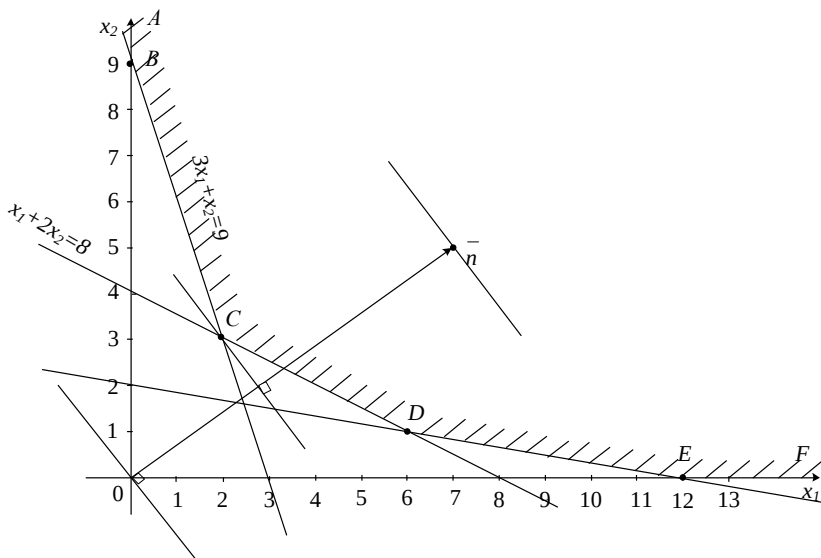


Рисунок 1.5 – Область допустимых решений системы неравенств

Область $ABCDEF$ – это открытая область допустимых решений системы неравенств (рис. 1.5).

Построим вектор $\vec{n} = (7; 5)$ и прямую $7x_1 + 5x_2 = 0$, которая будет проходить через начало координат и перпендикулярно вектору $\vec{n} = (7; 5)$. Так как в задаче требуется найти минимум, значит, перемещаем линию уровня против направления вектора $\vec{n}$ и минимальное значение линейной формы будет достигнуто в угловой точке C .

Для нахождения координат точки C , необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ 3x_1 + x_2 = 9. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - 2x_2, \\ 3(8 - 2x_2) + x_2 = 9. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Следовательно, линейная форма достигает минимального значения в точке $C(2; 3)$:

$$F_{\min} = 7 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 29.$$

Таким образом, дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, состоит из 2 ед. корма I и 3 ед. корма II.

1.3. Симплексный метод решения ЗЛП

Графическим методом решаются обычно ЗЛП, которые содержат две переменные (если в задаче количество переменных три и более трех, то представить ОДР графически вызывает затруднения). Для решения задач, имеющих более двух переменных, применяют симплексный метод – метод последовательного улучшения планов.

Суть симплексного метода заключается в том, что начиная с некоторой исходной угловой точки, происходит переход к другой угловой точке до тех пор, пока не будет найдена точка, которая соответствует оптимальному решению.

Алгоритм симплексного метода:

- 1) приводим задачу к каноническому виду;
- 2) из стандартной формы линейной модели определяем начальное базисное решение, путем приравнявая к нулю $m-n$ переменных;
- 3) из числа текущих свободных (небазисных) переменных выбирается включаемая в новый базис переменная, увеличение (уменьшение) которой обеспечивает улучшение значение целевой функции (если такой переменной нет, то базисное решение оптимально);
- 4) из числа переменных текущего базиса выбирается исключаемая переменная, которая должна принять нулевое значение при введении в состав базиса новой переменной;
- 5) определяется новое базисное решение, производится переход к 2).

Пример 1.6. На площадках П1 и П2 работают два автопогрузчика АП-1 и АП-2. Не больше чем за 24 ч на площадках требуется погрузить 230 т и 168 т груза соответственно. Стоимость погрузки одной тонны груза и количество груза, которое может погрузить за один час каждый автопогрузчик на той или иной площадке известны (табл. 1.4).

Таблица 1.4

Автопогрузчик	Мощность на площадке, т/час		Стоимость работ на площадке	
	П ₁	П ₂	П ₁	П ₂
АП-1	10	12	8	7
АП-2	13	13	12	13

Необходимо найти такое количество груза на каждой площадке, которое должен погрузить каждый автопогрузчик, чтобы общая стоимость была минимальной.

Решение.

Для составления математической модели обозначим:

x_1 - количество груза, которое погрузит автопогрузчик АП-1 на площадке П1;

x_2 - количество груза, которое погрузит автопогрузчик АП-1 на площадке П2;

x_3 - количество груза, которое погрузит автопогрузчик АП-2 на площадке П1;

x_4 - количество груза, которое погрузит автопогрузчик АП-2 на площадке П2;

Учитывая условие задачи, получаем систему ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 230, \\ x_2 + x_4 = 168, \\ \frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{12}x_2 \leq 24, \\ \frac{1}{13}x_3 + \frac{1}{13}x_4 \leq 24. \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Суммарные стоимости работ автопогрузчиков можно выразить в виде линейной функции $f(x) = 8x_1 + 7x_2 + 12x_3 + 13x_4$.

Стандартная математическая модель задачи:

$$f(x) = 8x_1 + 7x_2 + 12x_3 + 13x_4 \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 230, \\ x_2 + x_4 = 168, \\ \frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{12}x_2 \leq 24, \\ \frac{1}{13}x_3 + \frac{1}{13}x_4 \leq 24. \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решим ЗЛП симплексным методом.

Приведем задачу к каноническому виду, вводя дополнительные не-

отрицательные переменные x_5, x_6 , получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 230, \\ x_2 + x_4 = 168, \\ \frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{12}x_2 + x_5 = 24, \\ \frac{1}{13}x_3 + \frac{1}{13}x_4 + x_6 = 24. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}.$$

Найдем базисное решение системы ограничений, которое бы минимизировало линейную форму $f(x) = 8x_1 + 7x_2 + 12x_3 + 13x_4$.

I шаг. x_2, x_3, x_5, x_6 – базисные переменные;

x_1, x_4 – свободные переменные.

Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_2 = 168 - x_4, \\ x_3 = 230 - x_1, \\ x_5 = 24 - \frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{12}(168 - x_4), \\ x_6 = 24 - \frac{1}{13}(230 - x_1) - \frac{1}{13}x_4. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим:

$$\begin{cases} x_2 = 168 - x_4, \\ x_3 = 230 - x_1, \\ x_5 = 10 - \frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{12}x_4, \\ x_6 = \frac{82}{13} + \frac{1}{13}x_1 - \frac{1}{13}x_4. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}.$$

Базисное решение $(0; 168; 230; 0; 10; 82/13)$ не содержит отрицательных чисел, поэтому оно является допустим. Проверим данное допу-

стимое базисное решение на оптимальность, для этого подставляем базисные переменные в функцию:

$$f(x) = 8x_1 + 7(168 - x_4) + 12(230 - x_1) + 13x_4 = 3936 - 4x_1 + 6x_4.$$

Значение функции $f(x)$ не является оптимальным (минимальным), так как переменная x_1 со знаком «-» и, значит, может уменьшить значение функции $f(x)$. Переведем переменную x_1 в базисные переменные.

Найдем минимальное значение отношения свободного члена к коэффициенту при x_1 , причем знаки у них должны быть противоположными (в противном случае пишут ∞):

$$x_1 = \min\{\infty; 230/1; 100/1; \infty\} = 100.$$

Минимальное отношение соответствует третьему ограничению, поэтому x_5 переходит в свободные переменные.

II шаг. x_1, x_2, x_3, x_6 – базисные переменные;

x_4, x_5 – свободные переменные.

Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_2 = 168 - x_4, \\ x_3 = 230 - (100 + \frac{5}{6}x_4 - 10x_5), \\ x_1 = 100 + \frac{5}{6}x_4 - 10x_5, \\ x_6 = \frac{82}{13} + \frac{1}{13}(100 + \frac{5}{6}x_4 - 10x_5) - \frac{1}{13}x_4. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим:

$$\begin{cases} x_2 = 168 - x_4, \\ x_3 = 130 - \frac{5}{6}x_4 + 10x_5, \\ x_1 = 100 + \frac{5}{6}x_4 - 10x_5, \\ x_6 = 14 - \frac{1}{78}x_4 - \frac{10}{13}x_5. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}.$$

Базисное решение (100; 168; 130; 0; 0; 14) проверим на оптимальность.

$$f(x) = 3936 - 4(100 + \frac{5}{6}x_4 - 10x_5) + 6x_4 = 3536 + \frac{16}{6}x_4 + 40x_5.$$

Значение функции $f(x)$ является оптимальным (минимальным), так как содержит все переменные со знаком «+». Следовательно, оптимальным является следующий план работ:

100 тонн груза погрузит автопогрузчик АП-1 на площадке П1;

168 тонн груза погрузит автопогрузчик АП-1 на площадке П2;

130 тонн груза погрузит автопогрузчик АП-2 на площадке П1.

Общая стоимость работ составит 3536 ден. единиц.

Пример 1.7. Небольшая фирма планирует выпускать три вида изделий B_1, B_2, B_3 ; для их производства требуется три вида машин A_1, A_2, A_3 . Для машин типа A_1 имеется машинного рабочего времени – 48 ч, для машин типа A_2 – 60 ч, для машин типа A_3 – 36 ч. Стоимость одного изделия каждого вида составляет 6, 4 и 3 тыс. руб. соответственно. Затраты рабочего времени каждой из машин на производство одного изделия представлены в табл. 1.5.

Таблица 1.5

Виды машин	Изделия			Всего машинного рабочего времени
	B_1	B_2	B_3	
A_1	2	4	3	48
A_2	4	2	3	60
A_3	3	0	1	36

Составить план производства изделий на фирме так, чтобы оно получало максимальную прибыль.

Решение.

Для составления математической модели обозначим:

x_1 - количество изделий B_1 ;

x_2 - количество изделий B_2 ;

x_3 - количество изделий B_3 .

По условию задачи эти переменные должны удовлетворять системе ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 48, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 60, \\ 3x_1 + x_3 \leq 36. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,3}.$$

Требуется найти план, доставляющий максимальное значение функции прибыли $f(x) = 6x_1 + 4x_2 + 3x_3$.

Приведем задачу к каноническому виду, добавим дополнительные неотрицательные переменные x_4, x_5, x_6 :

$$f(x) = 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 48, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 60, \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 36. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,6}.$$

Найдем любое базисное решение.

I шаг. x_4, x_5, x_6 – базисные переменные;

x_1, x_2, x_3 – свободные переменные.

Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_4 = 48 - 2x_1 - 4x_2 - 3x_3, \\ x_5 = 60 - 4x_1 - 2x_2 - 3x_3, \\ x_6 = 36 - 3x_1 - x_3. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,6}.$$

Базисное решение $(0; 0; 0; 48; 60; 36)$ не содержит отрицательных чисел, поэтому оно является допустим. Проверим данное допустимое базисное решение на оптимальность, для этого подставляем базисные переменные в функцию:

$$f(x) = 6x_1 + 4x_2 + 3x_3.$$

Значение функции $f(x) = 0$ не является оптимальным (максимальным), так как содержит переменные x_1, x_2, x_3 со знаком «+». Переменная x_1 может быстрее увеличить значение функции $f(x)$ (т.к. коэффициент больше, чем у остальных), поэтому ее не выгодно считать свободной. Переведем переменную x_1 в базисные переменные.

Найдем минимальное значение отношения свободного члена к коэффициенту при x_1 , причем знаки у них должны быть противоположными (в противном случае пишут ∞):

$$x_1 = \min\{42/2; 60/4; 36/3\} = 12.$$

Минимальное отношение соответствует третьему ограничению, поэтому x_6 переходит в свободные переменные.

II шаг. x_1, x_4, x_5 – базисные переменные;

x_2, x_3, x_6 – свободные переменные.

Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_4 = 48 - 2(12 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6) - 4x_2 - 3x_3, \\ x_5 = 60 - 4(12 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6) - 2x_2 - 3x_3, \\ x_1 = 12 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,6}.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим:

$$\begin{cases} x_4 = 24 - 4x_2 - \frac{7}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_6, \\ x_5 = 12 - 2x_2 - \frac{5}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_6, \\ x_1 = 12 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,6}.$$

Базисное решение (12; 0; 0; 24; 12; 0) проверим на оптимальность, для этого подставляем базисные переменные в функцию:

$$f(x) = 6(12 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_6) + 4x_2 + 3x_3 = 72 + 4x_2 + x_3 - x_6.$$

Значение функции $f(x) = 72$ не является оптимальным (максимальным), так как содержит переменные x_3, x_2 со знаком «+». Переменная x_2 может быстрее увеличить значение функции $f(x)$ (т.к. коэффициент больше, чем у остальных). Переведем переменную x_2 в базисные переменные.

Найдем минимальное значение отношения свободного члена к коэффициенту при x_2 , причем знаки у них должны быть противоположными (в противном случае пишут ∞):

$$x_2 = \min\{24/4; 12/2; \infty\} = 6.$$

Минимальное отношение соответствует первому ограничению, поэтому x_4 переходит в свободные переменные.

III шаг. x_1, x_2, x_5 – базисные переменные;

x_3, x_4, x_6 – свободные переменные.

Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_2 = 6 - \frac{7}{12}x_3 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{6}x_6, \\ x_5 = 12 - 2(6 - \frac{7}{12}x_3 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{6}x_6) - \frac{5}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_6, \\ x_1 = 12 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 6}.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим:

$$\begin{cases} x_2 = 6 - \frac{7}{12}x_3 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{6}x_6, \\ x_5 = 0 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + x_6, \\ x_1 = 12 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 6}.$$

Базисное решение $(12; 6; 0; 0; 0; 0)$ проверим на оптимальность, для этого подставляем базисные переменные в функцию:

$$f(x) = 72 + 4(6 - \frac{7}{12}x_3 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{6}x_6) + x_3 - x_6 = 96 - \frac{4}{3}x_3 - x_4 - \frac{1}{3}x_6.$$

Значение функции $f(x)$ является оптимальным (максимальным), так как содержит все переменные со знаком «-». Значит, никакая переменная не может увеличить значение функции $f(x)$.

Следовательно, для получения максимальной прибыли фирме следует выпускать изделий B_1 в количестве 12, изделий B_2 в количестве 6, а изделий B_3 вообще не следует выпускать, тогда прибыль составит 96 тыс. рублей.

2. Транспортная задача линейного программирования.

2.1. Математическая модель и формулировка задачи

В агропромышленном комплексе в производственном процессе часто приходится сталкиваться с множеством проблем, таких как: необходимость быстрой перевозки сельскохозяйственной продукции, быстрой переработки информации о состоянии полей, динамичность агроклиматических факторов, острая ограниченность во времени, характерная для определенных периодов сельскохозяйственного производства. Использование математических моделей оптимизации землепользования позволяют решить задачи, связанные с экологическими проблемами, планированием рационального природопользования.

В задачах такого вида требуется найти такой оптимальный план, в результате которого бы в зависимости от поставленной задачи, получили наименьшие затраты или наибольшую прибыль и такие задачи называют транспортными.

Формулировка транспортной задачи: имеется m пунктов $A_1, A_2, \dots, A_m$, в которых имеются запасы груза в количестве $a_1, a_2, \dots, a_m$ единиц и имеется n пунктов назначения $B_1, B_2, \dots, B_n$, подавших заявки на $b_1, b_2, \dots, b_n$ единиц товара соответственно.

Стоимость c_{ij} перевозок единицы груза из пункта A_i в пункт B_j называют истинным тарифом (табл. 2.1).

Таблица 2.1

	B_1	B_2	$\dots$	B_n	Запасы a_i
A_1	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2n}	a_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\dots$	c_{mn}	a_{mn}
Заявки b_j	b_1	b_2	$\dots$	b_n	

Транспортная задача считается закрытой, если $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, в про-

тивном случае – открытой. В случае, если задача открытая, то ее приводят к закрытому виду следующим образом:

1) если $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$, то вводится $(n + 1)$ пункт назначения с заяв-

кой $b_{n+1} = \sum a_i - \sum b_j$ и истинными тарифами $c_{i, n+1} = 0$, где $i = 1, \dots, m$;

2) если $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$, то вводится $(m+1)$ пункт опрвления с запаса-

ми $a_{m+1} = \sum b_j - \sum a_i$ и истинными тарифами $c_{j, m+1} = 0$, где $j = 1, \dots, n$.

пусть x_{ij} – количество единиц груза, отправляемого из i -го пункта

1) все грузы должны быть вывезены, т.е.

[illegible]

$$\text{или } \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, \dots, m;$$

[illegible]

$$\text{или } \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, \dots, n.$$

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \dots + c_{2n}x_{2n} + \dots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn} \rightarrow \min.$$
$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \text{ при ограничениях:}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m x_{ij} = a_i, i = 1, \dots, m; \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, \dots, n; \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

В случае, когда число заполненных клеток при построении плана перевозок меньше, чем $(m + n - 1)$, то в недостающее число свободных клеток вводят нулевые поставки и далее эти клетки рассматривают как заполненные.

2.2. Методы построения опорного решения

Метод наименьшего (минимального) тарифа: груз распределяют сначала в клетки с минимальным тарифом c_{ij} . Далее, учитывая оставшиеся запасы у поставщиков и спрос потребителей, распределяют в незанятые клетки с наименьшим тарифом.

Пример 2.1. На трех базах A_1, A_2, A_3 находится однородный груз в количестве 200, 200, 100 тонн. Этот груз необходимо развести пяти потребителям B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 , потребности которых в данном грузе составляют 70, 80, 150, 110, 90 тонн соответственно. Стоимость перевозок единицы продукции от i -го поставщика к j -му потребителю c_{ij} представлена матрицей:

$$\begin{pmatrix} 4 & 11 & 6 & 5 & 15 \\ 8 & 7 & 9 & 13 & 10 \\ 9 & 5 & 12 & 12 & 20 \end{pmatrix}$$

Требуется установить такие объемы перевозок x_{ij} от каждого поставщика к каждому потребителю, чтобы суммарные затраты на перевозки были минимальными и потребности всех потребителей были удовлетворены.

Решение.

Найдем исходное опорное решение методом наименьшего тарифа (табл. 2.2):

1) смотрим по всей таблице минимальный тариф 4. Значит, в A_1B_1 помещаем $\min\{70, 200\} = 70$. Так как потребность пункта B_1 удовлетворена, то далее из рассмотрения исключаем этот столбец;

2) далее следующий наименьший тариф 5. В клетку A_1B_4 помещаем $\min\{200-70, 110\} = 110$ и потребность пункта B_4 удовлетворена $\Rightarrow$ из рассмотрения исключаем этот столбец;

3) в клетку A_3B_2 также с минимальным тарифом 5 помещаем $\min\{100, 80\} = 80$ и потребность пункта B_2 удовлетворена, исключаем этот столбец;

4) заполняем клетку A_1B_3 с тарифом 6. В эту клетку вписываем $\min\{200-70-110, 150\} = 20$, запасы A_1 распределили;

5) заполняем клетку A_2B_3 с тарифом 9. В эту клетку вписываем $\min\{200, 150-20\} = 130$, потребность пункта B_3 удовлетворена;

6) в клетку A_2B_5 с тарифом 10 помещаем $\min\{200-130, 90\} = 70$, запасы A_2 распределили и ее исключаем;

7) в клетку A_3B_5 с тарифом 20 вписываем $\min\{100-80, 90-70\} = 20$, все запасы распределили.

Таблица 2.2

ПО/ ПН	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	70 4	- 11	20 6	110 5	- 15	200
A_2	- 8	- 7	130 9	- 13	70 10	200
A_3	- 9	80 5	- 12	- 7	20 20	100
Заявки b_j	70	80	150	110	90	

Исходный опорный план:

$$F_{исх} = 70 \cdot 4 + 20 \cdot 6 + 110 \cdot 5 + 130 \cdot 9 + 70 \cdot 10 + 80 \cdot 5 + 20 \cdot 20 = 3620.$$

Метод «северо-западного» угла: каждый раз начинают с левой верхней клетки – «северо-западного» угла таблицы поставок распределение груза в пункты назначения, причем истинные тарифы не учитываются (табл. 2.3):

1) в клетку A_1B_1 запишем $\min\{70, 200\} = 70$, спрос потребителя B_1 удовлетворен;

2) в таблице поставок находим новый «северо-западный» угол – A_1B_2 . Записываем $\min\{200-70, 80\} = 80$, спрос потребителя B_2 удовлетворили;

3) в клетку A_1B_3 записываем $\min\{200-70-80, 150\} = 50$, запас поставщика A_1 распределили;

4) новый «северо-западный» угол – A_2B_3 , получаем для данной клетки значение $\min\{200, 150-50\} = 100$ - спрос потребителя B_3 удовлетворили;

5) теперь «северо-западный» угол – A_2B_4 , записываем $\min\{200-100, 110\} = 100 \Rightarrow$ запасы второй строки распределили;

6) следующий «северо-западный» угол – A_3B_5 , получаем $\min\{100, 110-100\} = 10$ - спрос потребителя B_4 удовлетворили;

7) в таблице остался последний «северо-западный» угол – A_3B_4 , для данной клетки значение $\min\{100-10, 90\} = 90$. Все запасы распределили, спросы потребителей удовлетворили.

Таблица 2.3

ПО\ПН	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	70 4	80 11	50 6	- 5	- 15	200
A_2	- 8	- 7	100 9	100 13	- 10	200
A_3	- 9	- 5	- 12	10 7	90 20	100
Заявки b_j	70	80	150	110	90	

Исходный опорный план:

$$F_{исх} = 70 \cdot 4 + 80 \cdot 11 + 50 \cdot 6 + 100 \cdot 9 + 100 \cdot 13 + 10 \cdot 7 + 90 \cdot 20 = 5530.$$

Опорный план, полученный методом наименьшего тарифа имеет наименьшие затраты, чем план по методу «северо-западного» угла, значит, первый метод быстрее приведет к оптимальному.

2.3. Проверка опорного плана на оптимальность

Найденный исходный опорный план (табл.2.2) проверяем на оптимальность методом потенциалов.

ПО\ПН	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	70 4	- 11	+ 20 6	- 110 5	15	200
A_2	- 8	- 7	- 130 9	- 13	+ 70 10	200
A_3	- 9	80 5	- 12	+ 7	- 20	100
Заявки b_j	70	80	150	110	90	

Чтобы рассчитать потенциалы строк u_i и потенциалы столбцов v_j , необходимо для заполненных клеток записать алгебраическую сумму потенциалов, соответствующих i -й строке u_i и j -му столбцу v_j , и она должна равняться истинному тарифу этой клетки, т.е. $u_i + v_j = c_{ij}$.

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} u_1 + v_1 = 4, \\ u_1 + v_3 = 6, \\ u_1 + v_4 = 5, \\ u_2 + v_3 = 9, \\ u_2 + v_5 = 10, \\ u_3 + v_2 = 5, \\ u_3 + v_5 = 20. \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Полагая } u_1 = 0, \text{ находим} \\
 \left\{ \begin{array}{l} v_1 = 4 - u_1 = 4 - 0 = 4, \\ v_3 = 6 - u_1 = 6 - 0 = 6, \\ v_4 = 5 - u_1 = 5 - 0 = 5, \\ u_2 = 9 - v_3 = 9 - 6 = 3, \\ v_5 = 10 - u_2 = 10 - 3 = 7, \\ v_2 = 5 - u_3 = 5 - 13 = -8, \\ u_3 = 20 - v_5 = 20 - 7 = 13. \end{array} \right.
 \end{array}$$

Для свободных клеток находим оценки $d_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$.

План считается оптимальным, если все оценки меньше или равны 0. Если эти требования не выполняются, то переходят к новому опорному плану. Для этого в таблице находят клетку с наибольшей положительной оценкой, включают ее в цикл перевозок и строят цикл пересчета.

Транспортные задачи с целевой функцией на максимум решаются аналогично, за исключением того, что план считается оптимальным, если все оценки для свободных клеток будут больше или равны 0.

В цикле пересчета свободной клетке соответствует одна вершина, а все остальные вершины – заполненным клеткам, все вершины соединяем замкнутой ломаной линией (отрезки между собой образуют 90°) (рис. 2.1).

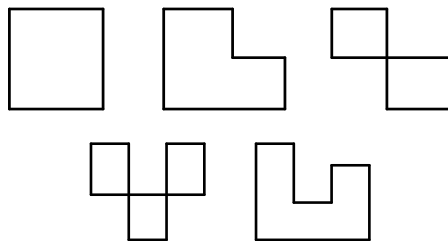


Рисунок 2.1. – Возможные примеры циклов

Каждому циклу соответствует четное число вершин, которые отмечают знаками «+» или «-». Начиная со свободной клетки - пишут знак «+», остальные вершины имеют чередующие знаки.

Пересчёт по циклу производят следующим образом:

1) из чисел, которые находятся в вершинах со знаком «-», находим минимальное и обозначим Δ ;

2) к числам, которые находятся в вершинах со знаком «+» прибавляем Δ , а из чисел в отрицательных вершинах вычитаем Δ .

Полученный план перевозок проверяют на оптимальность. Для свободных клеток находим оценки:

$$d_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + (-8) - 11 = -19;$$

$$d_{15} = u_1 + v_5 - c_{15} = 0 + 7 - 15 = -8;$$

$$d_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 3 + 4 - 8 = -1;$$

$$d_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 3 + (-8) - 7 = -12;$$

$$d_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = 3 + 5 - 13 = -5;$$

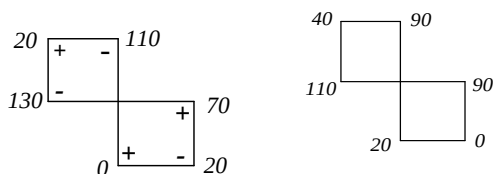
$$d_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 13 + 4 - 9 = 8;$$

$$d_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = 13 + 6 - 12 = 7;$$

$$d_{34} = u_3 + v_4 = 13 + 5 - 7 = 11.$$

Так как имеются положительные оценки, значит, план не оптимальный, необходим пересчет по циклу для одной из клеток. Найдем цикл для клетки A_3B_4 - цикл показан жирной линией (в табл. 2.4).

Найдем $\Delta = \min\{130, 110, 20\} = 20$.



Старый цикл пересчета Цикл после пересчета
Рисунок 2.2. – Циклы пересчета единиц груза

Пересчитав единицы груза, таблица поставок распределения груза в пункты назначения, имеет вид:

Таблица 2.5

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	70 4	- 11	40 6	90 5	- 15	200
A_2	- 8	- 7	110 9	- 13	90 10	200
A_3	- 9	80 5	- 12	20 7	- 20	100
Заявки b_j	70	80	150	110	90	

Для заполненных клеток находим потенциалы строк и столбцов.

Полагая $u_1 = 0$, находим

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4, \\ u_1 + v_3 = 6, \\ u_1 + v_4 = 5, \\ u_2 + v_3 = 9, \\ u_2 + v_5 = 10, \\ u_3 + v_2 = 5, \\ u_3 + v_4 = 7. \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = 4 - u_1 = 4 - 0 = 4, \\ v_3 = 6 - u_1 = 6 - 0 = 6, \\ v_4 = 5 - u_1 = 5 - 0 = 5, \\ u_2 = 9 - v_3 = 9 - 6 = 3, \\ v_5 = 10 - u_2 = 10 - 3 = 7, \\ v_2 = 5 - u_3 = 5 - 2 = 3, \\ u_3 = 7 - v_5 = 7 - 5 = 2. \end{cases}$$

Для свободных клеток находим оценки:

$$d_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 3 - 11 = -8;$$

$$d_{15} = u_1 + v_5 - c_{15} = 0 + 7 - 15 = -8;$$

$$d_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 3 + 4 - 8 = -1;$$

$$d_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 3 + 3 - 7 = -1;$$

$$d_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = 3 + 5 - 13 = -5;$$

$$d_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 2 + 4 - 9 = -3;$$

$$d_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = 2 + 6 - 12 = -4;$$

$$d_{35} = u_3 + v_5 - c_{35} = 2 + 7 - 20 = -11.$$

Оценки всех свободных клеток меньше нуля, значит, полученный план перевозок является оптимальным. По этому плану:

$$F_{\text{опт}} = 70 \cdot 4 + 40 \cdot 6 + 90 \cdot 5 + 110 \cdot 9 + 90 \cdot 10 + 80 \cdot 5 + 20 \cdot 7 = 3400 \text{ ед.}$$

Таким образом, оптимальным является решение:

$$x_{11} = 70 \text{ тонн груза с базы } A_1 \text{ потребителю } B_1;$$

$$x_{13} = 40 \text{ тонн груза с базы } A_1 \text{ потребителю } B_3;$$

$$x_{14} = 90 \text{ тонн груза с базы } A_1 \text{ потребителю } B_4;$$

$$x_{23} = 110 \text{ тонн груза с базы } A_2 \text{ потребителю } B_3;$$

$$x_{25} = 90 \text{ тонн груза с базы } A_2 \text{ потребителю } B_5;$$

$$x_{32} = 80 \text{ тонн груза с базы } A_3 \text{ потребителю } B_2;$$

$$x_{34} = 20 \text{ тонн груза с базы } A_3 \text{ потребителю } B_4.$$

Пример 2.2. На четырех элеваторах A_1, A_2, A_3, A_4 находится зерно в количестве 100, 120, 150, 130 тонн, которое нужно доставить на четыре сельскохозяйственных предприятия для посева. Предприятию B_1 необходимо поставить 140 тонн, предприятию B_2 – 130 тонн, предприятию B_3 –

90 тонн, предприятию B_4 – 140 тонн. Стоимость доставки потребителям от поставщиков представлена матрицей:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 7 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \\ 9 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Составьте оптимальный план перевозки зерна с минимальными затратами.

Решение.

Найдем исходный опорный план методом наименьшего тарифа. Согласно этому методу, зерно будем распределять в первую очередь сельскохозяйственным предприятиям с минимальным тарифом c_{ij} .

Таблица 2.6

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы a_i
A_1	100 4	- 5	- 5	- 7	100
A_2	- 8	- 7	- 5	120 4	120
A_3	40 9	- 6	90 4	20 5	150
A_4	- 3	130 2	- 9	0 3	130
Заявки b_j	140	130	90	140	Заявки b_j

Заполним таблицу перевозок зерна сельскохозяйственным предприятиям (табл. 2.6):

1) минимальный тариф – 2. В клетку A_4B_2 помещаем $\min\{130, 130\} = 130$. Потребность пункта B_2 удовлетворена, запас A_4 полностью распределили, далее этот столбец и строка из рассмотрения исключаются;

2) следующий наименьший тариф – 4. В клетку A_1B_1 помещаем $\min\{100, 140\} = 100$, первую строку далее исключаем;

3) в клетку A_2B_4 с тарифом 4 вписываем $\min\{120, 140\} = 120$, запас A_2 распределили полностью;

4) заполняем клетку A_3B_3 с тарифом 4. В эту клетку вписываем $\min\{150, 90\} = 90$. Потребность пункта B_3 удовлетворена, далее этот столбец из рассмотрения исключаем;

5) следующий минимальный тариф 5. В клетку A_3B_4 помещаем $\min\{150-90, 140-120\} = 20$. Потребность пункта B_4 удовлетворена;

6) минимальный тариф – 9. В клетку A_3B_1 помещаем $\min\{150-90-20, 140-100\} = 40$. Все запасы распределили.

Число базисных переменных должно быть равно $(m + n - 1)$, то есть $4 + 4 - 1 = 7$. В нашем случае количество занятых клеток оказалось 6, что меньше чем $(m + n - 1)$, поэтому недостающее одно число заполним клеткой с нулевыми поставками (условно занятую клетку) с учётом наименьшего тарифа. В клетку A_4B_4 с наименьшим тарифом 3 поставим нулевую поставку.

Затраты по опорному плану составляют:

$$F_1 = 100 \cdot 4 + 120 \cdot 4 + 40 \cdot 9 + 90 \cdot 4 + 20 \cdot 5 + 130 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 1960.$$

Проверяем полученный план на оптимальность. Для заполненных клеток находим потенциалы строк и столбцов.

Полагая $u_1 = 0$, находим

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4, \\ u_2 + v_4 = 4, \\ u_3 + v_4 = 9, \\ u_3 + v_3 = 4, \\ u_3 + v_4 = 5, \\ u_4 + v_2 = 2, \\ u_4 + v_4 = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = 4 - u_1 = 4 - 0 = 4, \\ u_2 = 4 - v_4 = 4 - 0 = 4, \\ u_3 = 9 - v_1 = 9 - 4 = 5, \\ v_3 = 4 - u_3 = 4 - 5 = -1, \\ v_4 = 5 - u_3 = 5 - 5 = 0, \\ v_2 = 2 - u_4 = 2 - 3 = -1, \\ u_4 = 3 - v_4 = 3 - 0 = 3. \end{cases}$$

Для свободных клеток находим оценки:

$$d_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + (-1) - 5 = -6;$$

$$d_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + (-1) - 5 = -6;$$

$$d_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 0 - 7 = -7;$$

$$d_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 4 + 4 - 8 = 0;$$

$$d_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 4 + (-1) - 7 = -4;$$

$$d_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 4 + (-1) - 5 = -2;$$

$$d_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 5 + (-1) - 6 = -2;$$

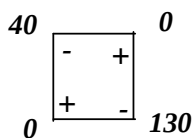
$$d_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = 3 + 4 - 3 = 4;$$

$$d_{42} = u_4 + v_2 - c_{42} = 3 + (-1) - 9 = -7.$$

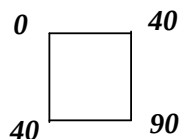
Так как среди оценок свободных клеток имеется положительная оценка ($d_{41} = 4$), то план перевозок не является оптимальным, т.е. необхо-

дим пересчёт по циклу для клетки A_4B_1 . Построим цикл для клетки A_4B_1 (рис. 2.3).

Найдем $\Delta = \min\{40, 130\} = 40$.



Старый цикл пересчета



Цикл после пересчета

Рисунок 2.3. – Циклы пересчета единиц груза

После реализации цикла пересчета получаем табл. 2.7.

Таблица 2.7

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы a_i
A_1	100 4	- 5	- 5	- 7	100
A_2	- 8	- 7	- 5	120 4	120
A_3	- 9	40 6	90 4	20 5	150
A_4	40 3	90 2	- 9	0 3	130
Заявки b_j	140	130	90	140	Заявки b_j

Вычислим затраты по новому плану:

$$F_2 = 100 \cdot 4 + 120 \cdot 4 + 40 \cdot 6 + 90 \cdot 4 + 20 \cdot 5 + 40 \cdot 3 + 90 \cdot 2 = 1880.$$

Проверяем полученный план на оптимальность. Для заполненных клеток находим потенциалы строк и столбцов.

Полагая $u_1 = 0$, находим

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4, \\ u_2 + v_4 = 4, \\ u_3 + v_2 = 6, \\ u_3 + v_3 = 4, \\ u_3 + v_4 = 5, \\ u_4 + v_1 = 3, \\ u_4 + v_2 = 2. \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = 4 - u_1 = 4 - 0 = 4, \\ u_2 = 4 - v_4 = 4 - 2 = 2, \\ u_3 = 6 - v_2 = 6 - 3 = 3, \\ v_3 = 4 - u_3 = 4 - 3 = 1, \\ v_4 = 5 - u_3 = 5 - 3 = 2, \\ u_4 = 3 - v_1 = 3 - 4 = -1, \\ v_2 = 2 - u_4 = 2 - (-1) = 3. \end{cases}$$

Для свободных клеток находим оценки:

$$d_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 3 - 5 = -2;$$

$$d_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 1 - 5 = -4;$$

$$d_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 2 - 7 = -5;$$

$$d_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 2 + 4 - 8 = -2;$$

$$d_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 2 + 3 - 7 = -2;$$

$$d_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 2 + 1 - 5 = -2;$$

$$d_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 3 + 4 - 9 = -2;$$

$$d_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = (-1) + 1 - 9 = -9;$$

$$d_{44} = u_4 + v_4 - c_{44} = (-1) + 2 - 3 = -2.$$

Так как для свободных клеток все оценки отрицательные, следовательно, полученный план перевозок является оптимальным.

Таким образом, оптимальным является решение:

$x_{11} = 100$ тонн зерна с элеватора A_1 предприятию B_1 ;

$x_{24} = 40$ тонн зерна с элеватора A_2 предприятию B_4 ;

$x_{32} = 40$ тонн зерна с элеватора A_3 предприятию B_2 ;

$x_{33} = 90$ тонн зерна с элеватора A_3 предприятию B_3 ;

$x_{34} = 20$ тонн зерна с элеватора A_3 предприятию B_1 ;

$x_{41} = 40$ тонн зерна с элеватора A_4 предприятию B_1 ;

$x_{42} = 90$ тонн зерна с элеватора A_4 предприятию B_2 .

Затраты перевозок составляют по этому плану $F_{\text{опт}} = 1880$ ед.

Пример 2.3. Имеются пять участков земли для посева: 1) ржи, 2) пшеницы, 3) ячменя, 4) кукурузы. Площади участков соответственно равны 270, 250, 200, 350, 430 га. Урожайность культур (ц/га) на соответствующих участках земли представлена матрицей:

$$\begin{pmatrix} 25 & 20 & 22 & 23 & 20 \\ 21 & 22 & 20 & 25 & 23 \\ 14 & 16 & 18 & 21 & 15 \\ 40 & 50 & 46 & 42 & 48 \end{pmatrix}$$

Требуется определить, сколько гектаров земли засеять каждой из культур на каждом участке земли, чтобы суммарная урожайность собранного зерна была максимальной, если известно, что из-за ограниченности в семенном фонде можно засеять рожью, пшеницей, ячменем и кукурузой соответственно 200, 500, 350 и 450 га.

Решение.

Найдем исходное опорное решение (аналогично методу наименьшего тарифа выбираем клетки с наибольшей стоимостью c_{ij}).

Таблица 2.8

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	25 200	20 -	22 -	23 -	20 -	200
A_2	21 -	22 -	20 -	25 350	23 150	500
A_3	14 70	16 -	18 200	21 -	15 80	350
A_4	40 -	50 250	46 -	42 -	48 200	450
Заявки b_j	270	250	200	350	430	Заявки b_j

Заполним таблицу количества каждой культуры на участках земли (табл. 2.8):

1) максимальный тариф – 50. В клетку A_4B_2 помещаем $\min\{450, 250\} = 250$. Потребность пункта B_2 удовлетворена, далее этот столбец из рассмотрения исключаем;

2) следующий максимальный тариф – 48. В клетку A_4B_5 помещаем $\min\{450-250, 430\} = 200$;

3) в клетку A_1B_1 с тарифом 25 вписываем $\min\{200, 270\} = 200$;

4) заполняем клетку A_2B_4 с тарифом 25. В эту клетку вписываем $\min\{500, 350\} = 350$. Потребность пункта B_4 удовлетворена, далее этот столбец из рассмотрения исключаем;

5) следующий максимальный тариф 23. В клетку A_2B_5 помещаем $\min\{500-350, 430-200\} = 150$.

6) в клетку A_3B_5 с тарифом 15 вписываем $\min\{350-200, 430-200-150\} = 80$. Потребность пункта B_5 удовлетворена;

7) максимальный тариф – 14. В клетку A_3B_1 помещаем $\min\{350-200-80, 270-200\} = 70$. Все культуры распределили.

Число базисных переменных должно быть равно $(m + n - 1)$, то есть $4 + 5 - 1 = 8$. По таблице 2.8 количество занятых клеток 8, условие выполняется. Получим опорный план посева, для которого суммарная урожайность зерна:

$$F_1 = 200 \cdot 25 + 350 \cdot 25 + 150 \cdot 23 + 70 \cdot 14 + 200 \cdot 18 + 80 \cdot 15 + 250 \cdot 50 + 200 \cdot 48 = 45080.$$

Проверяем полученный план на оптимальность. Для заполненных клеток найдем потенциалы строк и столбцов.

Полагая $u_1 = 0$, находим

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 25, \\ u_2 + v_4 = 25, \\ u_2 + v_5 = 23, \\ u_3 + v_1 = 14, \\ u_3 + v_3 = 18, \\ u_3 + v_5 = 15, \\ u_4 + v_2 = 50, \\ u_4 + v_5 = 48. \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = 25 - u_1 = 25 - 0 = 25, \\ v_4 = 25 - u_2 = 25 - (-3) = 28, \\ u_2 = 23 - v_5 = 23 - 26 = -3, \\ u_3 = 14 - v_1 = 14 - 25 = -11, \\ v_3 = 18 - u_3 = 18 - (-11) = 29, \\ v_5 = 15 - u_3 = 15 - (-11) = 26, \\ v_2 = 50 - u_4 = 50 - 22 = 28, \\ u_4 = 48 - v_5 = 48 - 26 = 22. \end{cases}$$

Для свободных клеток вычислим оценки:

$$d_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 28 - 20 = 8;$$

$$d_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 29 - 22 = 7;$$

$$d_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 28 - 23 = 5;$$

$$d_{15} = u_1 + v_5 - c_{15} = 0 + 26 - 20 = 6;$$

$$d_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = (-3) + 25 - 21 = 1;$$

$$d_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = (-3) + 28 - 22 = 3;$$

$$d_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = (-3) + 29 - 20 = 6;$$

$$d_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = (-11) + 28 - 16 = 1;$$

$$d_{34} = u_3 + v_4 - c_{34} = (-11) + 28 - 21 = -4;$$

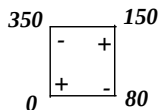
$$d_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = 22 + 25 - 40 = 7;$$

$$d_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = 22 + 29 - 46 = 5;$$

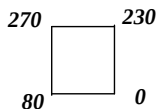
$$d_{44} = u_4 + v_4 - c_{44} = 22 + 28 - 42 = 8.$$

Так как среди оценок свободных клеток имеется отрицательная оценка ($d_{34} = -4$), то план посева не является оптимальным, т.е. необходим пересчет по циклу для клетки A_3B_4 . Найдем цикл для клетки A_3B_4 (рис. 2.4).

Найдем $\Delta = \min\{350, 80\} = 80$.



Старый цикл пересчета



Цикл после пересчета

Рисунок 2.4. – Циклы пересчета единиц груза

После реализации цикла пересчета получаем табл. 2.9.

Таблица 2.9

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	25 200	20 -	22 -	23 -	20 -	200
A_2	21 -	22 -	20 -	25 270	23 230	500
A_3	14 70	16 -	18 200	21 80	15 -	350
A_4	40 -	50 250	46 -	42 -	48 200	450
Заявки b_j	270	250	200	350	430	Заявки b_j

По новому плану посева суммарная урожайность зерна составляет:

$$F_2 = 200 \cdot 25 + 270 \cdot 25 + 230 \cdot 23 + 70 \cdot 14 + 200 \cdot 18 + 80 \cdot 21 + 250 \cdot 50 + 200 \cdot 48 = 45400.$$

Проверяем полученный план на оптимальность. Для заполненных клеток находим потенциалы строк и столбцов.

Полагая $u_1 = 0$, находим

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 + v_1 = 25, \\ u_2 + v_4 = 25, \\ u_2 + v_5 = 23, \\ u_3 + v_1 = 14, \\ u_3 + v_3 = 18, \\ u_3 + v_4 = 21, \\ u_4 + v_2 = 50, \\ u_4 + v_5 = 48. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = 25 - u_1 = 25 - 0 = 25, \\ u_2 = 25 - v_4 = 25 - 32 = -7, \\ v_5 = 23 - u_2 = 23 - (-7) = 30, \\ u_3 = 14 - v_1 = 14 - 25 = -11, \\ v_3 = 18 - u_3 = 18 - (-11) = 29, \\ v_4 = 21 - u_3 = 21 - (-11) = 32, \\ v_2 = 50 - u_4 = 50 - 18 = 32, \\ u_4 = 48 - v_5 = 48 - 30 = 18. \end{array} \right.$$

Для свободных клеток находим оценки:

$$d_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 32 - 20 = 12;$$

$$d_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 29 - 22 = 7;$$

$$d_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 32 - 23 = 9;$$

$$d_{15} = u_1 + v_5 - c_{15} = 0 + 30 - 20 = 10;$$

$$d_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = (-7) + 25 - 21 = -3;$$

$$d_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = (-7) + 32 - 22 = 3;$$

$$d_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = (-7) + 29 - 20 = 2;$$

$$d_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = (-11) + 32 - 16 = 5;$$

$$d_{35} = u_3 + v_5 - c_{35} = (-11) + 30 - 15 = 4;$$

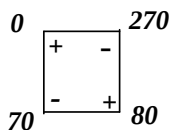
$$d_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = 18 + 25 - 40 = 3;$$

$$d_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = 18 + 29 - 46 = 1;$$

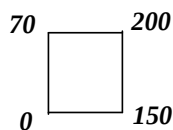
$$d_{44} = u_4 + v_4 - c_{44} = 18 + 32 - 42 = 8.$$

Так как среди оценок свободных клеток имеется отрицательная оценка ($d_{21} = -3$), то план посева не является оптимальным, т.е. необходим пересчёт по циклу для клетки A_2B_1 . Найдем цикл для клетки A_2B_1 (рис. 2.5).

Найдем $\Delta = \min\{70, 270\} = 70$.



Старый цикл пересчета



Цикл после пересчета

Рисунок 2.5. – Циклы пересчета единиц груза

После реализации цикла пересчета получаем табл. 2.10.

Таблица 2.10

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	25 200	20 -	22 -	23 -	20 -	200
A_2	21 70	22 -	20 -	25 200	23 230	500
A_3	14 -	16 -	18 200	21 150	15 -	350
A_4	40 -	50 250	46 -	42 -	48 200	450
Заявки b_j	270	250	200	350	430	Заявки b_j

По новому плану посева суммарная урожайность зерна составляет:

$$F_3 = 200 \cdot 25 + 70 \cdot 21 + 200 \cdot 25 + 230 \cdot 23 + 200 \cdot 18 + 150 \cdot 21 + 250 \cdot 50 + 200 \cdot 48 = 45610.$$

Проверяем полученный план на оптимальность. Для заполненных клеток находим потенциалы строк и столбцов.

Полагая $u_1 = 0$, находим

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 + v_1 = 25, \\ u_2 + v_1 = 21, \\ u_2 + v_4 = 25, \\ u_2 + v_5 = 23, \\ u_3 + v_3 = 18, \\ u_3 + v_4 = 21, \\ u_4 + v_2 = 50, \\ u_4 + v_5 = 48. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = 25 - u_1 = 25 - 0 = 25, \\ u_2 = 21 - v_1 = 21 - 25 = -4, \\ v_4 = 25 - u_2 = 25 - (-4) = 29, \\ v_5 = 23 - u_2 = 23 - (-4) = 27, \\ v_3 = 18 - u_3 = 18 - (-8) = 26, \\ u_3 = 21 - v_4 = 21 - 29 = -8, \\ v_2 = 50 - u_4 = 50 - 21 = 29, \\ u_4 = 48 - v_5 = 48 - 27 = 21. \end{array} \right.$$

Для свободных клеток находим оценки:

$$d_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 29 - 20 = 9;$$

$$d_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 26 - 22 = 4;$$

$$d_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 29 - 23 = 6;$$

$$d_{15} = u_1 + v_5 - c_{15} = 0 + 27 - 20 = 7;$$

$$d_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = (-4) + 29 - 22 = 3;$$

$$d_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = (-4) + 26 - 20 = 2;$$

$$d_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = (-8) + 25 - 14 = 3;$$

$$d_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = (-8) + 29 - 16 = 5;$$

$$d_{35} = u_3 + v_5 - c_{35} = (-8) + 27 - 15 = 4;$$

$$d_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = 21 + 25 - 40 = 6;$$

$$d_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = 21 + 29 - 46 = 1;$$

$$d_{44} = u_4 + v_4 - c_{44} = 21 + 32 - 42 = 8.$$

Так как оценки всех свободных клеток положительные, следовательно, полученный план посева является оптимальным.

Таким образом, оптимальным является посев культур:

$x_{11} = 200$ га – рожь на участке 1;

$x_{21} = 70$ га – пшеница на участке 1;

$x_{24} = 200$ га – пшеница на участке 4;

$x_{25} = 230$ га – пшеница на участке 5;

$x_{33} = 200$ га – ячмень на участке 3;

$x_{34} = 150$ га – ячмень на участке 4;

$x_{42} = 250$ га – кукуруза на участке 2;

$x_{45} = 200$ га – кукуруза на участке 5,

По этому плану посева суммарная урожайность зерна составляет $F_{\text{опт}} = 45610$ ед.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции геометрическим методом. Во всех задачах $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

1) $L = x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_2 \leq 4, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 \leq 6. \end{cases}$$

2) $L = 4x_1 - 2x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 1. \end{cases}$$

3) $L = 4x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ 2x_1 - x_2 \leq 8, \\ -x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_2 \leq 5. \end{cases}$$

4) $L = -5x_1 + x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \leq 2. \end{cases}$$

5) $L = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 2. \end{cases}$$

6) $L = -4x_1 - x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 5, \\ -5x_1 + 2x_2 \leq 10. \end{cases}$$

7) $L = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 5. \end{cases}$$

8) $L = -x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_2 \geq 1, \\ x_1 - 3x_2 \leq 6. \end{cases}$$

9) $L = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \leq 8. \end{cases}$$

10) $L = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 16, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 2, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

11) $L = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \leq 4. \end{cases}$$

12) $L = -3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ -x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 6. \end{cases}$$

13) $L = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ -2x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \leq 2, \\ x_2 \leq 5. \end{cases}$$

14) $L = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3, \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 42, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

15) $L = x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 4. \end{cases}$$

16) $L = 3x_1 - 4x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 9, \\ 3x_1 - x_2 \geq 3, \\ x_1 \leq 4, \\ -x_2 \leq 2. \end{cases}$$

17) $L = x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2, \\ -x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ x_1 \leq 3, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

18) $L = -6x_1 - 2x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 \leq 3. \end{cases}$$

19) $L = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ -8x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \leq 3. \end{cases}$$

20) $L = -3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 3, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_2 \geq 1, \\ x_1 - 3x_2 \leq 6. \end{cases}$$

21) $L = x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -1, \\ -x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ 2x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 5. \end{cases}$$

22) $L = 4x_1 - x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 0, \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 5, \\ 2x_1 \leq 3, \\ 4x_2 \leq 5. \end{cases}$$

23) $L = 4x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 \leq 3, \\ x_1 + 3x_2 \geq 4. \end{cases}$$

24) $L = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq 7, \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 8, \\ -3x_1 + x_2 \leq 8, \\ 2x_2 \geq 5. \end{cases}$$

Задание 2. Заводу для процесса изготовления двух видов изделий A и B требуется: во-первых, наличие стали, во-вторых, последовательная обработка на токарных и фрезерных станках. Потребности каждого ресурса на единицу выпускаемого изделия, общие запасы ресурсов и прибыль от реализации изделий приведены в таблице:

Производственные характеристики	Затраты на одно изделие		Ресурсы
	A	B	
Сталь, кг	20	$30 + 2n$	$120 + 10k$
Токарные станки, станкочасов	$100 - 2m$	200	800
Фрезерные станки, станкочасов	30	$110 - 2n$	$330 - 10k$
Прибыль на изделие, тыс.руб	$2 + m$	$n - 2$	

Примечание: вместо букв m , n , k следует подставить три последних цифры номера зачетной книжки соответственно.

Определить план выпуска продукции, который обеспечивает максимальную прибыль.

Задание 3. Три хлебокомбината ежедневно производят A_1, A_2, A_3 тонн муки. Мука потребляется четырьмя хлебозаводами, потребности которых ежедневно равны соответственно B_1, B_2, B_3, B_4 . Тарифы перевозок 1 тонны муки с хлебокомбината к каждому хлебозаводу заданы в виде матрицы. Составить такой план доставки муки, при котором общая стоимость затрат на перевозку была бы минимальной.

1

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		100	60	190	150
A_1	140	2	5	4	2
A_2	200	4	3	8	9
A_3	160	7	6	1	3

2

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		120	180	210	120
A_1	240	6	4	2	6
A_2	200	4	9	7	4
A_3	260	10	3	5	10

3

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		150	140	170	150
A_1	210	6	3	1	6
A_2	170	2	4	9	2
A_3	220	5	7	8	5

4

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		90	200	120	90
A_1	130	4	9	1	7
A_2	210	6	3	4	5
A_3	160	10	4	8	2

5

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		240	200	90	170
A_1	300	9	10	5	7
A_2	150	2	4	3	1
A_3	250	3	8	6	5

6	Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
			120	80	210	190
	A_1	190	2	7	6	10
	A_2	200	9	4	3	1
	A_3	210	3	2	5	8

7	Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
			110	100	150	140
	A_1	180	3	6	8	3
	A_2	100	5	2	9	4
	A_3	220	4	5	1	7

8	Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
			200	140	210	150
	A_1	220	6	3	9	4
	A_2	250	5	4	1	5
	A_3	230	2	7	2	10

9	Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
			140	200	170	90
	A_1	280	4	9	8	2
	A_2	190	10	4	1	7
	A_3	230	2	7	2	10

10	Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
			200	100	80	120
	A_1	180	1	6	9	2
	A_2	150	4	5	3	7
	A_3	170	8	10	4	5

11	Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
			230	140	120	210
	A_1	200	4	1	5	6
	A_2	220	3	8	2	9
	A_3	280	9	4	7	7

12	Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
			170	130	180	120
	A_1	200	1	10	9	5
	A_2	190	9	5	3	7
	A_3	210	8	2	4	6

13	Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
			140	100	100	160
	A_1	160	5	4	9	2
	A_2	190	3	4	8	1
	A_3	150	7	6	5	7

14	Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
			170	80	150	100
	A_1	120	4	1	2	6
	A_2	180	9	4	7	10
	A_3	200	3	8	5	3

15	Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
			150	180	170	200
	A_1	210	8	3	6	10
	A_2	290	1	4	5	3
	A_3	200	9	7	2	6

16	Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
			70	50	80	100
	A_1	100	5	3	4	2
	A_2	70	4	2	6	1
	A_3	130	1	4	5	3

17	Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
			90	130	110	150
	A_1	140	8	4	10	2
	A_2	150	2	5	7	3
	A_3	190	4	6	1	9

18	Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
			170	200	40	90
	A_1	150	9	4	3	1
	A_2	250	2	6	4	10
	A_3	100	3	10	5	7

19	Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
			190	200	180	130
	A_1	200	4	2	8	7
	A_2	350	3	5	9	6
	A_3	150	5	10	1	3

20	Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
			150	160	180	110
	A_1	240	8	6	7	2
	A_2	190	4	5	3	9
	A_3	170	1	10	4	3

21	Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
			130	90	50	230
	A_1	180	9	4	7	10
	A_2	140	2	8	2	3
	A_3	180	4	1	5	6

22	Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
			200	130	120	150
	A_1	160	5	6	8	9
	A_2	250	7	10	1	4
	A_3	190	2	3	4	3

23	Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
			190	200	140	70
	A_1	100	7	10	1	4
	A_2	350	2	3	4	3
	A_3	150	1	6	8	9

24	Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
			100	160	130	110
	A_1	200	5	10	1	5
	A_2	190	4	2	8	7
	A_3	110	3	5	9	6

25	Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
			200	160	190	150
	A_1	170	9	4	6	3
	A_2	290	2	7	10	4
	A_3	240	3	1	5	8

26	Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
			130	140	90	240
	A_1	220	10	1	5	3
	A_2	200	3	8	2	9
	A_3	180	6	4	7	4

27	Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
			160	130	190	120
	A_1	180	1	10	9	5
	A_2	190	8	5	3	6
	A_3	230	9	2	4	7

28	Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
			130	100	110	160
	A_1	170	5	4	10	2
	A_2	190	3	5	8	1
	A_3	140	7	6	5	6

29	Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
			180	80	140	100
	A_1	120	4	1	2	6
	A_2	200	8	4	7	9
	A_3	180	3	7	5	3

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ибяттов Р.И. Методы оптимизации в задачах математического моделирования: методические указания для лабораторных и самостоятельных работ. – Казань: Изд-во Казанского ГАУ, 2016. – 32 с.
2. Сдвижков О.А. Практикум по методам оптимизации: Практикум. – М.: Вузовский учебник, НИЦ ИНФРА-М, 2014. – 231 с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2 – 6-е изд. - М.: Оникс 21 век: Мир и Образование, 2012. – 368 с.
4. Киселева Н.Г. Системный анализ и моделирование экосистем: концепт лекций / Н.Г. Киселева. - Йошкар-Ола: Марийский гос. технический ун-т, 2008. - 127 с.

