

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

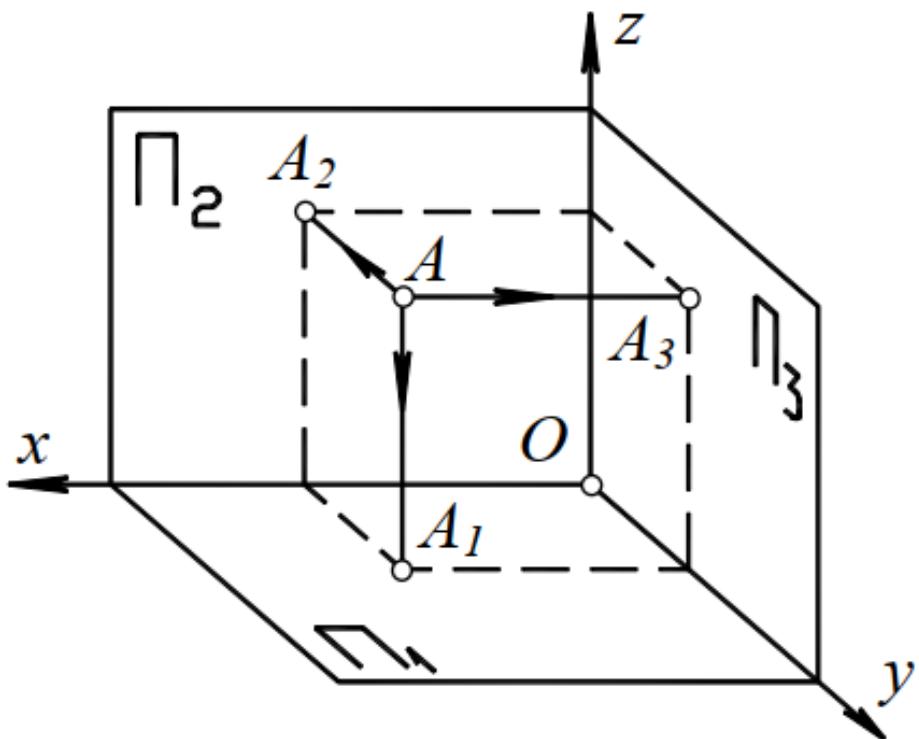
ИНСТИТУТ МЕХАНИЗАЦИИ И ТЕХНИЧЕСКОГО СЕРВИСА

Кафедра «Общиеинженерные дисциплины»

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

*Практикум для выполнения лабораторных и самостоятельных работ
по дисциплине «Начертательная геометрия и инженерная графика»*

Студент _____
Группа _____



Казань - 2023

УДК 514.18

ББК 22.151.3

Составители: Пикмуллин Г.В., Вагизов Т.Н., Зиятдинов Р.Ш.

Рецензенты:

Хафизов К.А. - д.т.н., профессор, заведующий кафедрой «Тракторы, автомобили и безопасность технологических процессов» ФГБОУ ВО Казанский ГАУ

Галимова Н.Я. - к.т.н., доцент кафедры «Машиноведения и инженерной графики» ФГБОУ ВО «КНИТУ-КАИ».

Рабочая тетрадь утверждена и рекомендована к печати на заседании кафедры общеинженерных дисциплин ФГБОУ ВО «Казанский ГАУ» «16» января 2023 года (протокол № 7).

Рабочая тетрадь обсуждена, одобрена и рекомендована к печати на заседании методической комиссии Института механизации и технического сервиса ФГБОУ ВО «Казанский ГАУ» «26» января 2023 года (протокол № 5).

Пикмуллин, Г.В. Рабочая тетрадь: Практикум для выполнения лабораторных и самостоятельных работ по дисциплине «Начертательная геометрия и инженерная графика» / Г.В. Пикмуллин, Т.Н. Вагизов., Р.Ш. Зиятдинов – Казань: Казанский государственный аграрный университет, 2023. – 64 с.

Рабочая тетрадь предназначена для студентов очного и заочного обучения по следующим направлениям подготовки: 35.03.06 Агроинженерия, 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, 20.03.01 Техносферная безопасность, 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства, 44.03.04 Профессиональное обучение.

Настоящая рабочая тетрадь включает задачи, предназначенные для решения на лабораторных занятиях и комплекс упражнений для самостоятельного выполнения студентами по разделу «Начертательная геометрия».

УДК 514.18

ББК 22.151.3

© Казанский государственный аграрный университет, 2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

| | стр. |
|--|------|
| Введение..... | 4 |
| 1. Проецирование точки..... | 5 |
| 2. Проецирование прямой. Взаимное положение прямых..... | 8 |
| 3. Проецирование плоскости. Точка и прямая в плоскости..... | 13 |
| 4. Взаимное положение двух плоскостей..... | 19 |
| 5. Взаимное положение прямой и плоскости..... | 25 |
| 6. Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикулярность двух плоскостей..... | 29 |
| 7. Преобразование чертежа методом замены плоскостей проекций..... | 32 |
| 8. Преобразование чертежа методом вращения вокруг проецирующей прямой..... | 35 |
| 9. Преобразование чертежа методом вращения вокруг прямой уровня. Метод совмещения..... | 38 |
| 10. Преобразование чертежа методом плоскопералльного перемещения..... | 41 |
| 11. Поверхности..... | 44 |
| 12. Сечение поверхности тел плоскостью..... | 47 |
| 13. Пересечение прямой с поверхностью тела..... | 51 |
| 14. Пересечение поверхностей двух тел..... | 54 |
| Комплексные задачи..... | 58 |
| Список литературы..... | 63 |

ВВЕДЕНИЕ

В разделе «Начертательная геометрия» изучаются методы изображения пространственных фигур на плоскости и свойства фигур по их изображениям. Полученные в результате проецирования изображения позволяют мысленно представить форму пространственных фигур и их взаимное расположение в пространстве, определить их размеры и другие свойства.

Настоящая рабочая тетрадь разработана в соответствии с рабочей программой дисциплины «Начертательная геометрия и инженерная графика» и предназначена для решения задач и выполнения упражнений на лабораторных занятиях под руководством преподавателя и самостоятельной работы студентов по разделу «Начертательная геометрия».

Рабочая тетрадь содержит задачи, которые разделены по отдельным темам. По каждой теме приводятся:

- упражнения и задачи, которые студенты решают на лабораторных занятиях под руководством преподавателя;
- упражнения и задачи для самостоятельного решения с целью закрепления пройденного материала.

В рабочей тетради также имеется раздел, включающий комплексные задачи, предназначенные для студентов, стремящихся к более углубленному изучению предмета. Решение этих задач поможет студентам лучше подготовиться к сдаче экзамена.

Графические построения в рабочей тетради следует выполнять максимально точно и аккуратно, используя чертежные инструменты. При этом следует сохранять линии построения и нанести буквенные и цифровые обозначения.

1. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ТОЧКИ

В геометрии совокупность однородных объектов называется **геометрическим пространством**. Начертательная геометрия рассматривает геометрическое пространство как множество точек. Любое количество точек называется **геометрической фигурой** или **геометрическим образом**.

Основные геометрические образы, изучаемые в начертательной геометрии: **точка, прямая и поверхность**.

Точка не имеет никаких измеримых характеристик.

Линия - траектория непрерывного движения точки. Не имеет толщины, имеет бесконечную протяженность.

Прямая, луч, отрезок - частные случаи линии.

В начертательной геометрии **поверхность** определяется как след движущейся линии или другой поверхности.

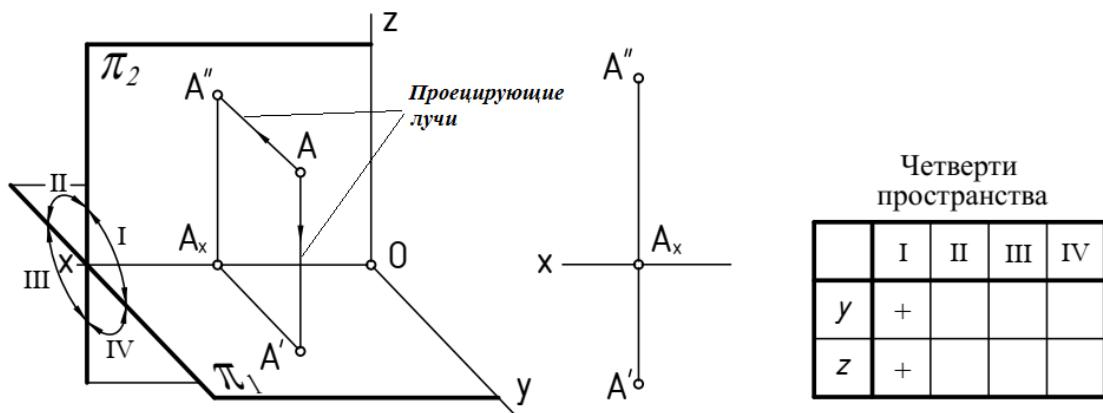


Рисунок 1 – Проецирование точки на две плоскости

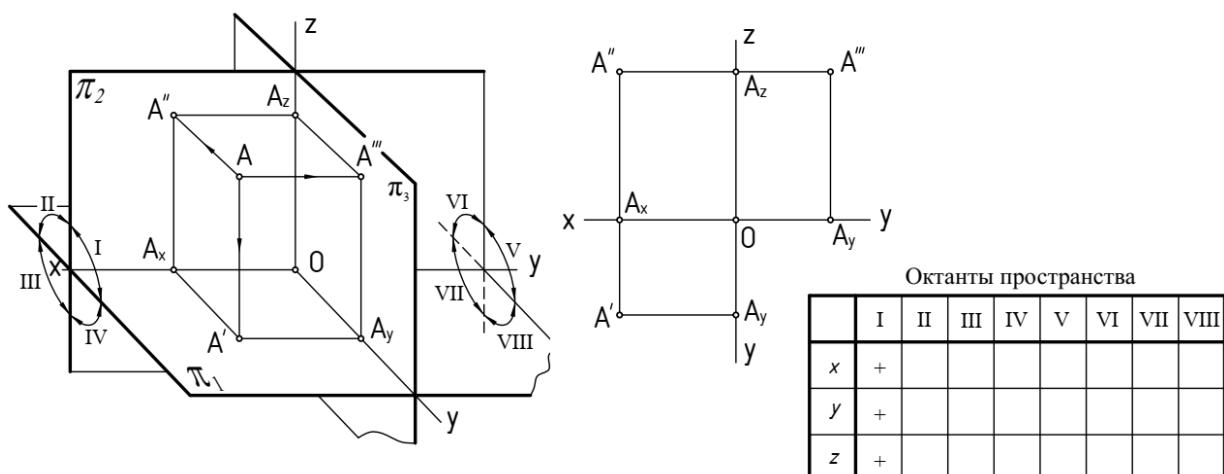


Рисунок 2 – Проецирование точки на три плоскости

При построении эпюра точки или его чтении необходимо учитывать следующие положения:

1. Горизонтальная и фронтальная проекции точки всегда располагаются на одной вертикальной линии связи ($A'A'' \perp OX$).

2. Фронтальная и профильная проекция точки всегда располагаются на одной горизонтальной линии связи ($A''A''' \perp OZ$).

3. Численное значение координаты:

- « Z » определяет расстояние от точки до горизонтальной плоскости проекции Π_1 ;

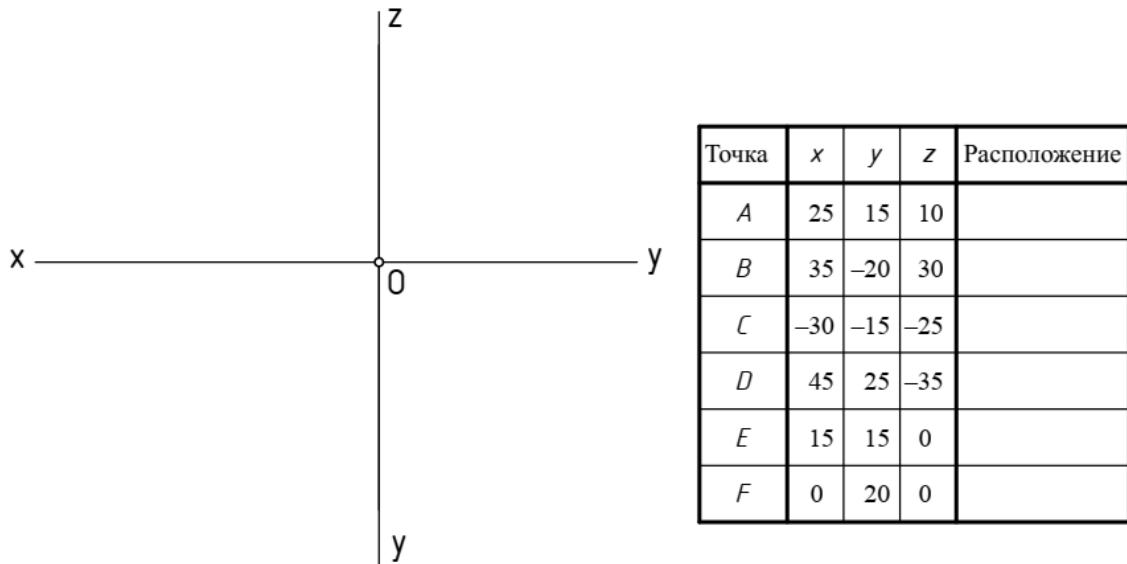
- « Y » определяет расстояние от точки до фронтальной плоскости проекции Π_2 ;

- « X » определяет расстояние от точки до профильной плоскости проекции Π_3 .

Каждая из проекций точек может быть построена по координатам: $A'(X; Y); A''(X; Z); A'''(Y; Z)$.

УПРАЖНЕНИЯ

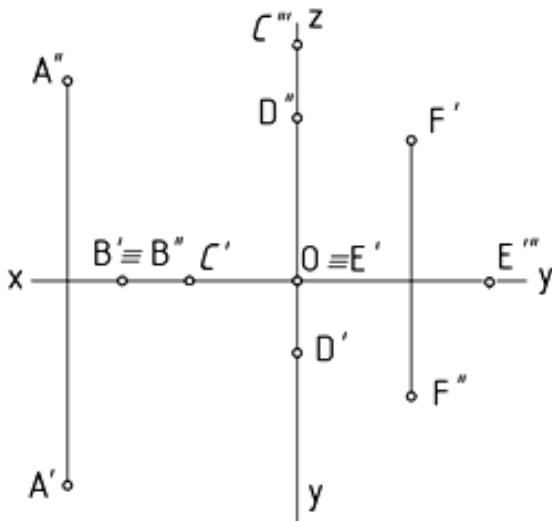
1. Построить три проекции точек A, B, C, D, E и F по координатам, заданным в таблице. Определить положение точек в пространстве относительно плоскостей проекций и записать в таблицу номер октанта, плоскость или ось проекций.



2. Записать ответы на вопросы:

| | | |
|---|---|--|
| 1 | При каком условии точка A будет принадлежать плоскости Π_3 ? | |
| 2 | Какими координатами определяется горизонтальная проекция точки? | |
| 3 | При каком условии точка B будет принадлежать оси OZ ? | |
| 4 | Какой координатой определяется расстояние от точки до плоскости Π_2 ? | |
| 5 | От какой из плоскостей проекции точки C находится дальше? | |
| 6 | При каком условии точки D и E находятся на одинаковом расстоянии от плоскости Π_1 ? | |

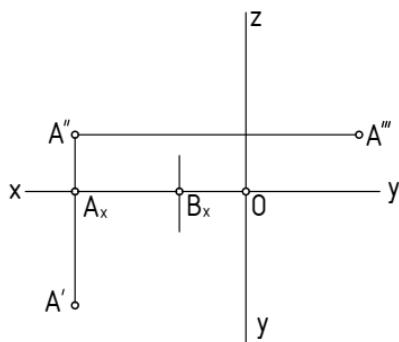
3. Построить недостающие проекции точек A, B, C, D, E и F . Измерить и записать координаты.



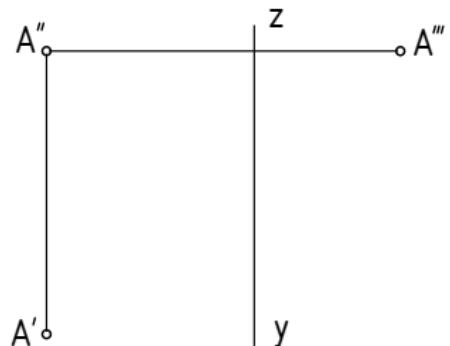
| | A | B | C | D | E | F |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| X | | | | | | |
| Y | | | | | | |
| Z | | | | | | |

Упражнения для самостоятельного выполнения

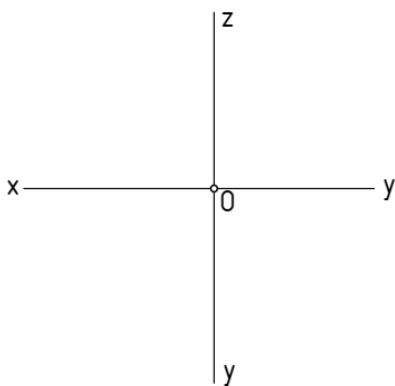
1. Построить проекции точки B , расположенной на 15 мм выше от плоскости Π_1 и на 10 мм ближе к плоскости Π_2 , чем точка A .



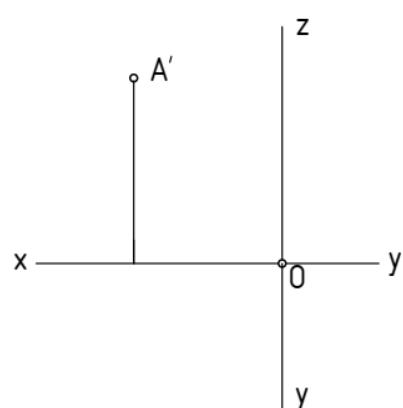
2. Найти положение оси проекций X . Измерить и записать координаты точки A . $A (____; ____; ____)$



3. Построить проекции точки B , симметричной точке A (15; 25; 30) относительно плоскости Π_1 , и точки C , симметричной точке A относительно начала координат.



4. Построить недостающие проекции точки A , расположенной в III октанте, если отношение ее координат $|X| : |Z| = 2$. $A (____; ____; ____)$



2. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ПРЯМОЙ. ВЗАЙМОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ

Относительно плоскостей проекции прямая может занимать различное положение:

- не параллельна ни одной из плоскостей проекций – **прямая общего положения**;

- прямая параллельная только одной плоскости проекций – **прямая уровня (горизонтальная, фронтальная, профильная)**;

- прямая параллельная двум плоскостям, т.е. перпендикулярная одной – **проецирующая прямая**.

Прямой линейный угол проецируется на плоскость проекций без искажения, если одна из его сторон параллельна, а другая не перпендикулярна плоскости проекций (угол DEC на рисунке 3).

Точку пересечения прямой с плоскостью проекций называют **следом прямой**.

M – горизонтальный след прямой a ;

N – фронтальный след прямой a .

Метод прямоугольного треугольника

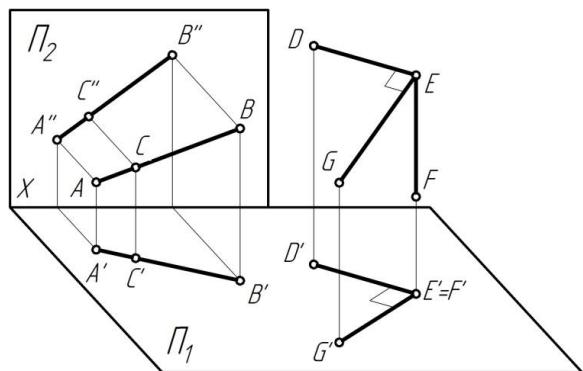
Для определения угла α и натуральной величины отрезка AB строят прямоугольный треугольник $A'B'B_0$ (рисунок 5).

$A'B'$ – один катет;

$B'B_0$ – второй катет (разница расстояний концов отрезка AB до плоскости Π_1);

$A'B_0$ – гипотенуза – натуральная величина ($|AB|$) отрезка AB .

Угол α – угол наклона AB к плоскости Π_1 .



AB, GE – прямые общего положения;

DE – прямая уровня;

EF – проецирующая прямая

Рисунок 3 – Проецирование прямой

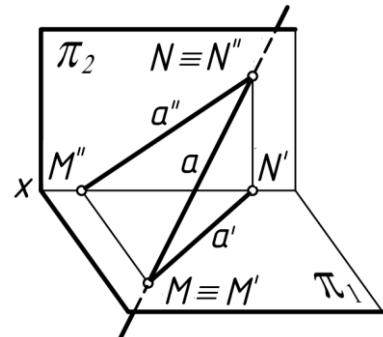


Рисунок 4 – Следы прямой

Метод прямоугольного треугольника

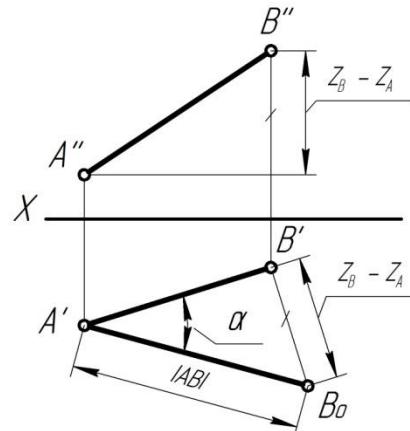
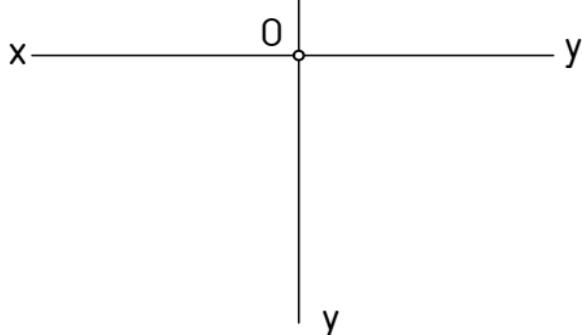


Рисунок 5 – Определение натуральной величины отрезка методом прямоугольного треугольника

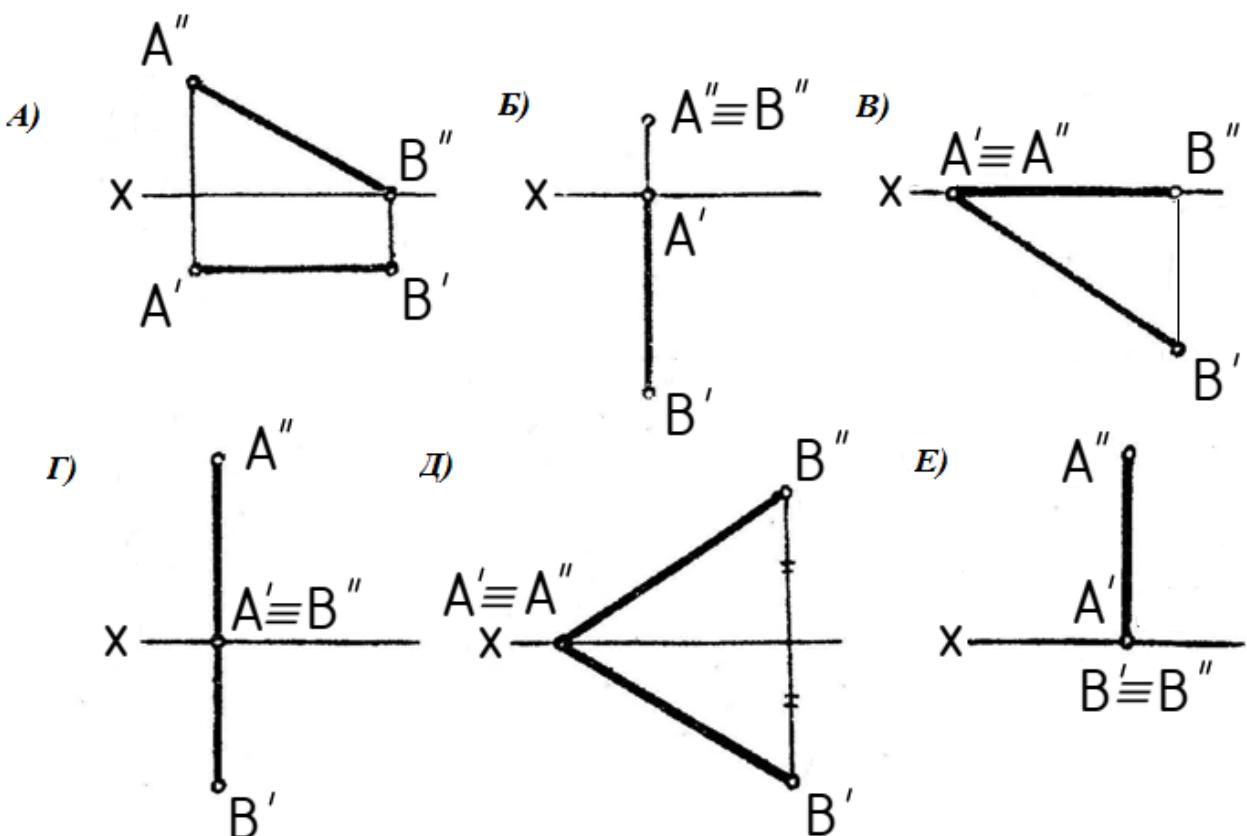
УПРАЖНЕНИЯ

4. Построить проекции ΔABC по координатам его вершин: $A (35; 10; 0)$, $B (35; 30; 30)$, $C (0; 10; 30)$. Охарактеризовать положение сторон треугольника относительно плоскостей проекций, определить их длину и углы наклона к плоскостям проекций.

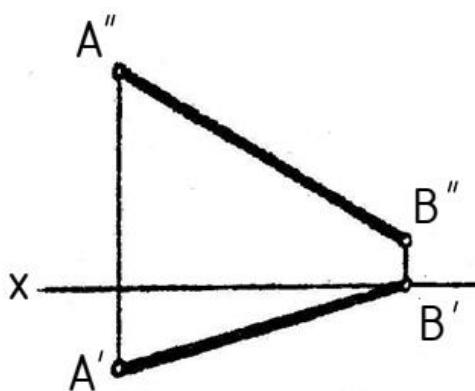
| | AB | BC | AC |
|------------------------------------|------|------|------|
| Положение | | | |
| Длина | | | |
| Углы наклона к плоскостям проекций | | | |



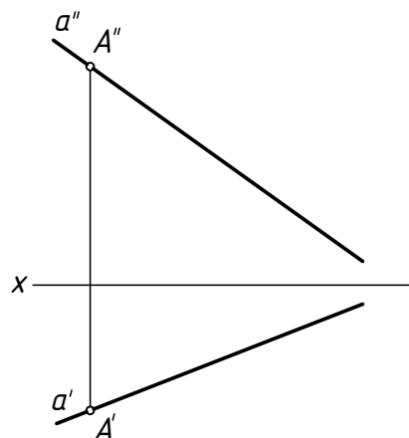
5. Определить положение заданного отрезка AB относительно плоскостей проекций. Найти следы прямой, которой принадлежит этот отрезок.



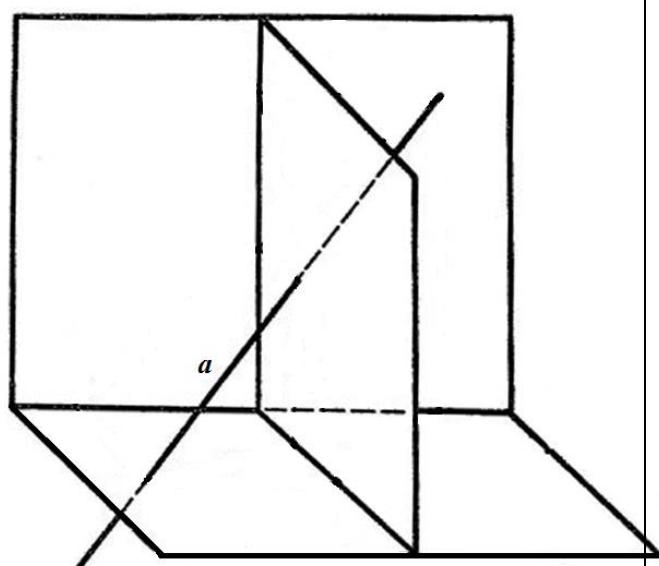
6. Определить длину отрезка AB и углы наклона его к плоскостям проекций Π_1 и Π_2 .



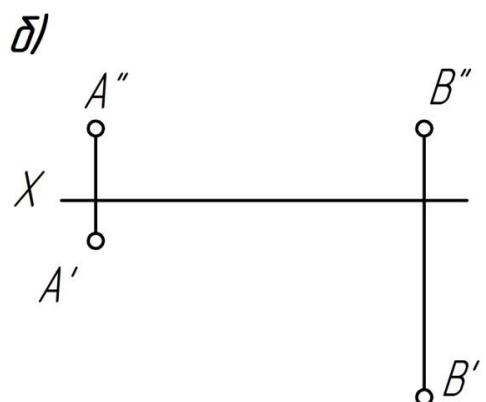
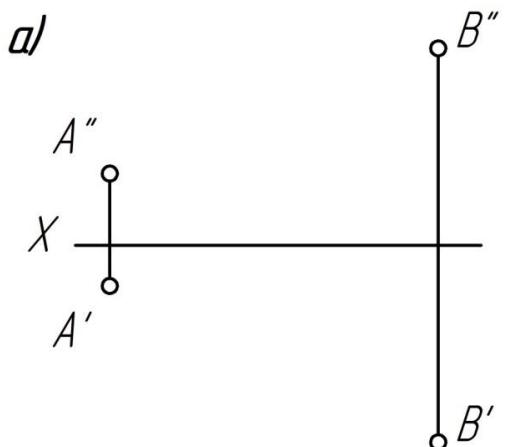
7. Отложить на прямой a отрезок AB длиной 30 мм.



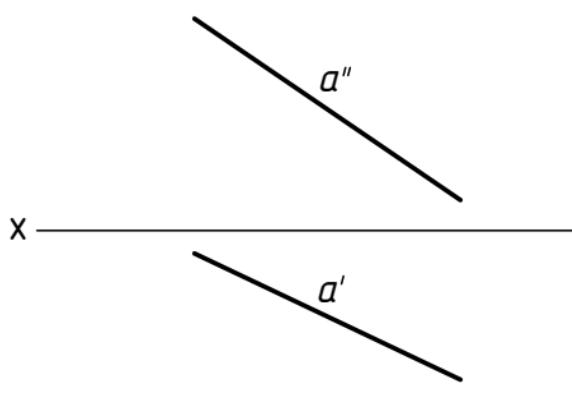
8. Обозначить проекции следов заданной прямой a и указать какие четверти пространства она проходит.



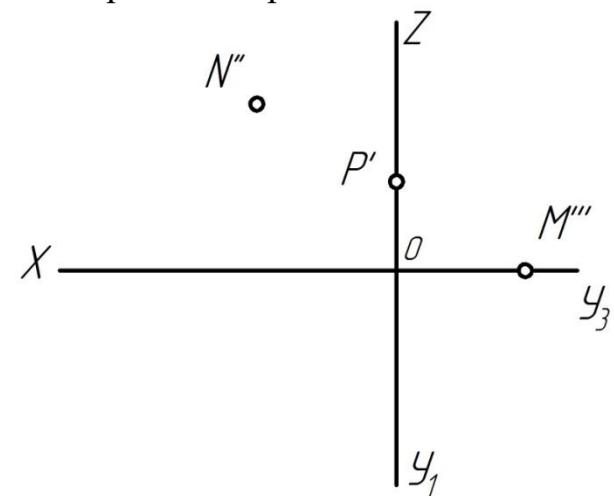
9. Построить следы прямой, определяемой точками A и B , и указать какие четверти пространства она проходит.



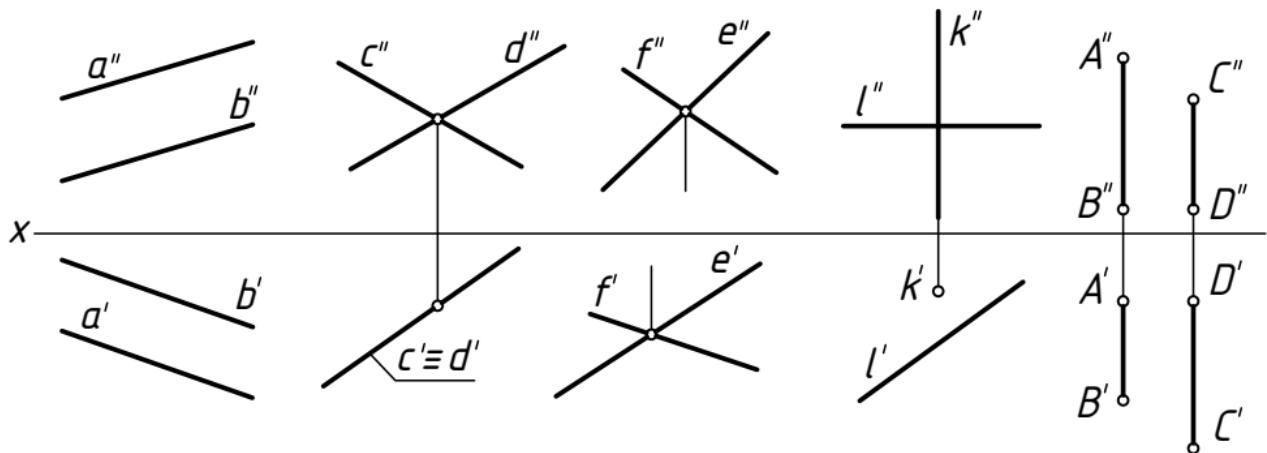
10. Построить проекции следов прямой a . Найти проекции точки A , которая делит отрезок прямой между следами в отношении $1 : 3$.



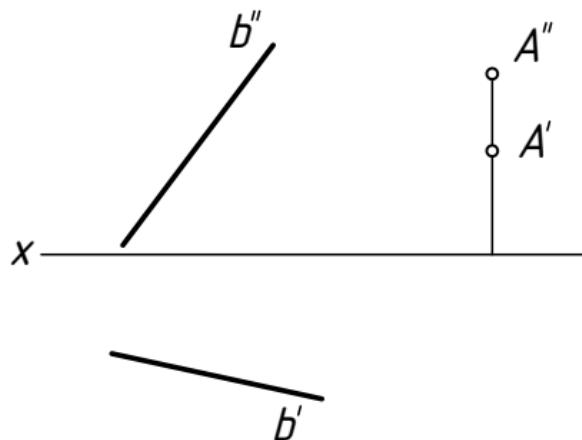
11. По заданным следам (или их проекциям) построить три проекции прямой.



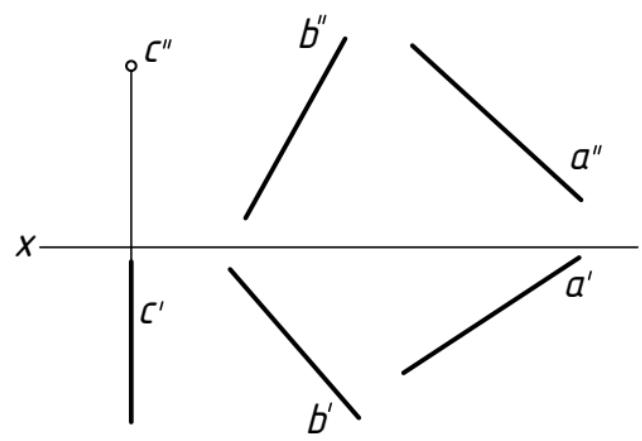
12. Определить взаимное положение заданных прямых.



13. Построить проекции горизонтальной прямой, проходящей через точку A и пересекающей прямую b .

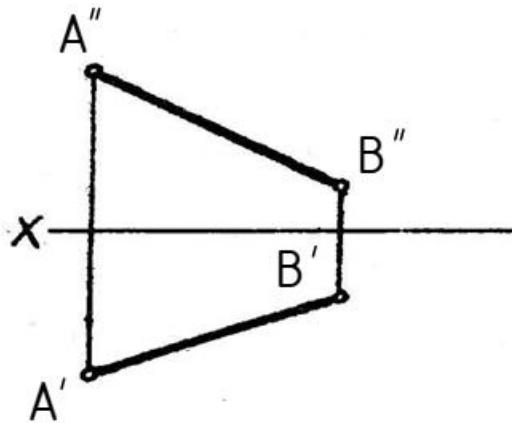


14. Построить проекции прямой d , параллельной прямой a и пересекающей прямые b и c .

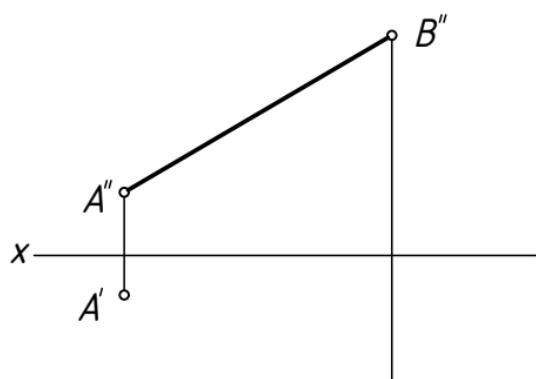


Упражнения для самостоятельного выполнения

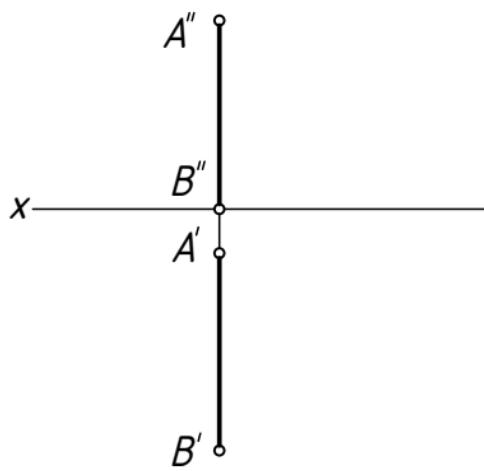
1. Найти следы прямой AB и отложить влево от горизонтального следа отрезок длиной 30 мм.



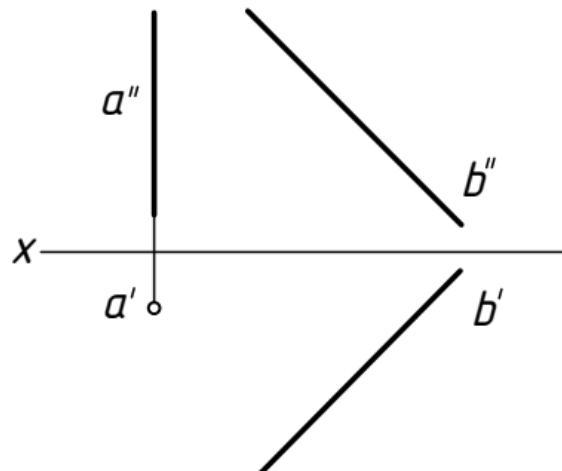
2. Построить горизонтальную проекцию отрезка AB , если угол наклона его к фронтальной плоскости проекций равен 30° .



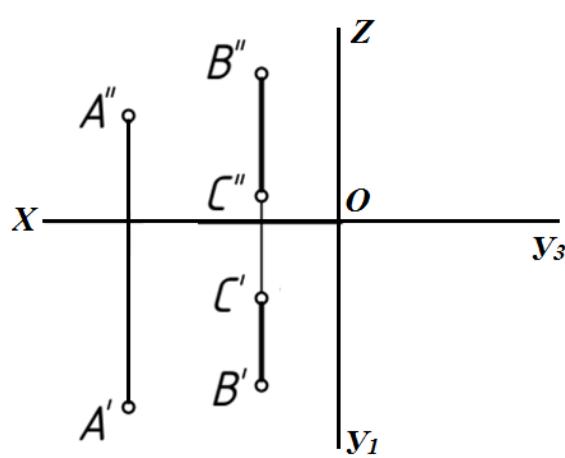
3. Построить проекции точки C , принадлежащей отрезку AB и удаленной от горизонтальной плоскости проекций на 10 мм. Определить длину отрезка AC .



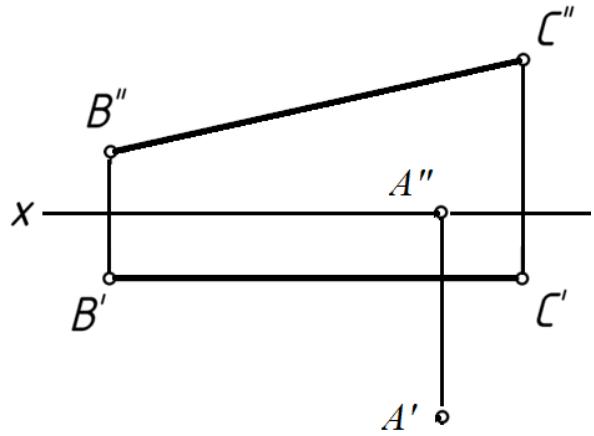
4. Построить проекции прямой c , пересекающей прямые a и b под прямым углом.



5. Через точку A провести прямую параллельную плоскости Π_1 и пересекающую прямую BC .



6. Через точку A провести прямую пересекающую прямую BC под прямым углом.



3. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ. ТОЧКА И ПРЯМАЯ В ПЛОСКОСТИ

Плоскость в пространстве безгранична. Любую плоскость определяют:

- а) три точки, не лежащие на одной прямой (см. рисунок 6 - точки A , B , C);
- б) прямая и точка, не лежащая на этой прямой (см. рисунок 6 - AB и C);
- в) две пересекающиеся прямые (см. рисунок 6 - AB и BC или BA и AE);
- г) две параллельные прямые (см. рисунок 6 - AB и CD);
- д) любая плоская фигура (например, ΔABC (см. рисунок 7));
- е) следы плоскости.

След плоскости – это линия пересечения плоскости с плоскостью проекции.

От задания плоскости одним способом всегда можно перейти к другим.

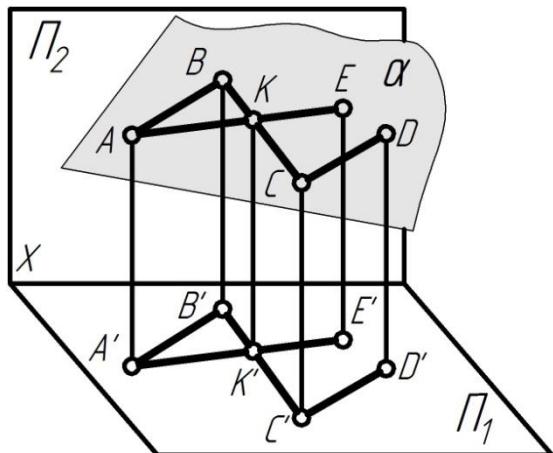
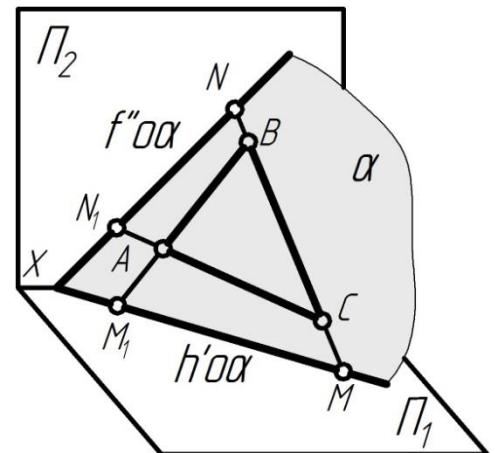


Рисунок 6 – Задание плоскости на чертеже проекциями точек и прямых линий



$h'_o\beta$ – горизонтальный след плоскости β ;

$f''_o\beta$ – фронтальный след плоскости β

Рисунок 7 – Задание плоскости на чертеже следами и плоской фигурой

По отношению к плоскостям проекций плоскости могут занимать *общее* и *частное положение*.

Плоскости общего положения не перпендикулярны ни одной плоскости проекций.

Плоскость частного положения – это плоскость перпендикулярная или параллельная плоскости проекций.

Проецирующие плоскости – это плоскости перпендикулярные к одной плоскости проекции и наклонённые к другой.

Плоскости уровня – плоскости параллельные одной из плоскостей проекций.

Условия принадлежности точки и прямой плоскости:

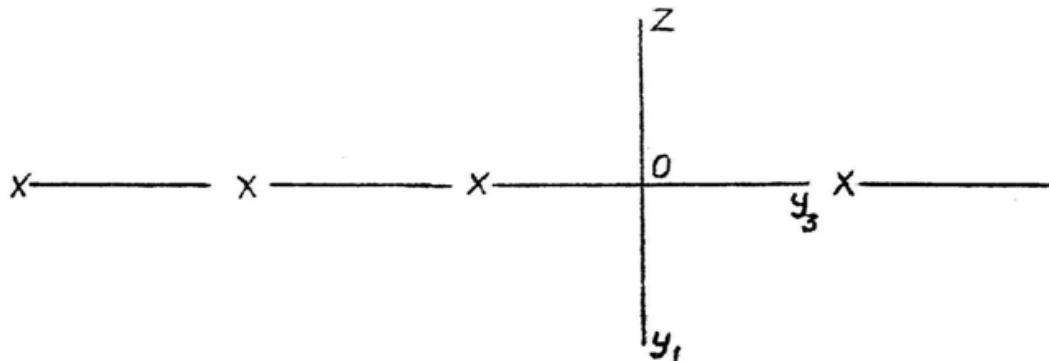
а) *прямая принадлежит плоскости*, если она проходит через две точки этой плоскости или через одну точку и параллельно прямой, лежащей в этой плоскости;

б) *точка принадлежит плоскости*, если она построена на некоторой прямой заданной плоскости.

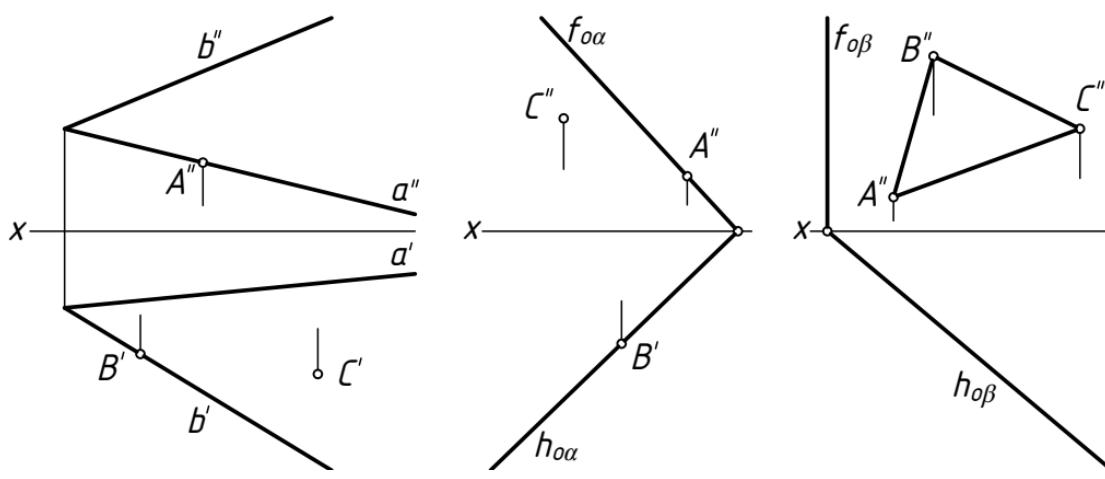
УПРАЖНЕНИЯ

15. На чертежах задать следующие плоскости:

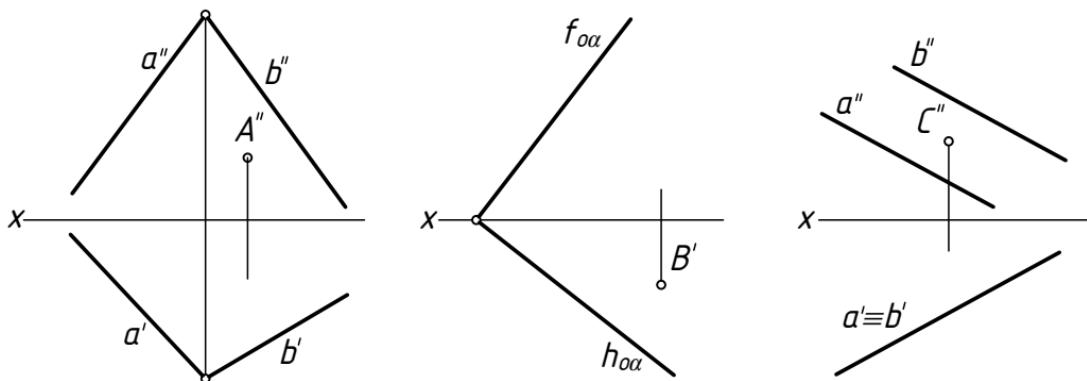
- горизонтально-проецирующую плоскость двумя параллельными прямыми;
- фронтально-проецирующую плоскость двумя пересекающимися прямыми, одна из которых прямая общего положения, вторая перпендикулярна плоскости проекций;
- профильно-проецирующую плоскость треугольником ABC , наклоненной под углом 30° к плоскости Π_1 ;
- плоскость общего положения двумя пересекающимися прямыми, одна из которых параллельна плоскости Π_1 , а другая - плоскости Π_2 .



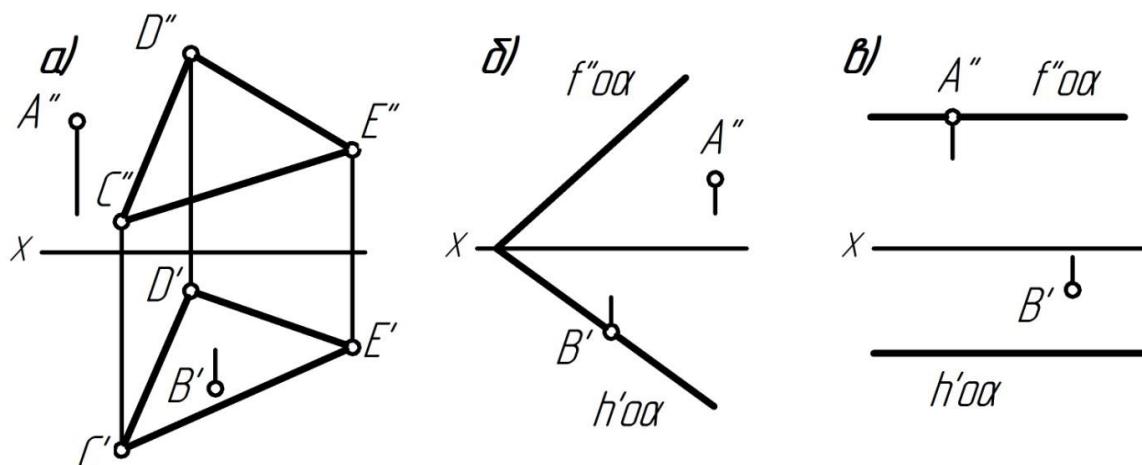
16. Определить положение заданных плоскостей относительно плоскостей проекций. Построить проекции ΔABC , расположенных в этих плоскостях.



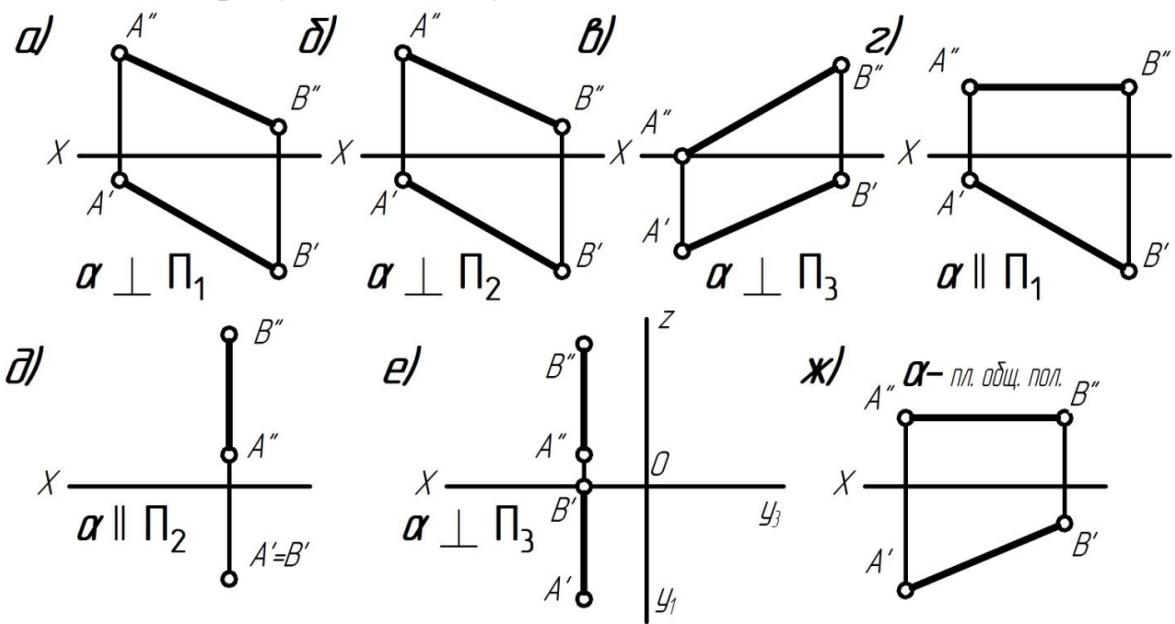
17. Определить положение заданных плоскостей относительно плоскостей проекций. Построить проекции горизонталей и фронталей этих плоскостей, проходящих через точки A , B и C , принадлежащие этим плоскостям.



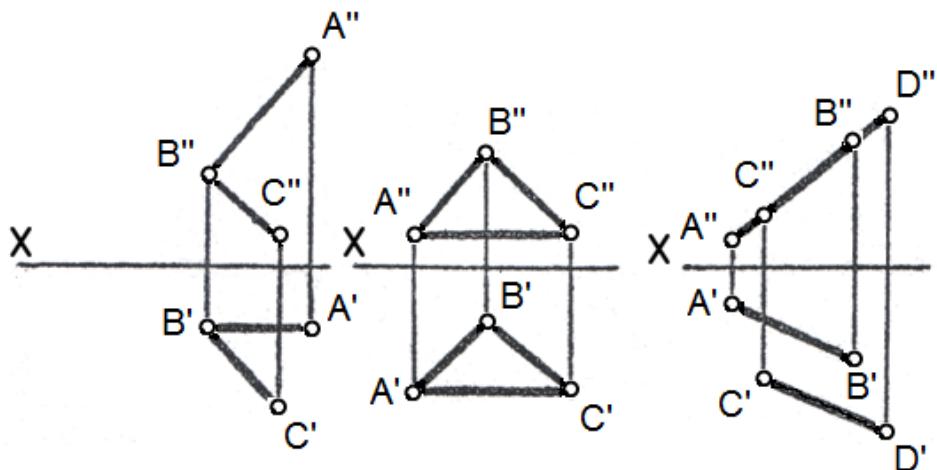
18. Определить недостающие проекции точек A и B , принадлежащих заданным плоскостям (в задаче «в» не пользоваться профильным следом плоскости α).



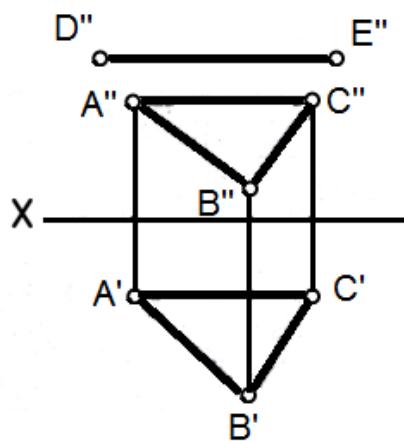
19. Заключить прямую AB в следующие плоскости α :



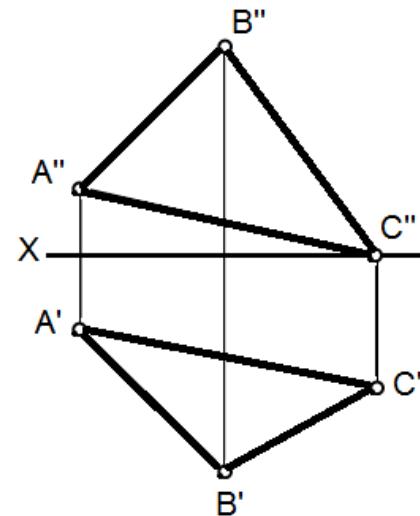
20. Построить следы заданных плоскостей.



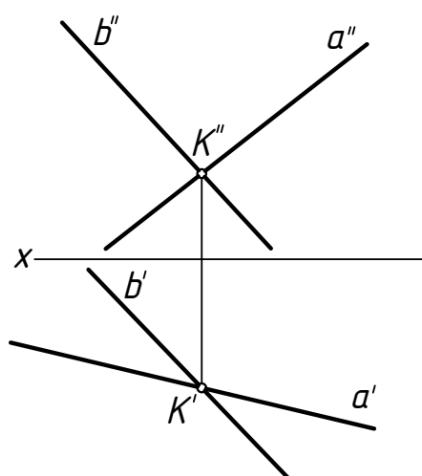
21. Построить горизонтальную проекцию прямой DE , принадлежащей плоскости ΔABC .



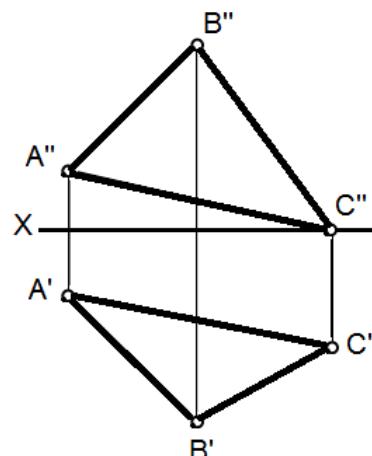
22. Определить углы наклона плоскости ΔABC к плоскостям проекций Π_1 и Π_2 .



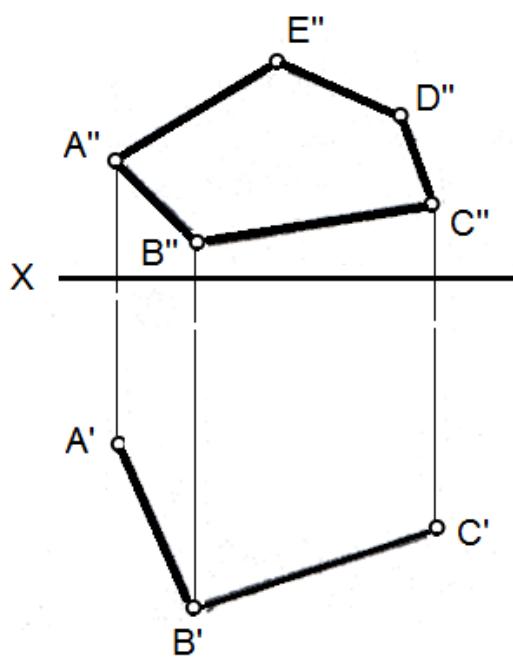
23. Через точку K провести горизонталь и фронталь заданной плоскости.



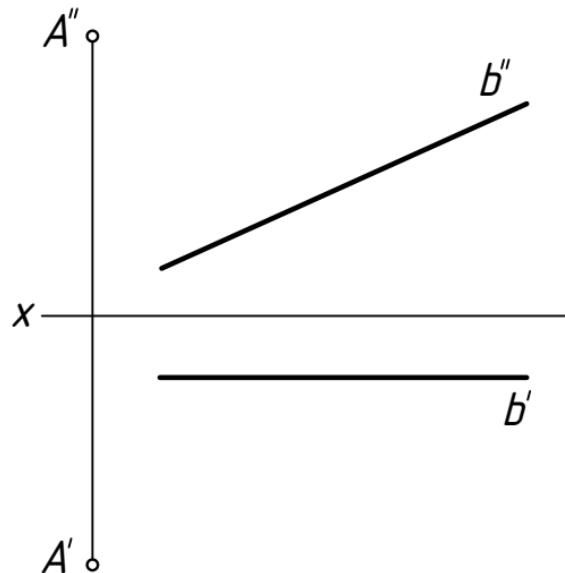
24. Провести в плоскости ΔABC горизонталь на расстоянии 15 мм от Π_1 , фронталь на расстоянии 20 мм от Π_2 .



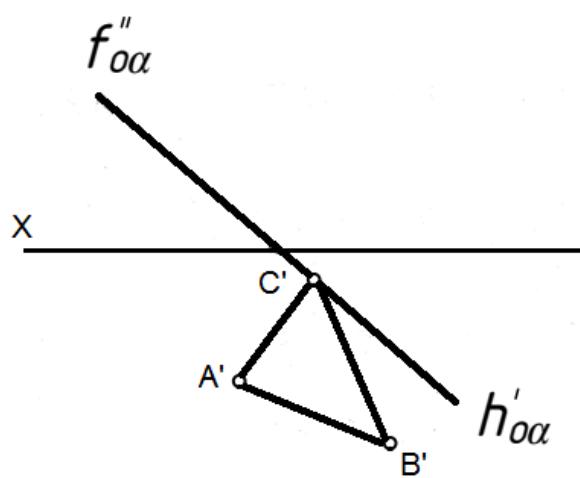
25. Построить горизонтальную проекцию плоского пятиугольника $ABCDE$.



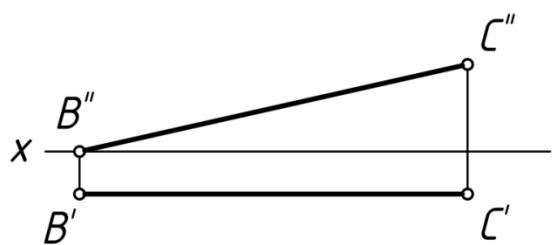
26. Построить проекции прямоугольного ΔABC , у которого сторона BC лежит на прямой b , угол B равен 90° , а гипотенуза AC равна 50 мм.



27. Построить фронтальную проекцию ΔABC , лежащего в плоскости α .

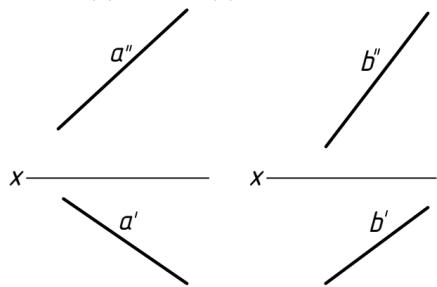


28. Построить проекции равностороннего ΔABC , плоскость которого наклонена к фронтальной плоскости проекций под углом 45° .

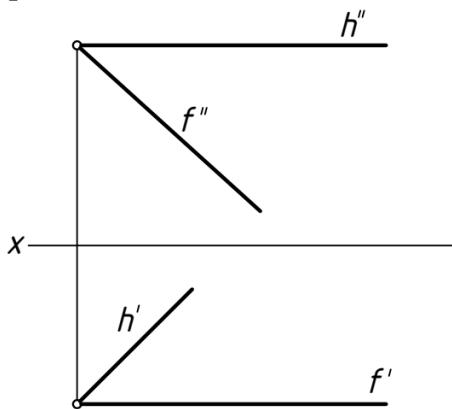


Упражнения для самостоятельного выполнения

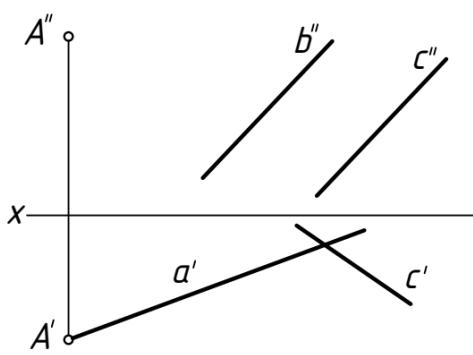
1. Заключить прямую a в горизонтально-проецирующую плоскость, а прямую b — во фронтально-проецирующую плоскость. Плоскости задать следами.



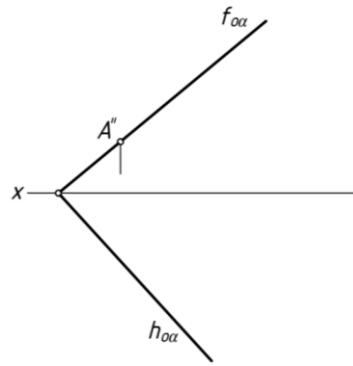
2. Построить следы заданной плоскости.



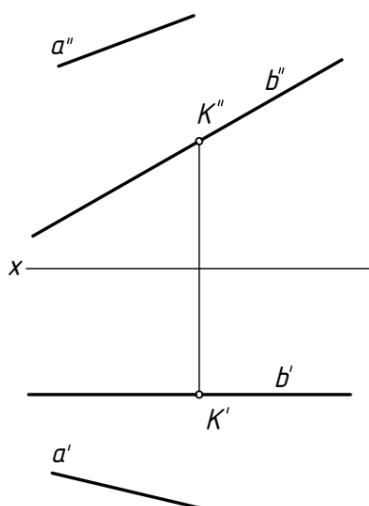
3. Построить недостающие проекции прямых a и b , если прямые a , b , c и точка A лежат в одной плоскости.



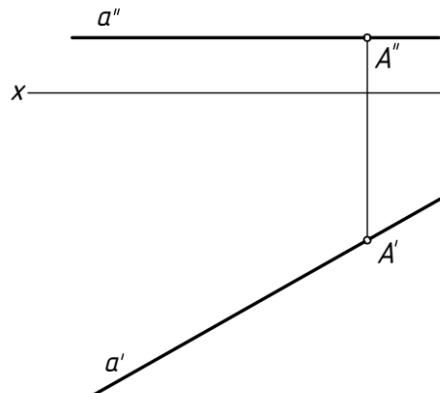
4. Построить проекции равнобедренного ΔABC , лежащего в плоскости α . Боковые стороны $AB = BC = 30$ мм. Сторона $AB \parallel \Pi_1$, а сторона $BC \parallel \Pi_2$.



5. Построить проекции квадрата $ABCD$ с вершиной A на прямой a и диагональю BD на прямой b . Диагонали квадрата пересекаются в точке K .



6. Построить проекции квадрата $ABCD$ со стороной AD на прямой a и вершиной B на фронтальной плоскости проекций. Плоскость квадрата наклонена к горизонтальной плоскости проекций под углом 45° .



4. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

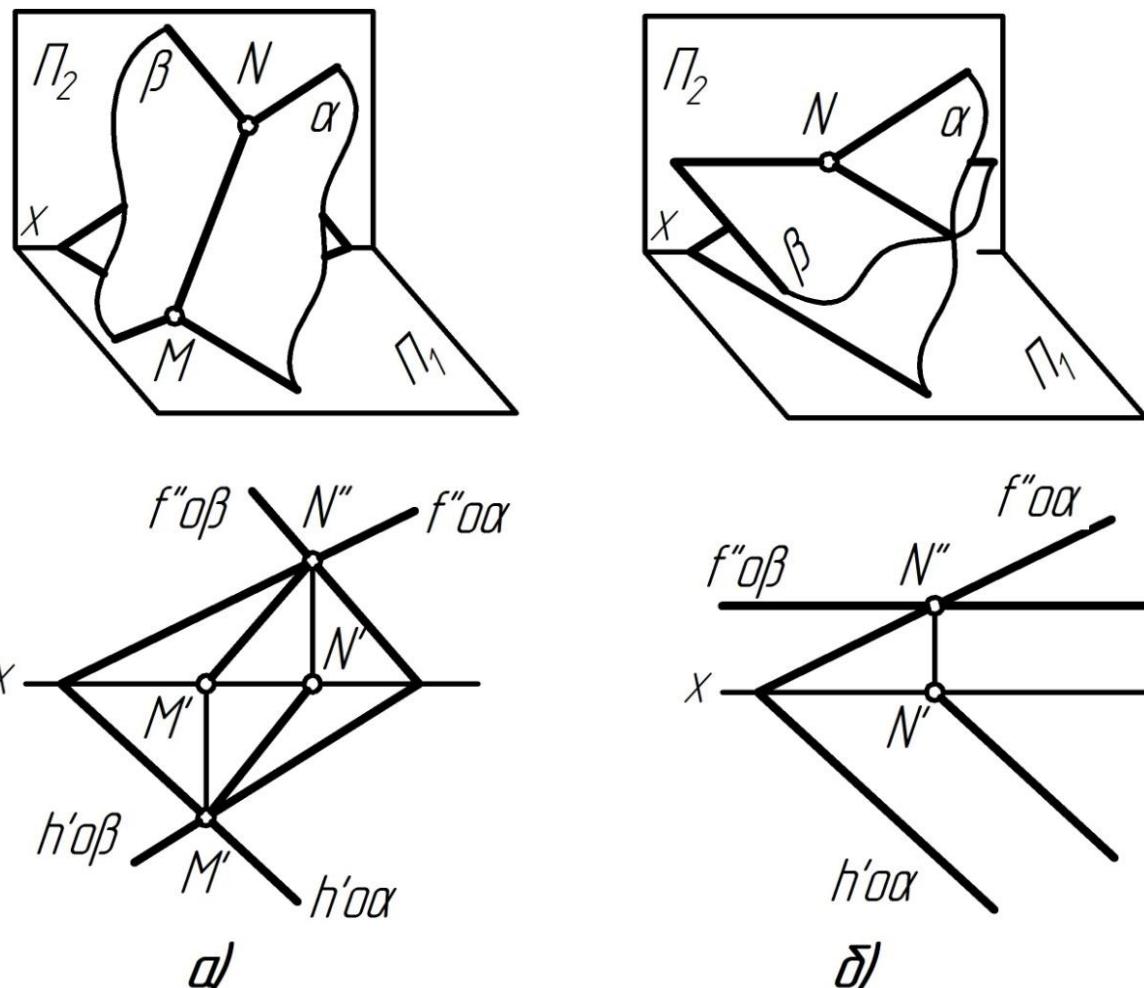
Плоскости могут пересекаться или быть параллельными.

1) Пересечение плоскостей

Линия пересечения двух плоскостей определяется:

- по двум общим точкам, принадлежащим заданным плоскостям (рисунок 8, а);

- одной общей точкой и направлением этой линии. Плоскость общего положения с плоскостью параллельной плоскости Π_1 всегда пересекается по горизонтали (рисунок 8, б), а с плоскостью параллельной плоскости Π_2 - по фронтали.



а – пересечение двух плоскостей общего положения;

б – пересечение плоскости общего положения с плоскостью уровня

Рисунок 8 – Пересечение двух плоскостей, заданных следами

Когда одна из пересекающихся плоскостей проецирующая, то сразу же становится известной одна из проекций линии пересечения, совпадающая со следом плоскости обладающего собирательным свойством (рисунок 9).

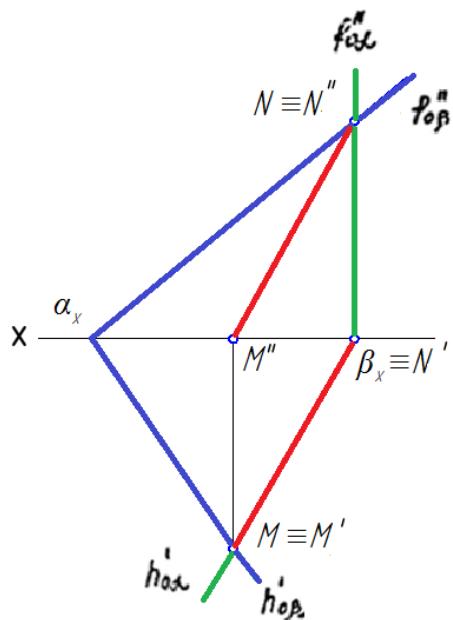


Рисунок 9 – Построение линии пересечения плоскости общего положения с проецирующей плоскостью

Точки, принадлежащие линии пересечения двух плоскостей, определяются **методом вспомогательных секущих плоскостей** в качестве которых, чаще выбирают проецирующие или плоскости уровня (рисунок 10). Если две плоскости пересекут третьей, то получается общая точка, принадлежащая искомой линии пересечения.

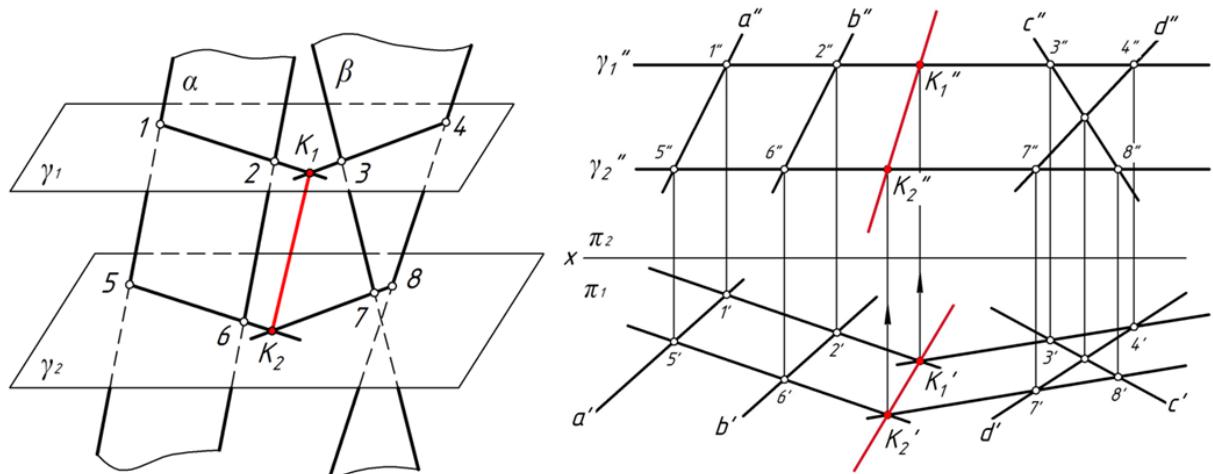


Рисунок 10 – Построение линии пересечения двух плоскостей методом вспомогательных секущих плоскостей

2) Параллельность плоскостей

Признаки параллельности плоскостей:

1. У параллельных плоскостей одноименные следы взаимно параллельны. (рисунок 11, а).
2. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно

параллельны двум пересекающимся прямым второй плоскости, то такие плоскости параллельны (рисунок 11, б).

3. Главные линии – горизонтали и фронтали двух параллельных плоскостей между собой параллельны.

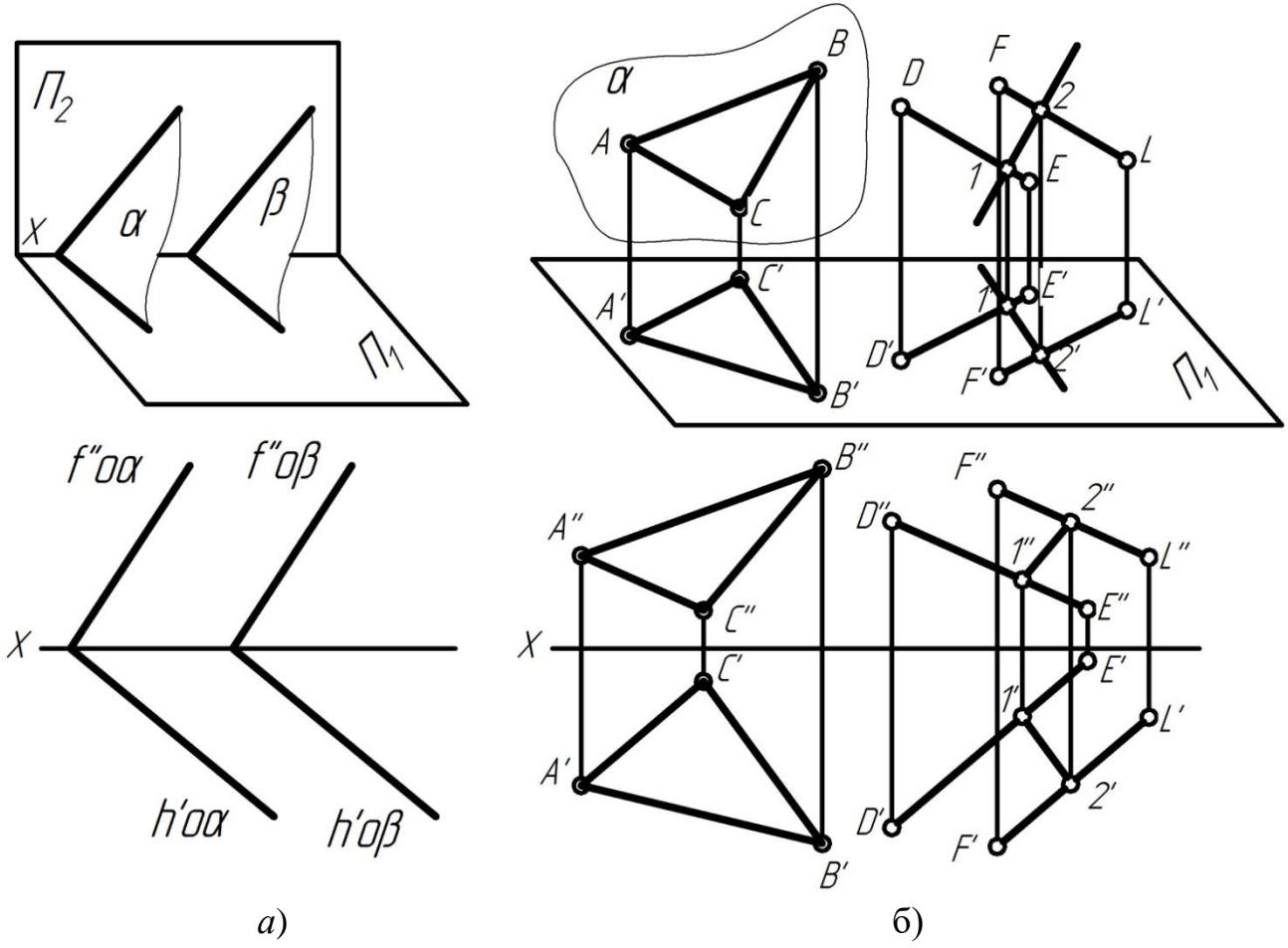
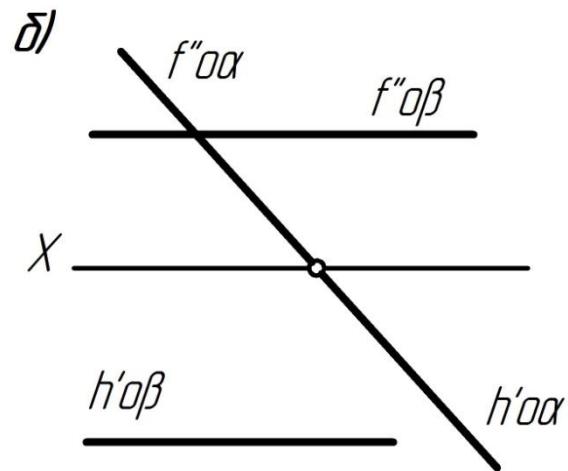
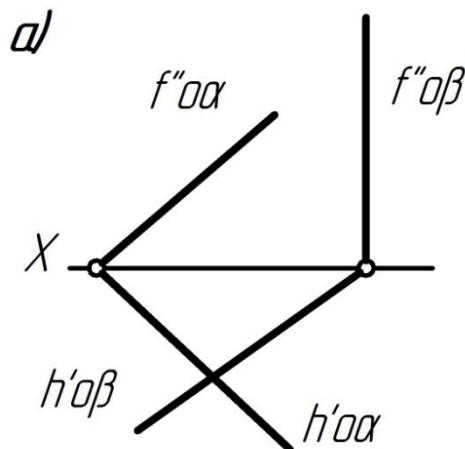
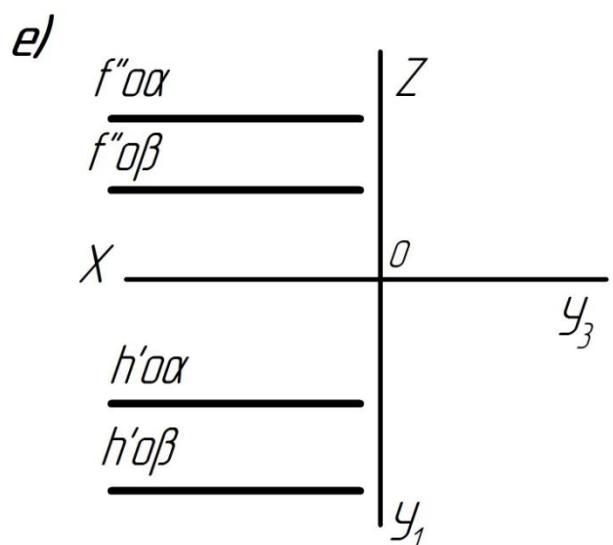
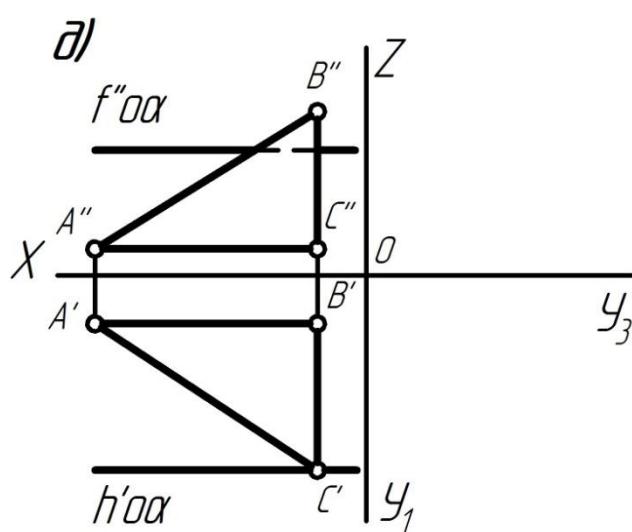
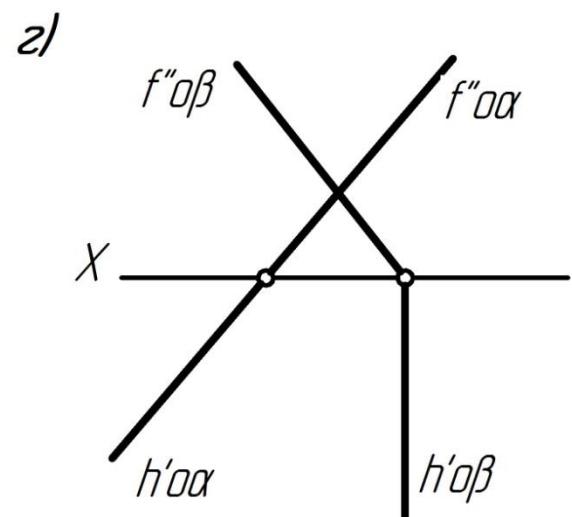
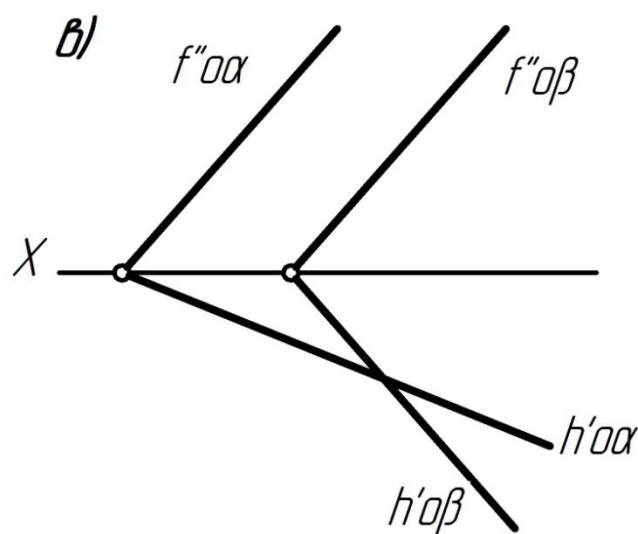


Рисунок 11 – Параллельность плоскостей: а) плоскости заданы следами; б) плоскости заданы плоской фигурой и параллельными прямыми

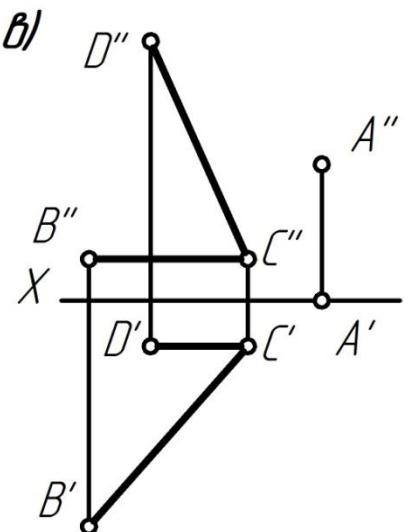
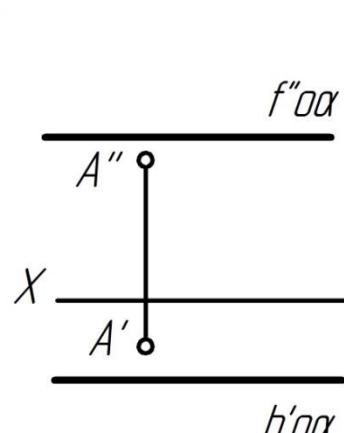
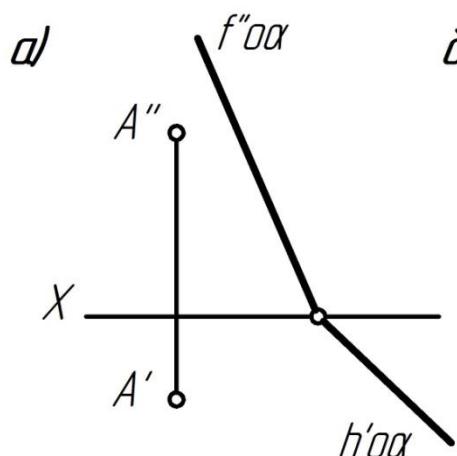
УПРАЖНЕНИЯ

29. Найти линию пересечения заданных плоскостей.



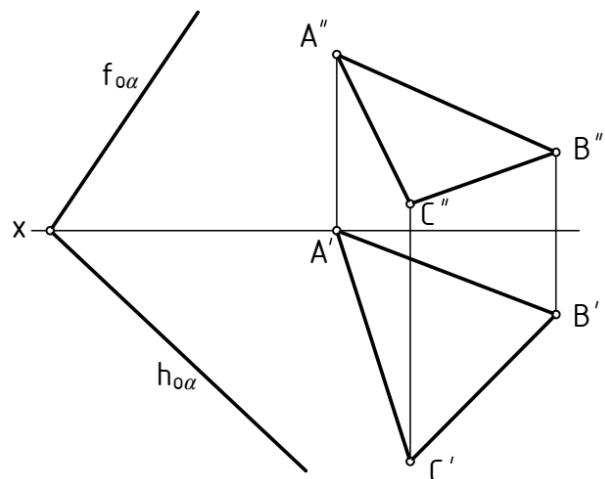
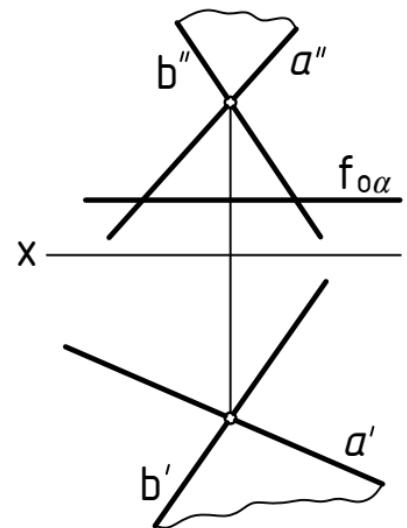
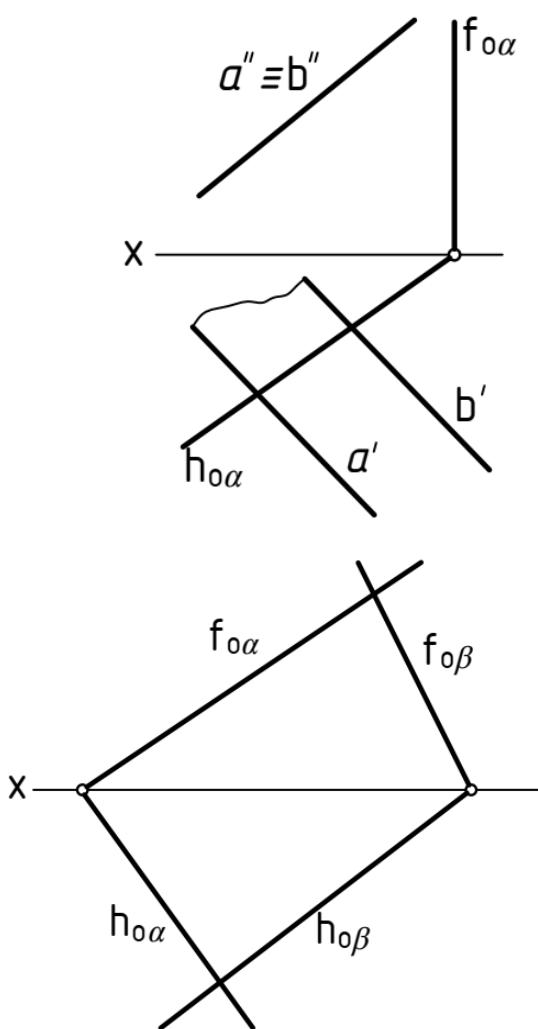


30. Через точку A провести плоскость параллельную заданной (в примере «б» не использовать профильный след плоскости α).

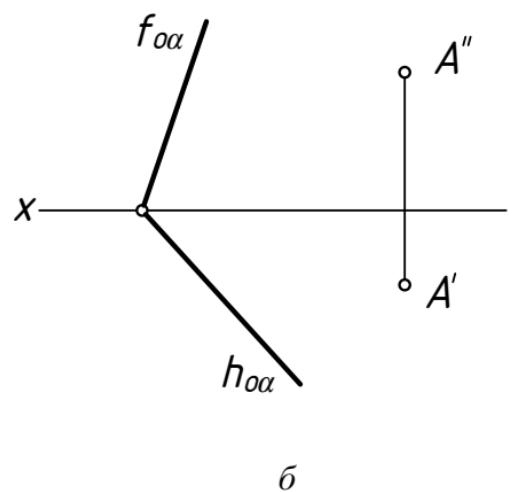
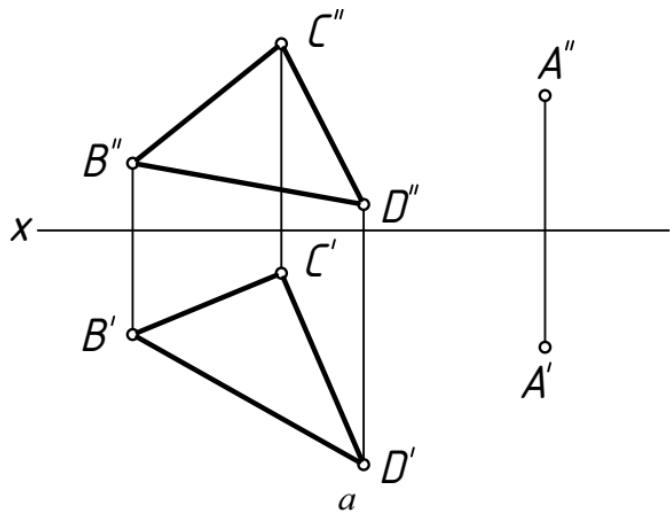


Упражнения для самостоятельного выполнения

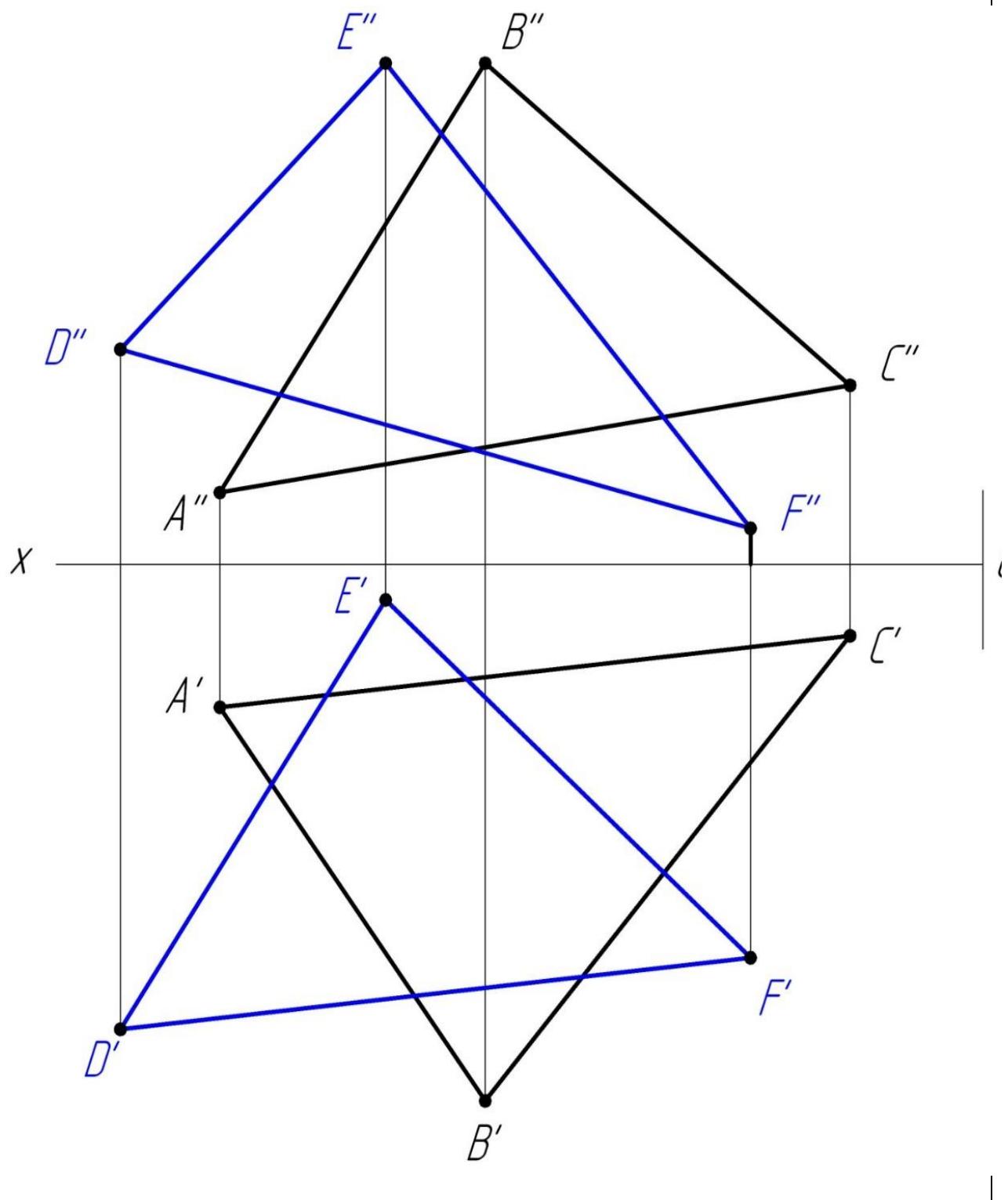
1. Построить проекции линий пересечения заданных плоскостей.



2. Построить проекции плоскости, проходящей через точку A параллельно плоскости, заданной на чертеже. Плоскости задать: а) горизонталью и фронталью; б) следами.



3. Построить линию пересечения двух плоских фигур.



5. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Прямая может пересекать плоскость и быть параллельна ей.

1) Пересечение прямой с плоскостью

Точку пересечения прямой с плоскостью общего положения находят в следующем порядке (рисунок 12):

- через заданную прямую проводят вспомогательную проецирующую плоскость;
- определяют линию пересечения заданной плоскости и вспомогательной;
- на пересечении полученной линии с заданной прямой находят точку встречи прямой с плоскостью.

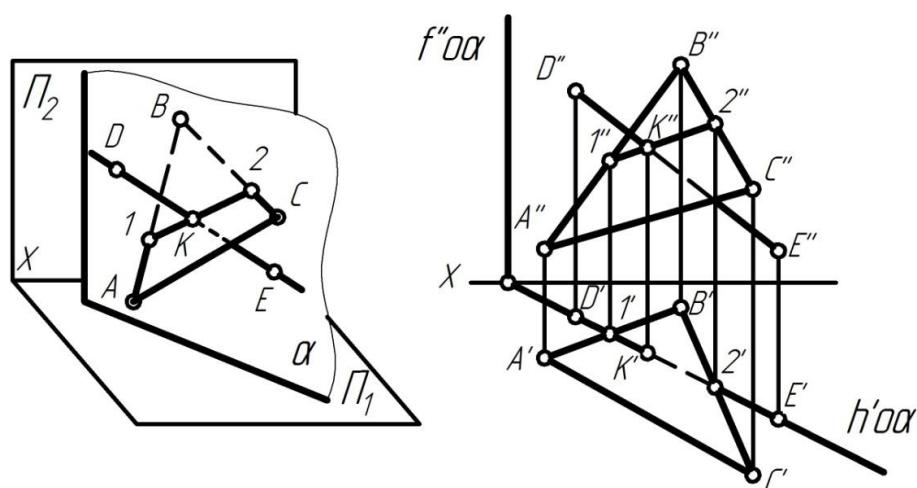


Рисунок 12 – Пересечение прямой с плоскостью общего положения

Если заданная плоскость проецирующая, то задача определения проекций точки пересечения с прямой упрощается, т.к. одна из проекций находится пересечением следа плоскости, обладающего собирательным свойством (рисунок 13).

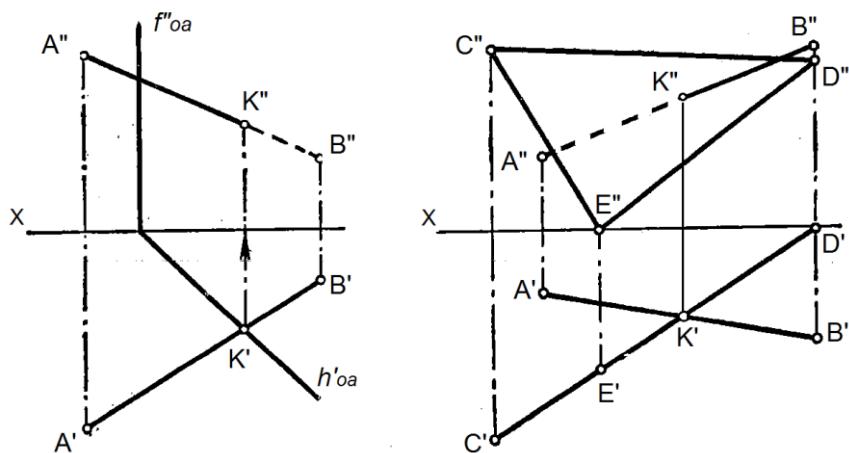


Рисунок 13 - Пересечение прямой с проецирующей плоскостью

2) Параллельность прямой и плоскости

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна прямой расположенной в этой плоскости (рисунок 14).

Признаком параллельности прямой и плоскости частного положения является параллельность следа плоскости, обладающего собирательным свойством соответствующей проекции прямой.

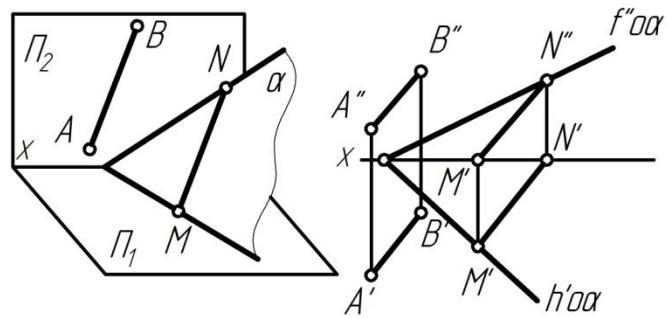
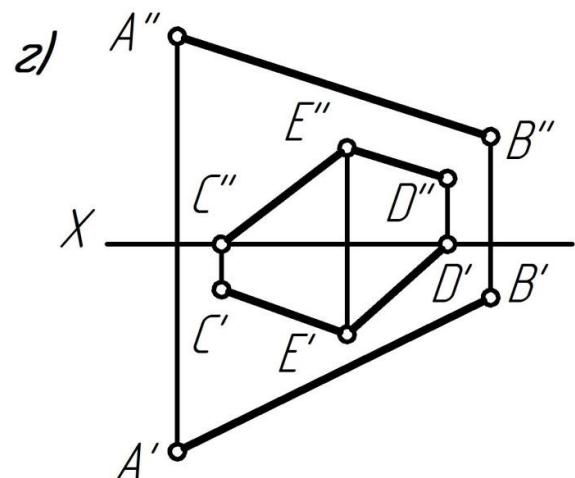
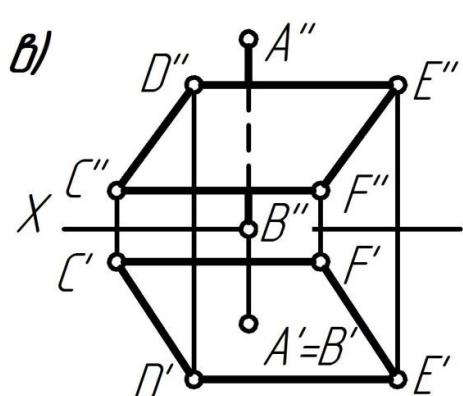
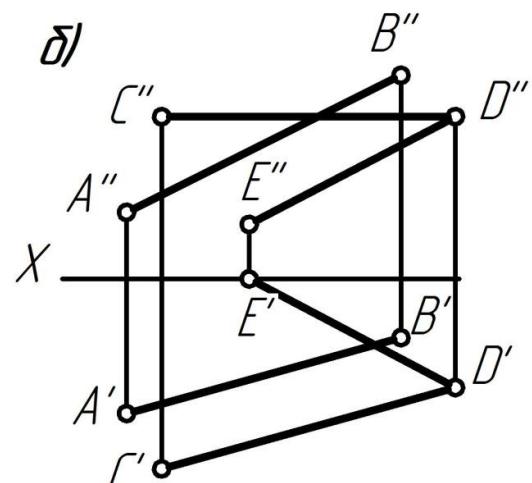
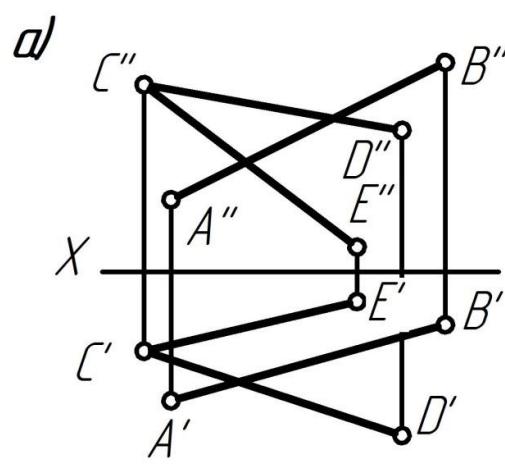


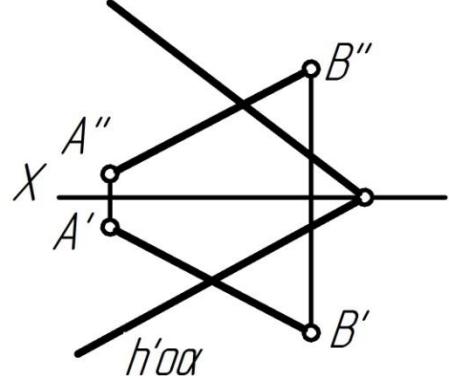
Рисунок 14 – Параллельность прямой и плоскости

УПРАЖНЕНИЯ

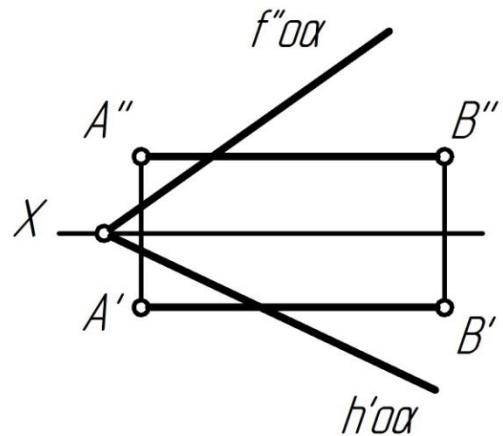
31. Построить проекции точки «*K*» пересечения прямой *AB* с заданными плоскостями.



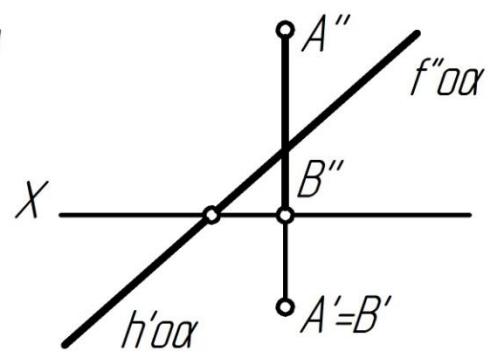
d)



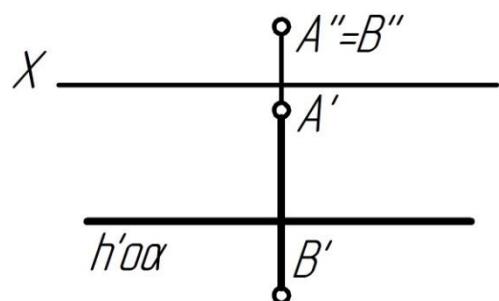
e)



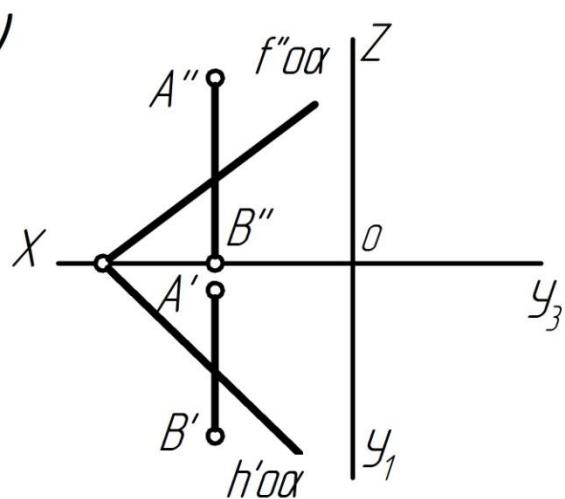
ж)



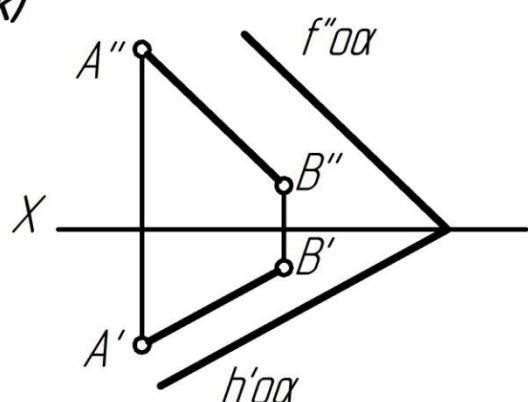
з)



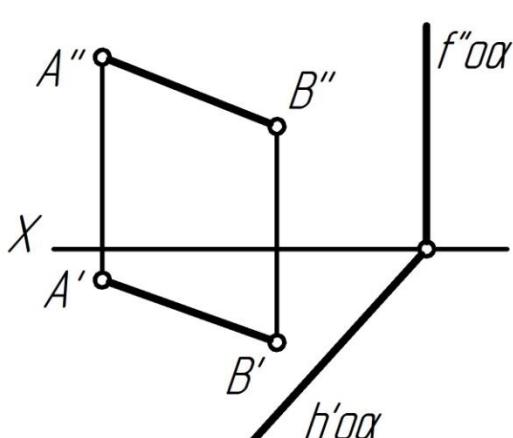
и)



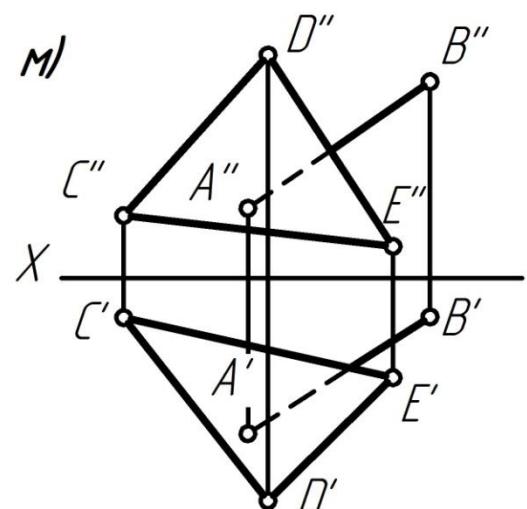
к)



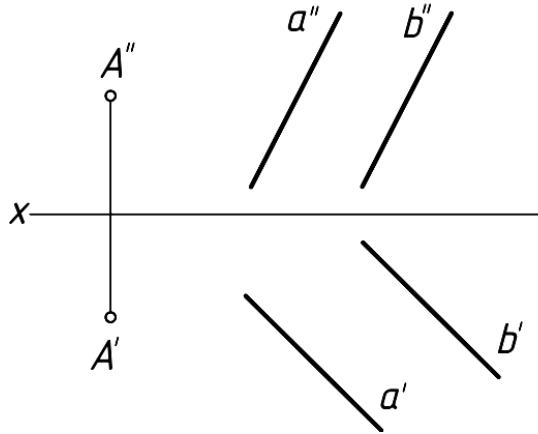
м)



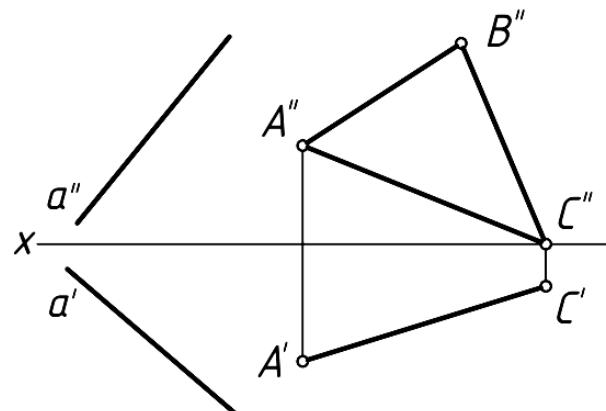
м)



32. Построить проекции горизонтальной прямой, проходящей через точку A параллельно плоскости, заданной прямыми a и b .

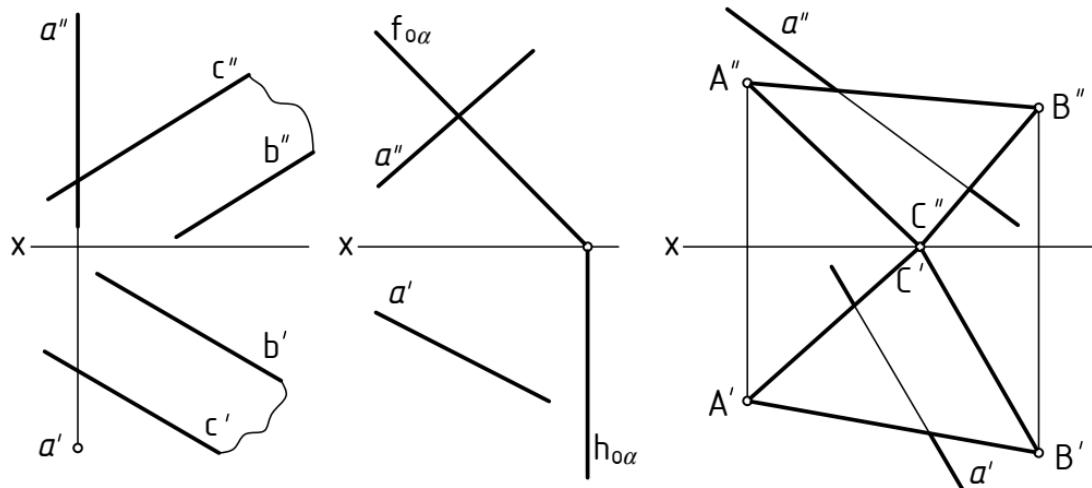


33. Достроить горизонтальную проекцию ΔABC , плоскость которого параллельна прямой a .

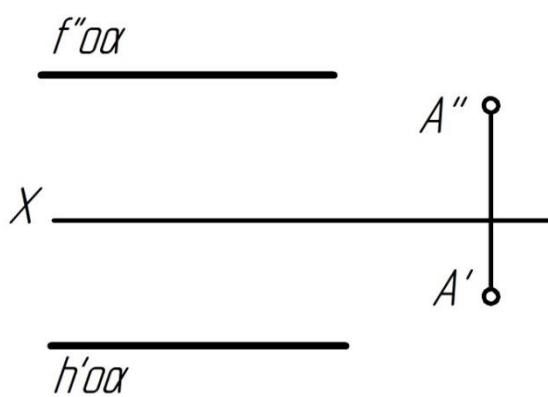


Упражнения для самостоятельного выполнения

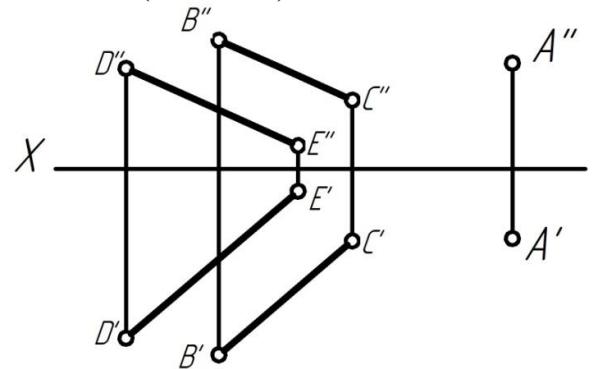
1. Построить проекции точек пересечения прямой a с заданными плоскостями. Определить видимость прямой относительно плоскостей.



2. Через точку A провести прямую параллельную плоскости α .



3. Построить проекции прямой, проходящей через точку A параллельно плоскости $(BC \parallel DE)$ и плоскости Π_2 .



6. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости. В качестве таких прямых на эпюре выбираются пересекающиеся горизонталь и фронталь (рисунок 15).

На основании теоремы о проекциях прямого угла $n' \perp h'$; $n'' \perp f''$.

Плоскость перпендикулярную заданной можно проводить следующим образом (рисунок 16):

- через прямую перпендикулярную к заданной плоскости (плоскости β , γ , δ перпендикулярны к плоскости α);
- перпендикулярно к прямой, лежащей в заданной плоскости.

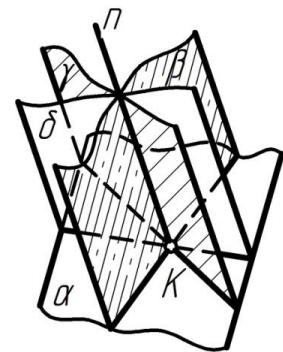
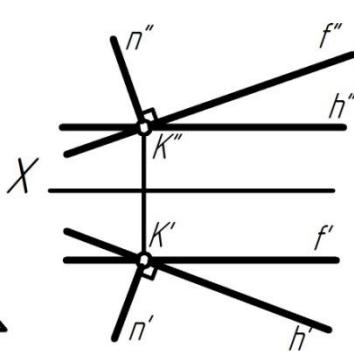
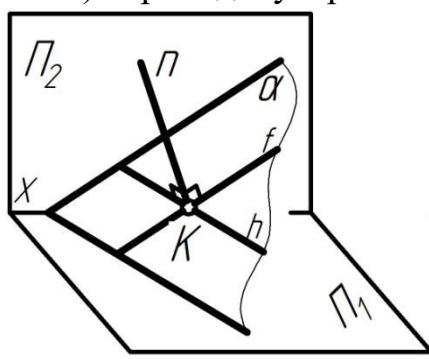


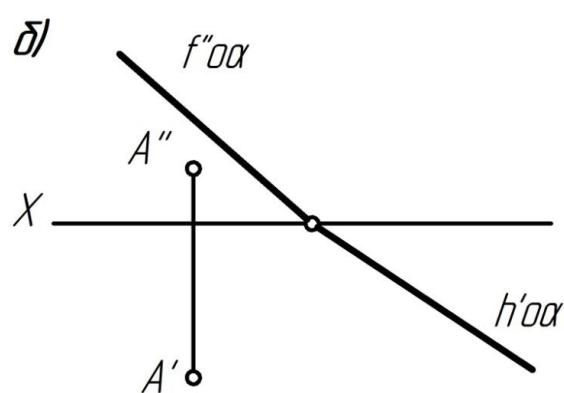
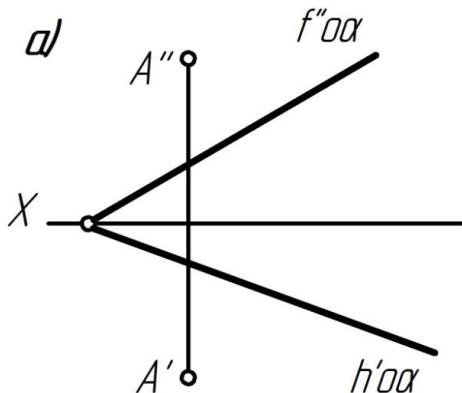
Рисунок 15 – Перпендикулярность прямой и плоскости

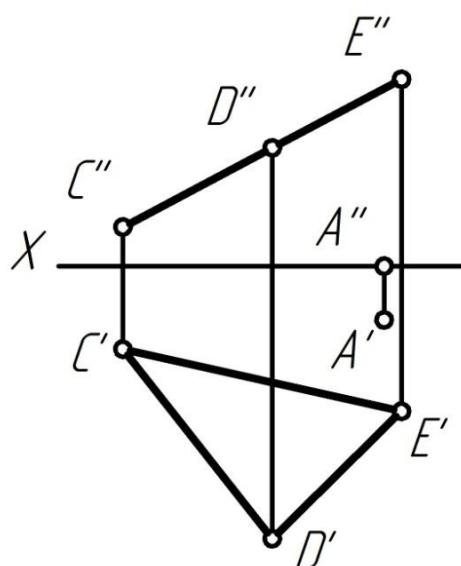
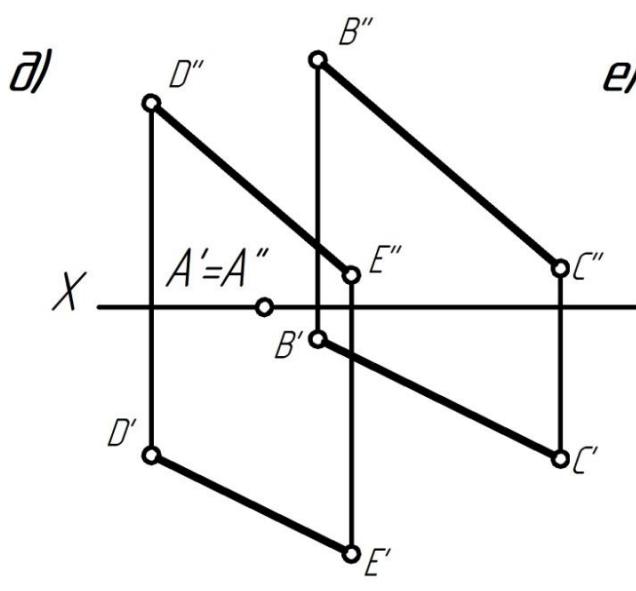
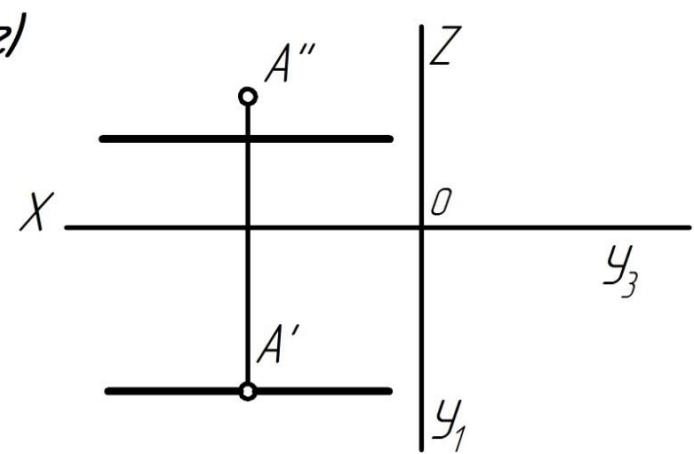
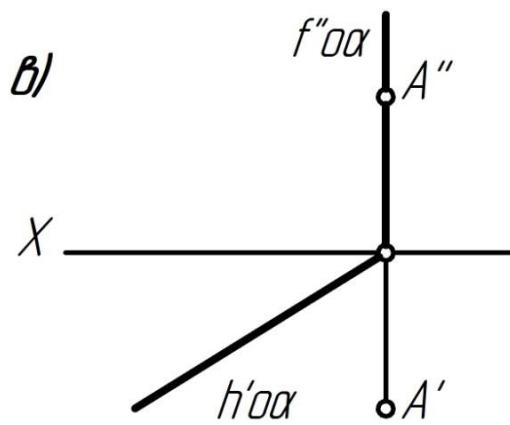
Рисунок 16 –
Перпендикулярность
плоскостей

Две прямые перпендикулярны, если одна из них лежит в плоскости, перпендикулярной второй прямой (если через одну из них возможно провести плоскость, перпендикулярную второй прямой).

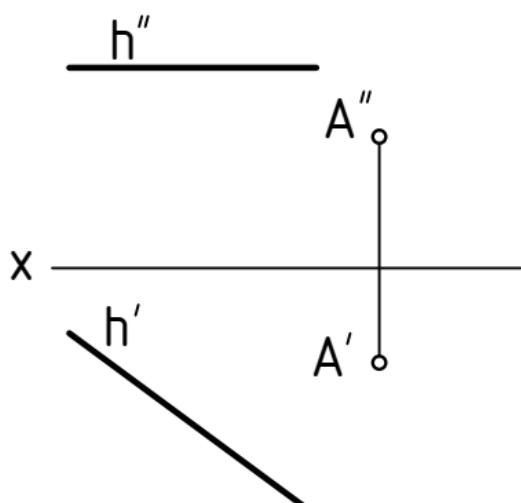
УПРАЖНЕНИЯ

34. Из точки A опустить перпендикуляр на заданную плоскость и найти его основание – точку K . Определить расстояние от точки A до заданной плоскости.

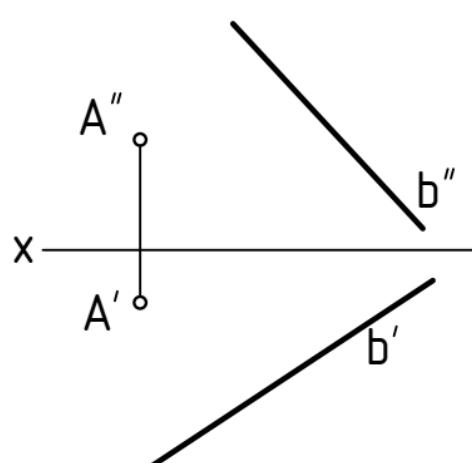




35. Построить проекции плоскости, перпендикулярной к заданной прямой h и проходящей через точку A .

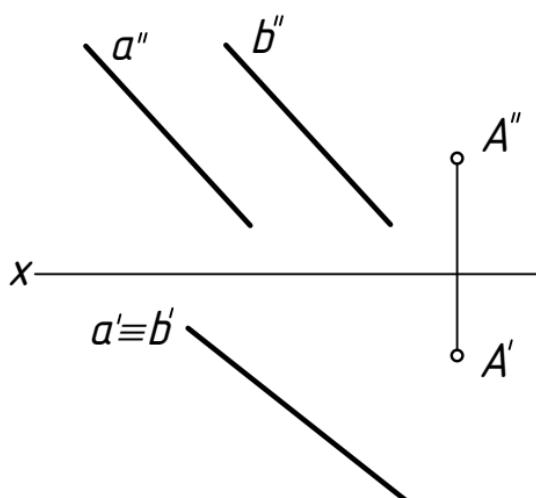


36. Построить проекции плоскости, перпендикулярной к заданной прямой b и проходящей через точку A .

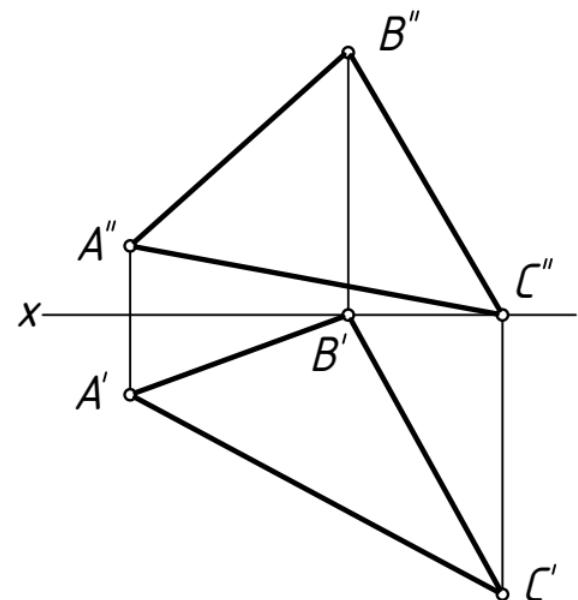


Упражнения для самостоятельного выполнения

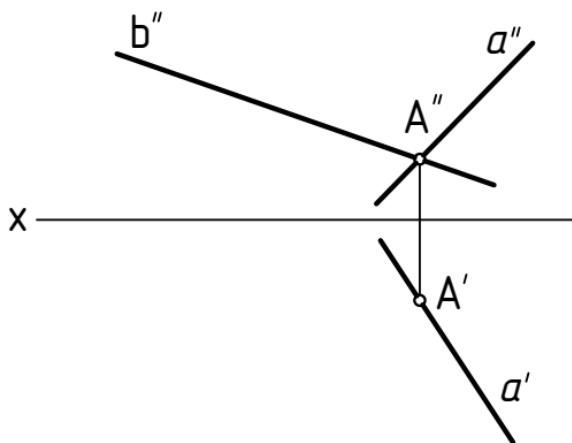
1. Построить проекции прямой, проходящей через точку A перпендикулярно к заданной плоскости. Определить расстояние от точки A до заданной плоскости.



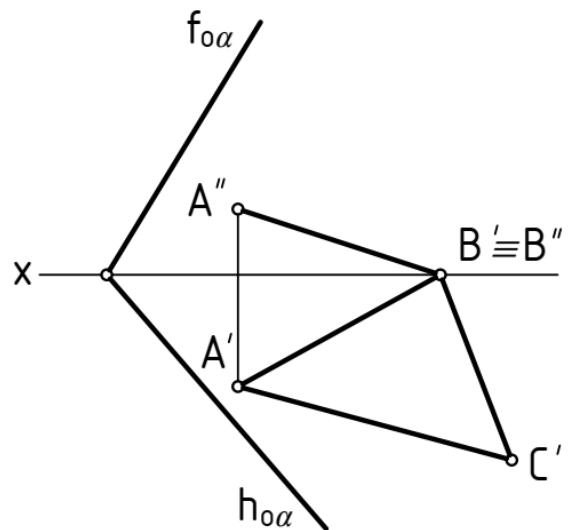
2. Построить проекции прямой, проходящей через точку A перпендикулярно к заданной плоскости.



3. Построить горизонтальную проекцию прямой b , пересекающей прямую a в точке A , если прямые a и b взаимно перпендикулярны.



4. Достроить фронтальную проекцию ΔABC , плоскость которого перпендикулярна к заданной плоскости α .



7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧЕРТЕЖА МЕТОДОМ ЗАМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИИ

Заменой одной плоскости проекции можно:

1. Преобразовать чертеж, так чтобы прямая общего положения стала параллельной одной из плоскостей проекции новой системы (рисунок 17, а.)

2. Прямую параллельную плоскости проекции преобразовать в проецирующую прямую, если новую плоскость проекции ввести перпендикулярно к прямой. На эпюре ось новой системы плоскостей проекций проходит под прямым углом к той проекции прямой, которая является её натуральной величиной.

3. Плоскость общего положения преобразовать в проецирующую, если новую плоскость проекции выбрать перпендикулярной к горизонтали (фронтали) либо к одному из следов заданной плоскости проекции (рисунок 17, б.).

Последовательной заменой двух плоскостей проекции, к примеру, можно прямую общего положения преобразовать в проецирующую (выполняются последовательно пункты 1 и 2).

УПРАЖНЕНИЯ

37. Определить натуральную величину отрезка AB и углы наклона его к плоскостям Π_1 и Π_2 .
Измерить и записать.

$$|AB| = \text{_____} \text{мм.}$$

$$\alpha = \text{_____} \text{град.}$$

$$\beta = \text{_____} \text{град.}$$

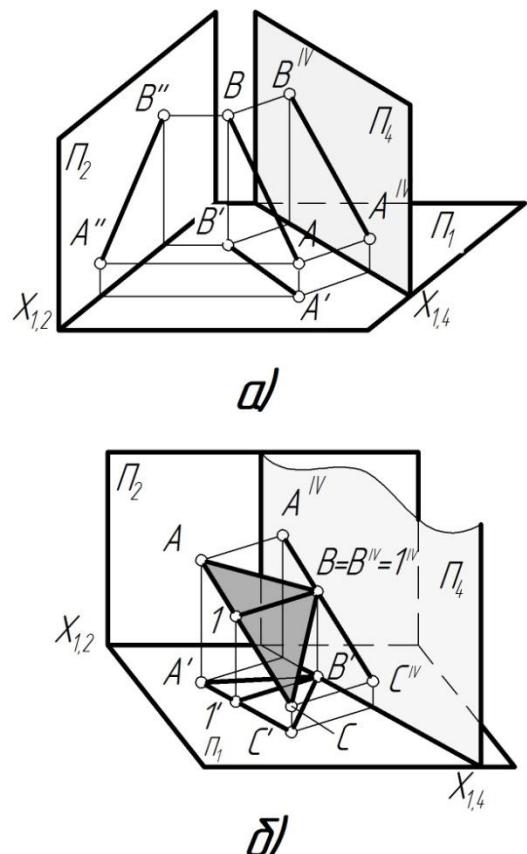
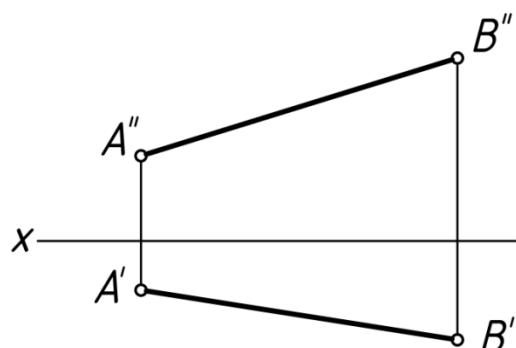
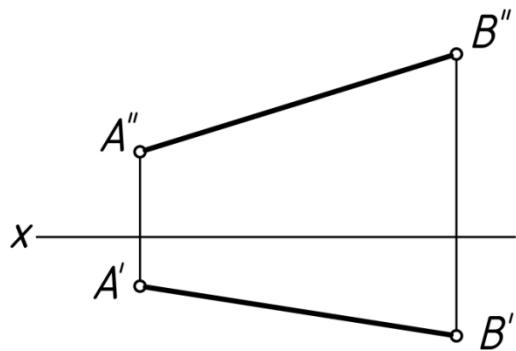


Рисунок 17 - Преобразование чертежа методом замены плоскостей проекции

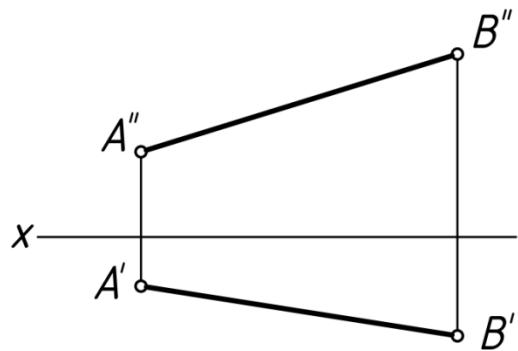


38. Заменой плоскостей проекции чертеж отрезка AB прямой общего положения преобразовать: а) в прямую уровня; б) в проецирующую прямую.

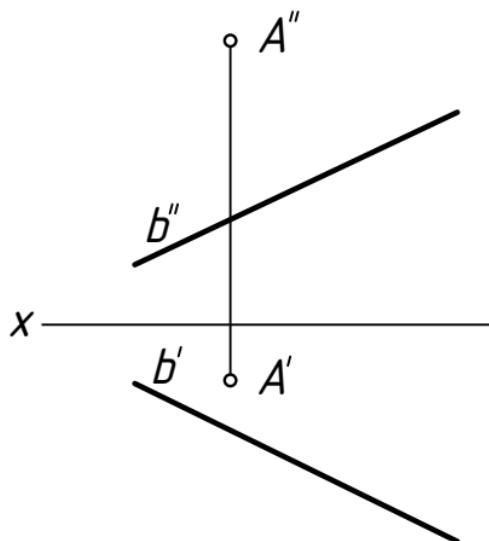
а)



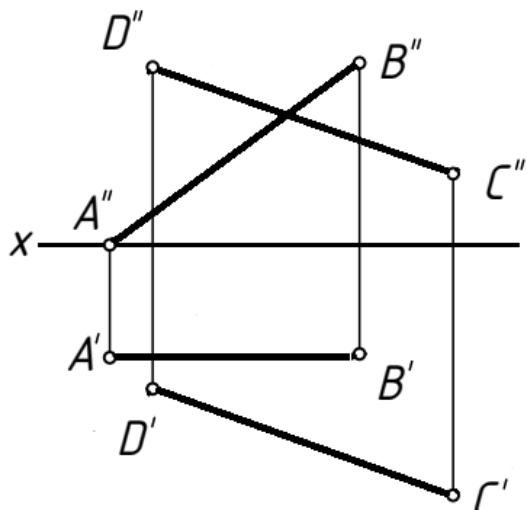
б)



39. Построить проекции перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую b . Построить проекции отрезка, определяющего это расстояние.

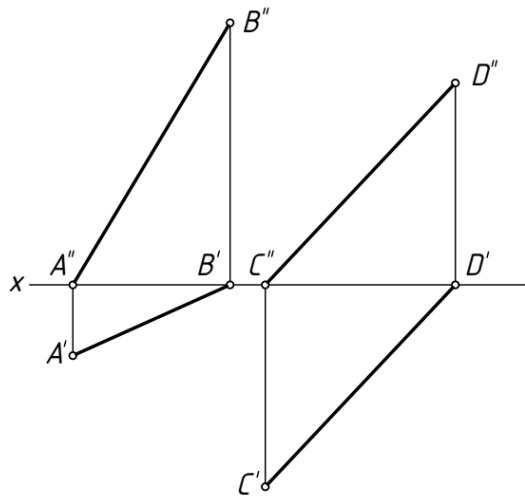


40. Определить расстояние между отрезками AB и CD . Построить проекции отрезка, определяющего это расстояние.

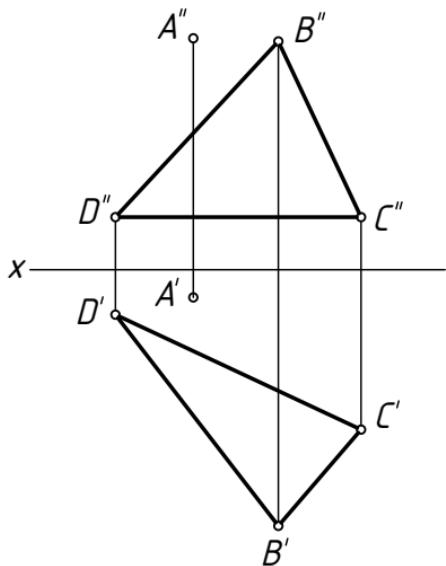


Упражнения для самостоятельного выполнения

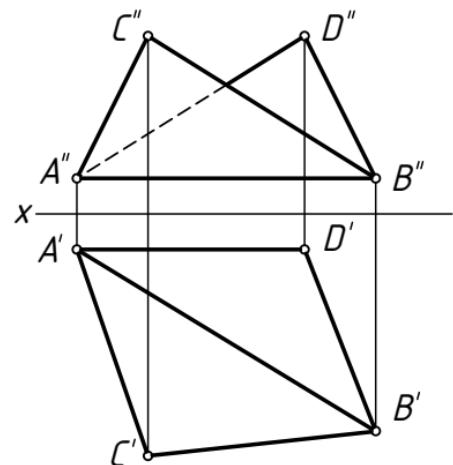
1. Определить расстояние между отрезками AB и CD . Построить проекции отрезка, определяющего это расстояние.



2. Определить расстояние от точки A до плоскости ΔBCD , применив метод замены плоскости проекции. Построить проекции отрезка, определяющего это расстояние.



3. Определить величину двугранного угла между плоскостями треугольников ABC и ABD , применив метод замены плоскости проекции.

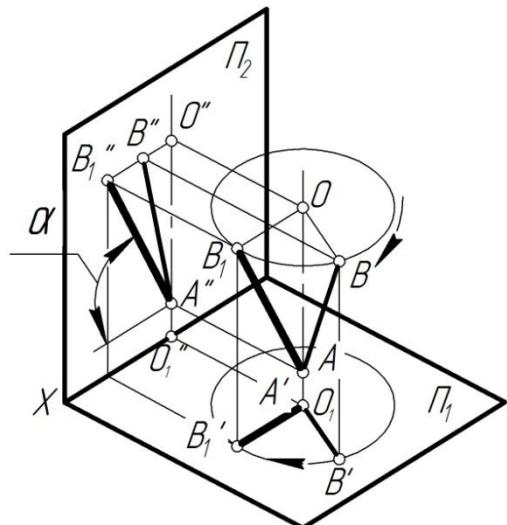


8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧЕРТЕЖА МЕТОДОМ ВРАЩЕНИЯ ВОКРУГ ПРОЕЦИРУЮЩЕЙ ПРЯМОЙ

При вращении точки вокруг оси, перпендикулярной к одной из плоскостей проекции, проекция точки на этой плоскости перемещается по дуге окружности, а на остальных – по прямым параллельным осям проекций (рисунок 18).

Методом вращения вокруг проецирующей прямой можно преобразовать:

- прямую общего положения в прямую уровня;
- прямую уровня в проецирующую прямую;
- плоскость общего положения в проецирующую;
- проецирующую плоскость в плоскость уровня.

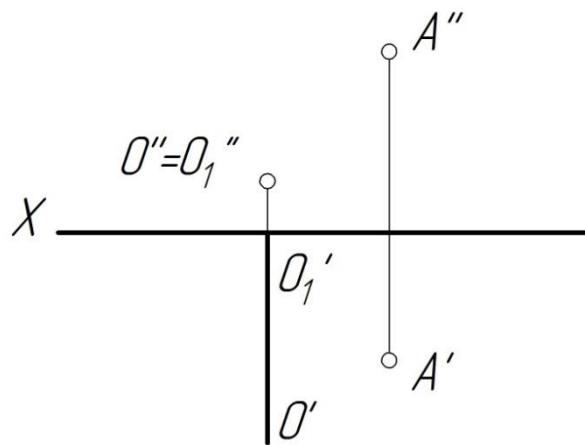


Отрезок прямой AB вращается вокруг OO_1 ($OO_1 \perp \Pi_1$). $A \subset OO_1$. Точка B вращается в плоскости, параллельной плоскости Π_1 . α – угол наклона прямой AB к плоскости Π_1 .

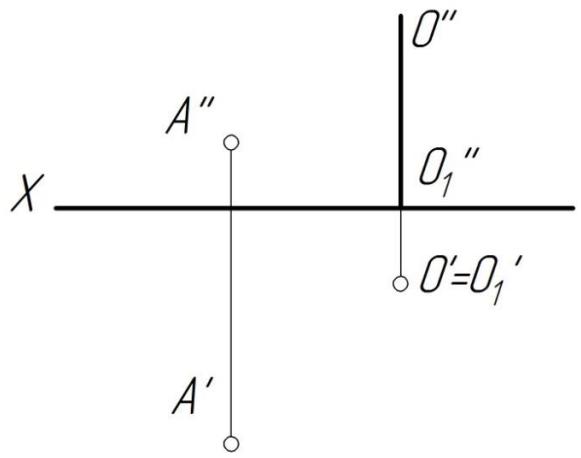
Рисунок 18 – Преобразование чертежа методом вращения вокруг проецирующей прямой

УПРАЖНЕНИЯ

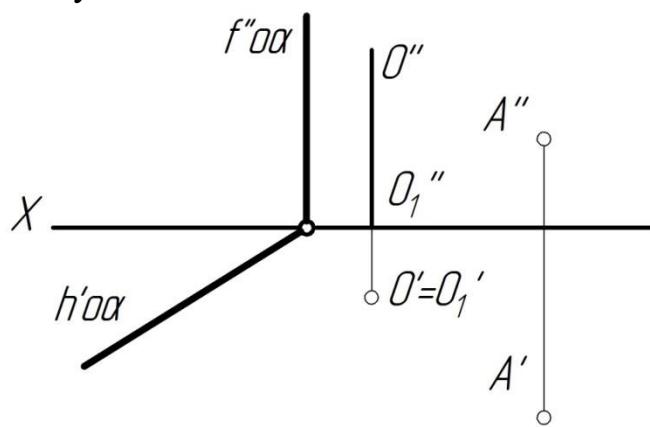
41. Повернуть точку A вокруг оси OO_1 так, чтобы значение её координаты $Z_A = 0$.



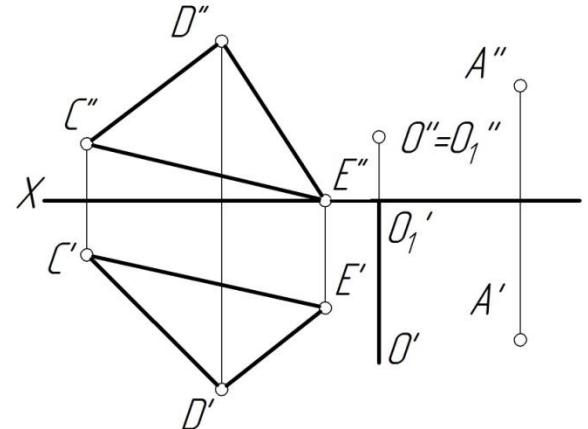
42. Повернуть точку A вокруг оси OO_1 так, чтобы Y_A уменьшилась в 2 раза.



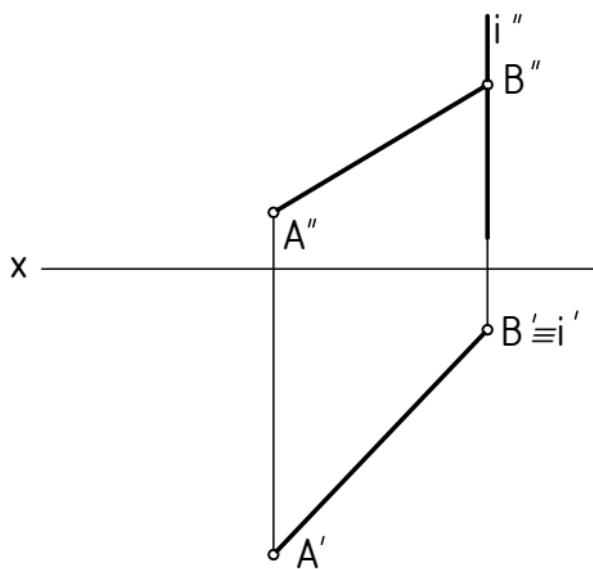
43. Вращением вокруг оси OO_1 ввести точку A в плоскость α .



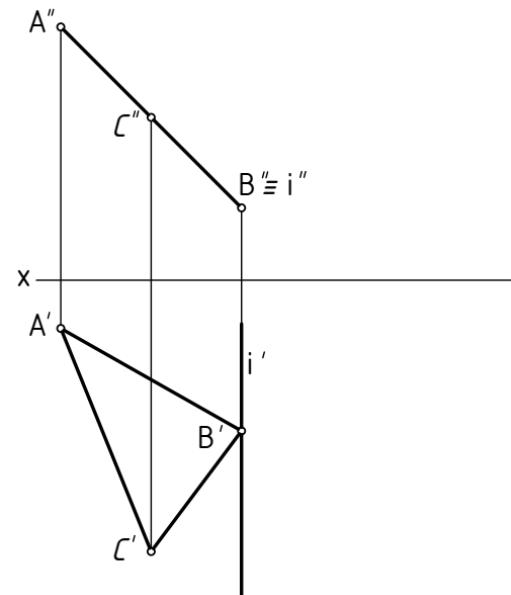
44. Вращением вокруг оси OO_1 ввести точку A в плоскость ΔCDE .



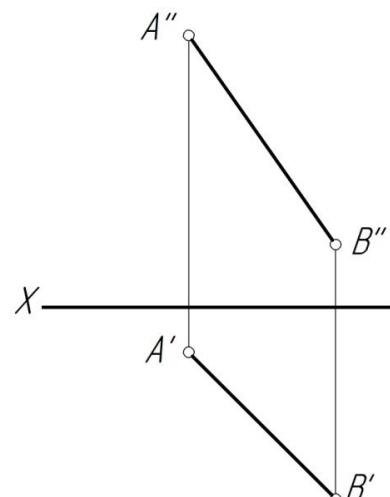
45. Определить натуральную величину отрезка AB и угол его наклона к плоскости проекции Π_I , применив вращение вокруг прямой i .



46. Определить натуральную величину ΔABC , применив вращение вокруг прямой i .

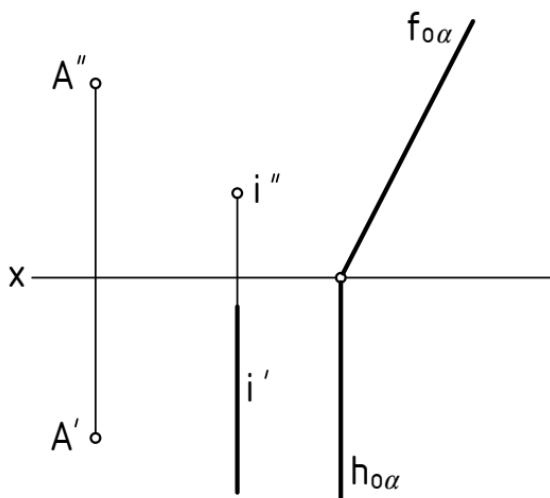


47. Повернуть отрезок AB вокруг фронтально-проецирующей прямой в положение горизонтали.

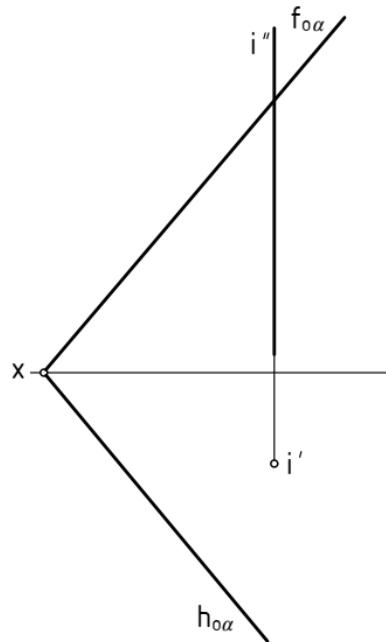


Упражнения для самостоятельного выполнения

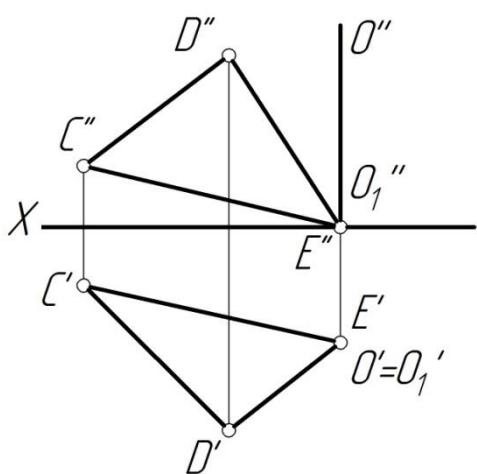
1. Повернуть точку A вокруг прямой i , чтобы она оказалась в плоскости α .



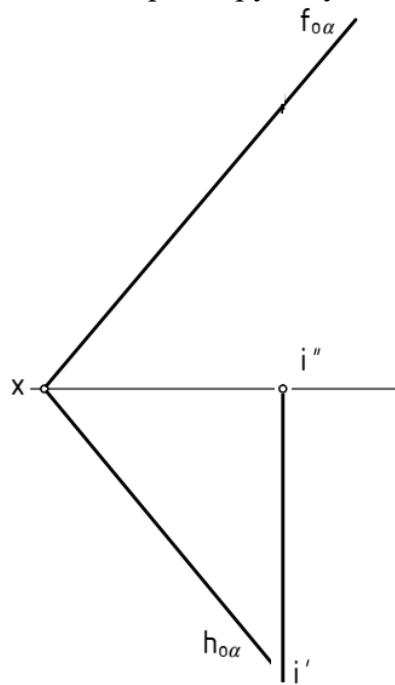
2. Определить угол наклона плоскости α к горизонтальной плоскости проекций, применив вращение вокруг прямой i .



3. Вращением вокруг оси OO_1 определить угол наклона ΔCDE к плоскости Π_1 .



4. Вращением вокруг прямой i преобразовать плоскость α в горизонтально-проецирующую.



9. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧЕРТЕЖА МЕТОДОМ ВРАЩЕНИЯ ВОКРУГ ПРЯМОЙ УРОВНЯ. МЕТОД СОВМЕЩЕНИЯ

Метод совмещения – преобразование плоскости общего или частного положения в плоскость уровня. Совмещение плоскости осуществляется **вращением её вокруг горизонтали** или **фронтали** до положения, когда она станет параллельной плоскости проекций.

На рисунке 19 показано вращение точки пространства вокруг прямой $h \parallel \Pi_1$. При этом следует для себя четко представлять: **ось вращения** (прямая h), **плоскость вращения** (плоскость α (она всегда перпендикулярна оси вращения и поэтому является проецирующей плоскостью)), **центр вращения** (точка O) и **радиус вращения R** (определяется как натуральная величина отрезка OB) и **плоскость совмещения** (плоскость β). Точка O – является точкой пересечения оси вращения с плоскостью вращения.

Вращением вокруг линий уровня можно решить задачи на определение натуральных величин плоских фигур, углов между прямыми, между прямой и плоскостью (используя дополнительный угол).

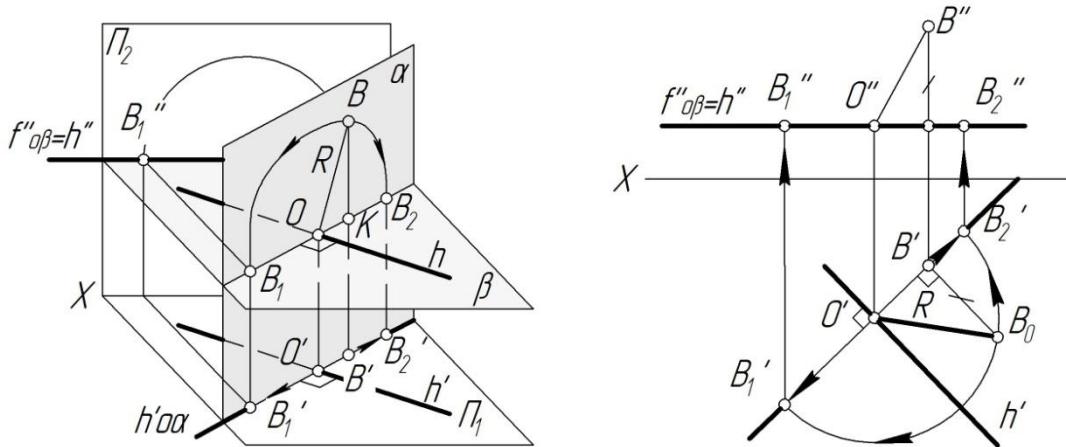


Рисунок 19 – Преобразование чертежа методом вращения вокруг прямой уровня

Если плоскость задана следами, то вращение осуществляют вокруг одного из следов до полного совпадения с плоскостью проекций (рисунок 20).

$h'oy$ – ось вращения;

α – плоскость вращения точки N ;

т. O – центр вращения точки N ;

R – радиус вращения точки N ;

Π_1 – плоскость совмещения;

$f_1'oy$ – фронтальный след плоскости γ , совмещенный с плоскостью Π_1 ;

φ – угол между следами плоскости γ .

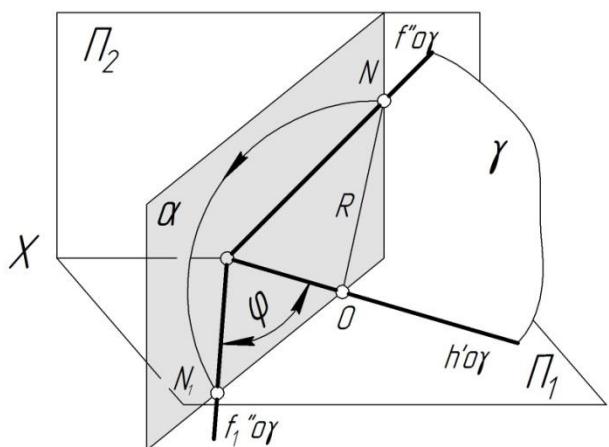
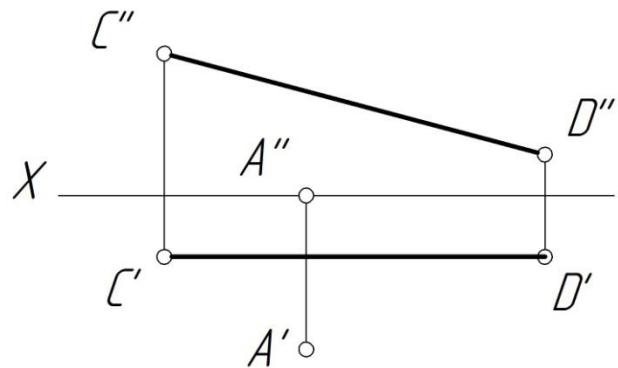


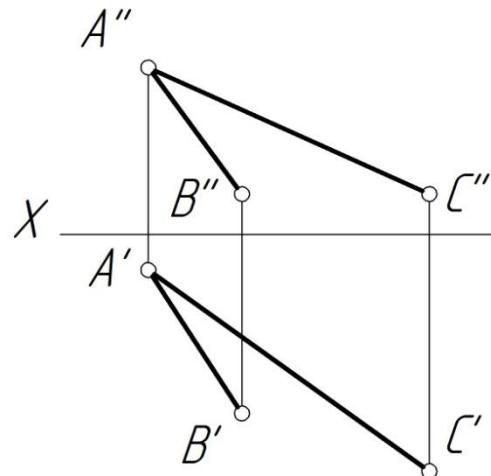
Рисунок 20 – Совмещение плоскости, заданной следами с плоскостью Π_1

УПРАЖНЕНИЯ

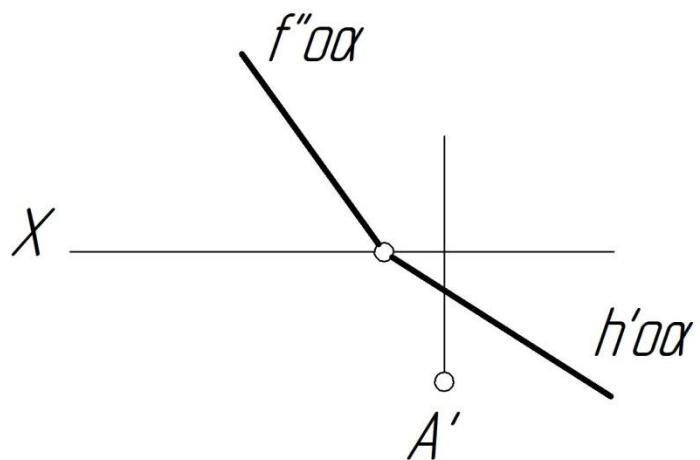
48. Повернуть точку A вокруг CD до совмещения с фронтальной плоскостью уровня.



49. Построить проекции биссектрисы угла A , используя вращение вокруг горизонтали.

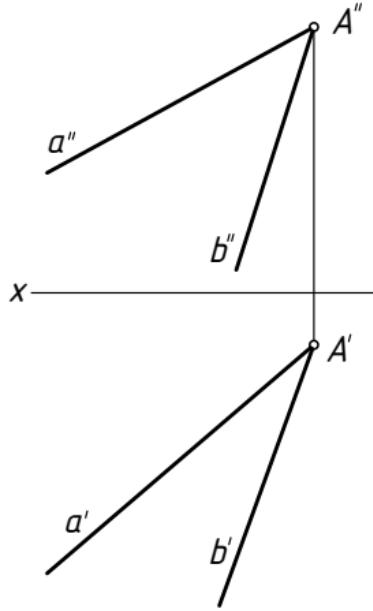


50. Плоскость α и лежащую в ней точку A совместить с плоскостью Π_1 .

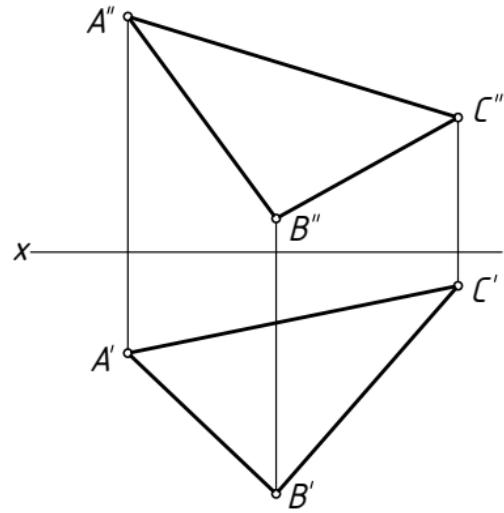


Упражнения для самостоятельного выполнения

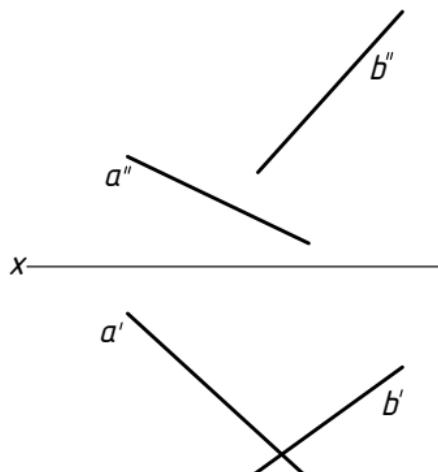
1. Построить проекции биссектрисы угла A , применив вращение вокруг фронтали.



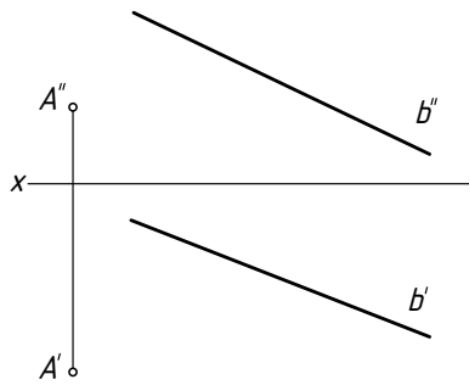
2. Определить натуральную величину плоскости ΔABC , применив вращение вокруг линии уровня



3. Определить угол между прямыми a и b , применив вращение вокруг фронтали.



4. Определить расстояние от точки A до прямой b , применив вращение вокруг горизонтали.



10. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧЕРТЕЖА МЕТОДОМ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

При плоскопараллельном перемещении геометрической фигуры все её точки перемещаются в плоскостях, параллельных между собой и параллельных одной из плоскостей проекций (рисунок 21).

Точка *A* отрезка *AB* перемещается в плоскости β , а точка *B* в плоскости α . Плоскости α и β параллельны плоскости Π_1 .

В основе данного метода лежат следующие положения:

- при плоскопараллельном перемещении фигуры относительно плоскости проекций Π_1* фронтальные проекции точек перемещаются по прямым, параллельным оси OX , а горизонтальная проекция фигуры перемещаясь, остаётся неизменной по своей величине и форме.
- при плоскопараллельном перемещении фигуры относительно плоскости проекций Π_2* , горизонтальные проекции точек перемещаются параллельно оси OX , а фронтальная проекция фигуры, перемещаясь, остаётся неизменной по своей величине и форме.

При одном плоскопараллельном перемещении можно определить:

- натурульную величину прямой общего положения и угла наклона её к плоскости проекций;
- расстояние между двумя параллельными плоскостями общего положения;
- натурульную величину плоской фигуры, если она занимает проецирующее положение.

Двумя плоскопараллельными перемещениями определяются:

- расстояние от точки до прямой общего положения;
- расстояние между двумя прямыми общего положения;
- величина плоского угла, двугранного угла при ребре, занимающего общее положение;
- натурульная величина плоской фигуры, лежащей в плоскости общего положения.

Плоскопараллельное перемещение геометрического элемента относительно плоскости проекций можно рассматривать как вращение вокруг проецирующей прямой без указания оси вращения.

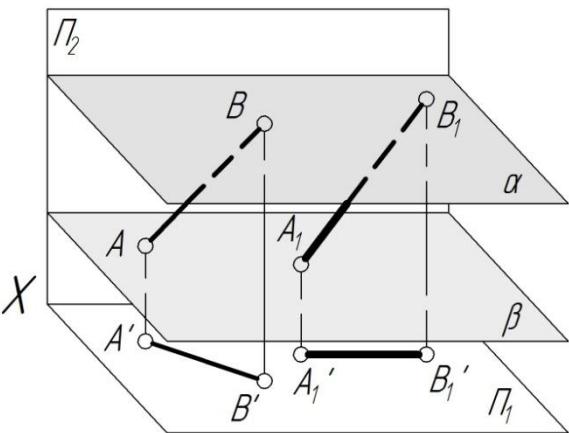
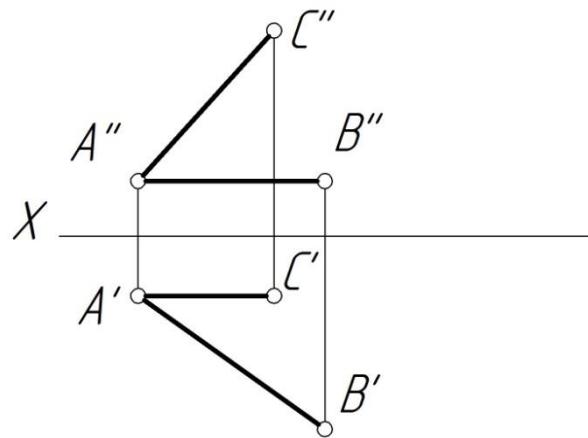


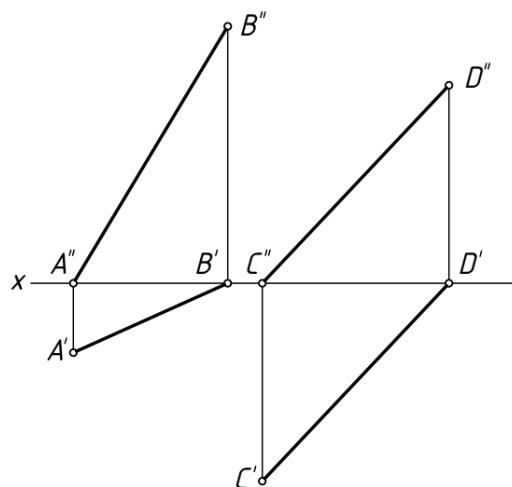
Рисунок 21 – Плоскопараллельное перемещение

УПРАЖНЕНИЯ

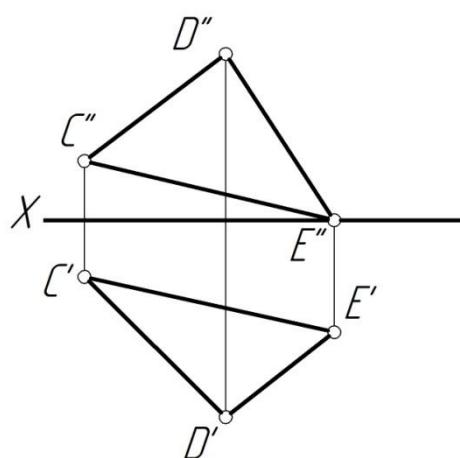
51. Плоскопараллельным перемещением определить угол между пересекающимися прямыми AB и AC .



52. Плоскопараллельным перемещением определить расстояние между отрезками AB и CD .

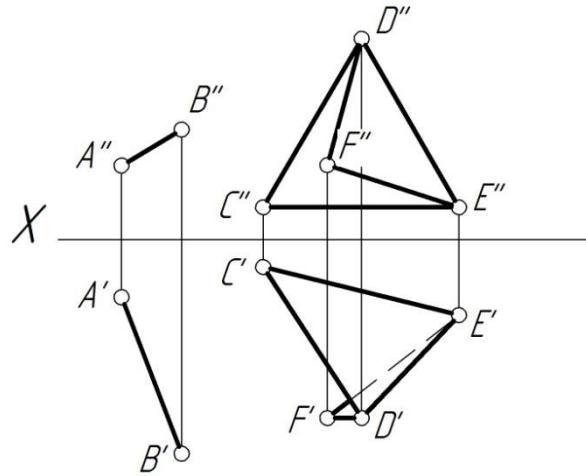


53. Плоскопараллельным перемещением определить натуральную величину $\triangle CDE$.

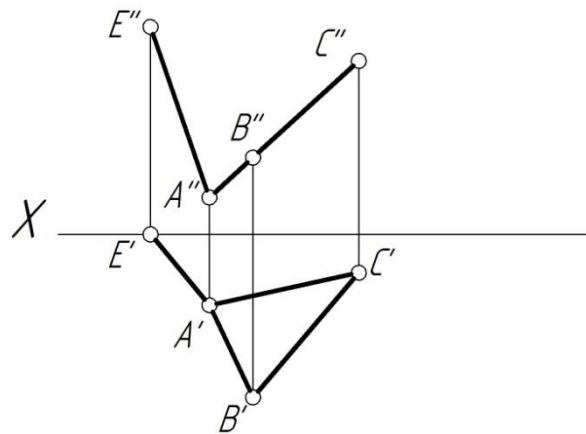


Упражнения для самостоятельного выполнения

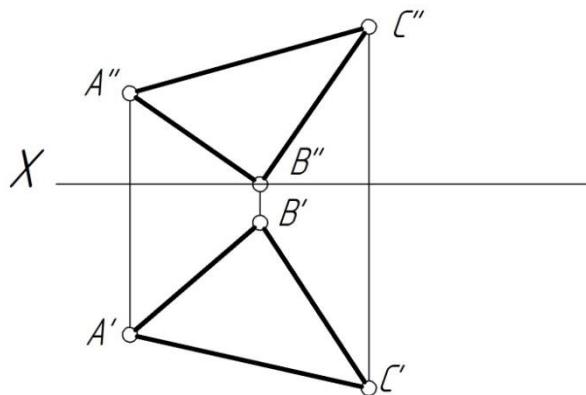
1. Плоскопараллельным перемещением найти на прямой AB точку, равноудаленную от плоскостей ΔFDE и ΔCDE .



2. Плоскопараллельным перемещением определить угол наклона прямой AE к плоскости ΔABC .



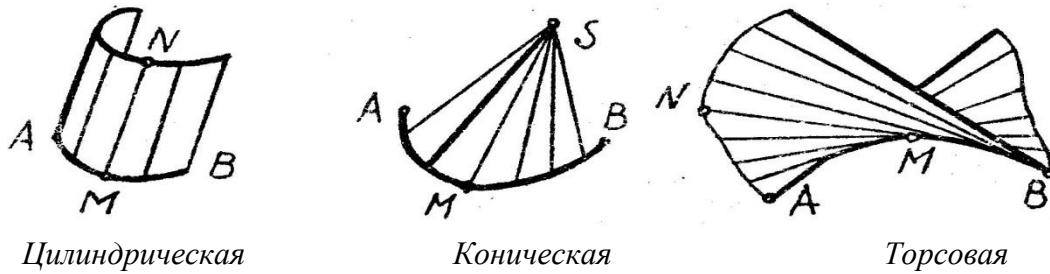
3. Построить окружность, вписанную в ΔABC , используя метод плоскопараллельного перемещения.



11. ПОВЕРХНОСТИ

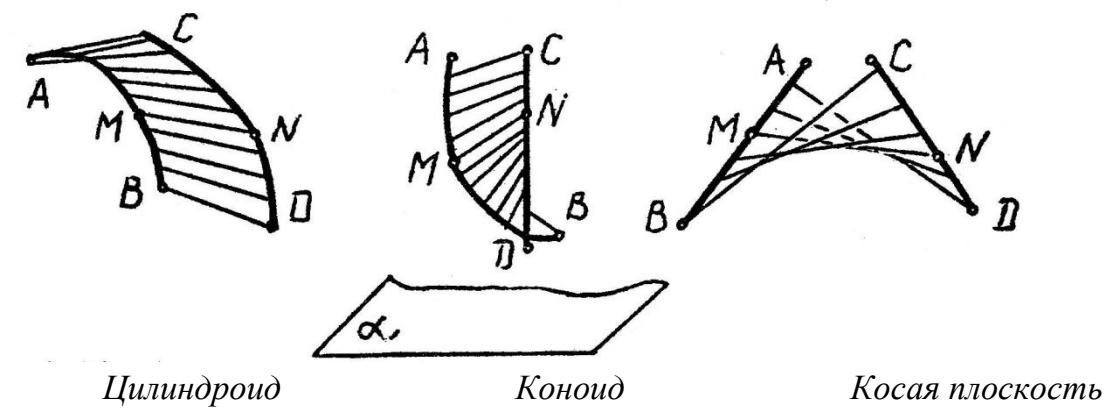
Поверхность представляет собой множество последовательных положений перемещающейся в пространстве линии по определенному закону. Перемещающуюся линию называют *образующей*. В зависимости от формы образующей все поверхности делят на **линейчатые** (образующая — прямая линия) и **нелинейчатые** (образующая — кривая линия).

Закон движения образующей определяется **направляющими элементами** и положением образующей относительно этих элементов в любой момент движения.



AB — направляющая; $MN(SM)$ — образующая

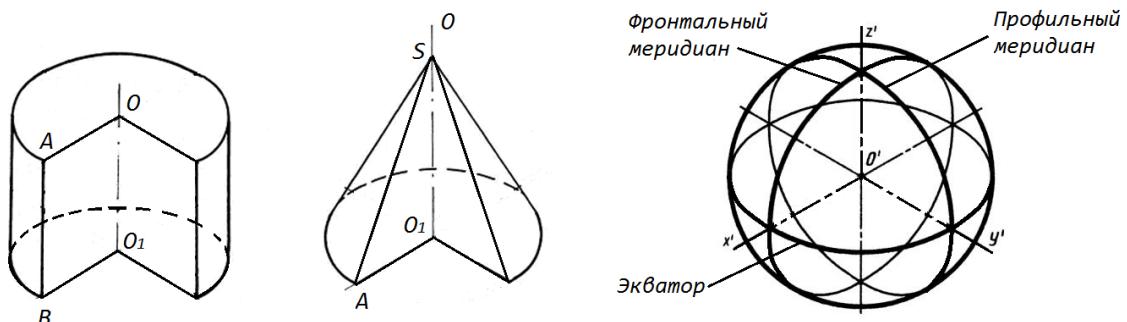
Рисунок 26 - Линейчатые развёртывающиеся поверхности



AB и CD — направляющие; MN — образующая; α — плоскость параллелизма MN

Рисунок 27 - Линейчатые неразвёртывающиеся поверхности

Поверхности вращения образуются при вращении линий вокруг заданной оси (рисунок 28): цилиндр, конус, сфера, шар, эллипсоид и другие.



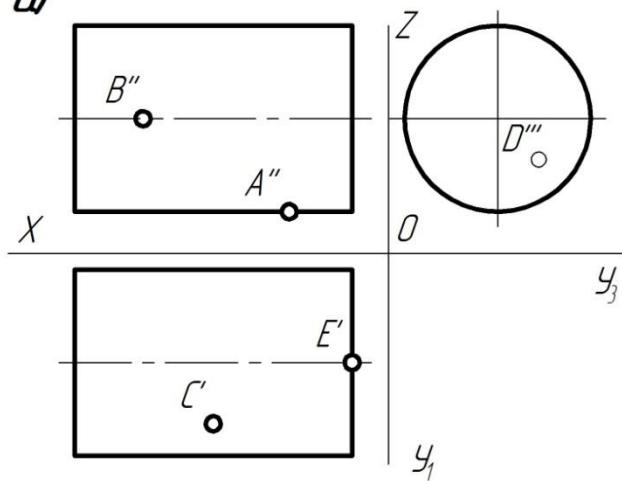
AB — образующая цилиндра; SA — образующая конуса; OO_1 — ось вращения

Рисунок 28 – Поверхности вращения

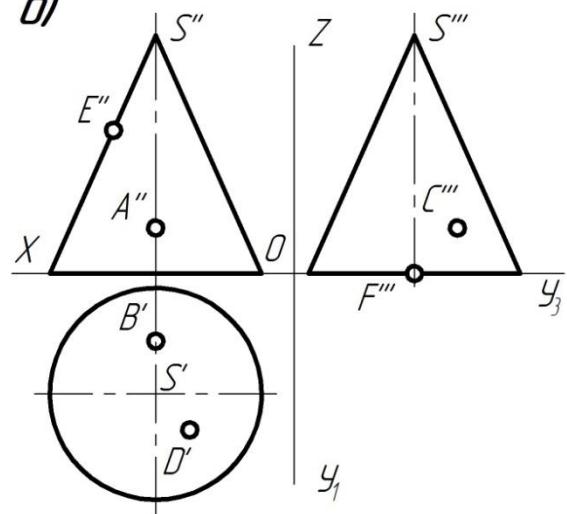
УПРАЖНЕНИЯ

54. Построить отсутствующие проекции видимых точек, лежащих на заданных поверхностях.

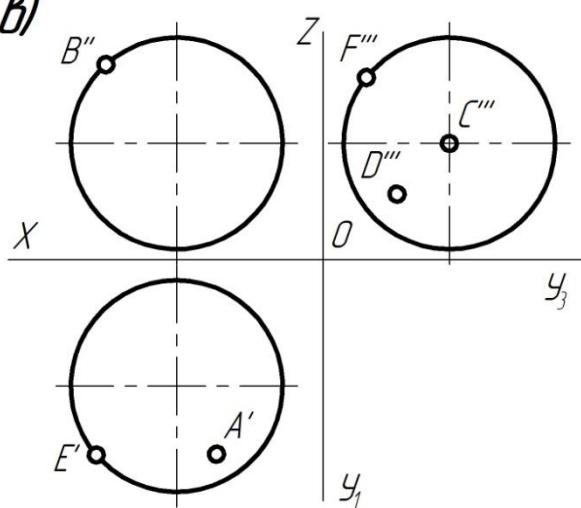
a/



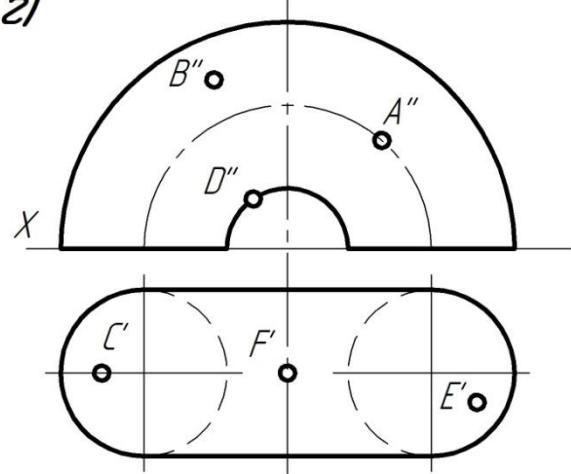
б/



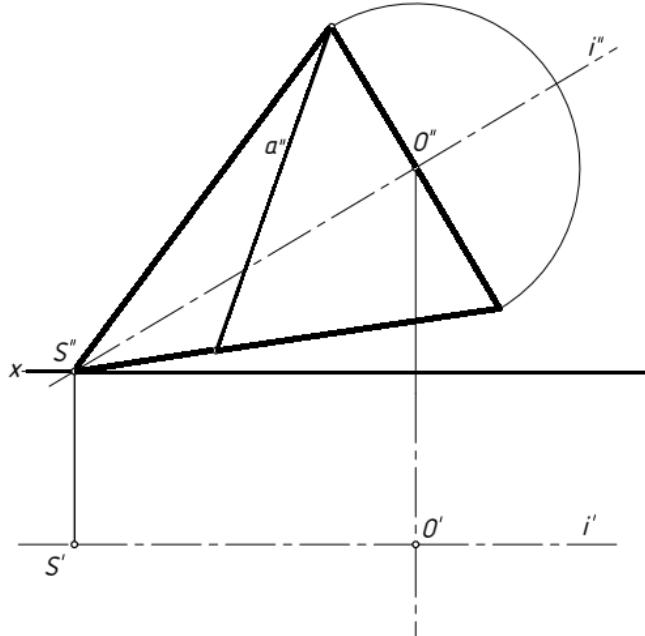
в/



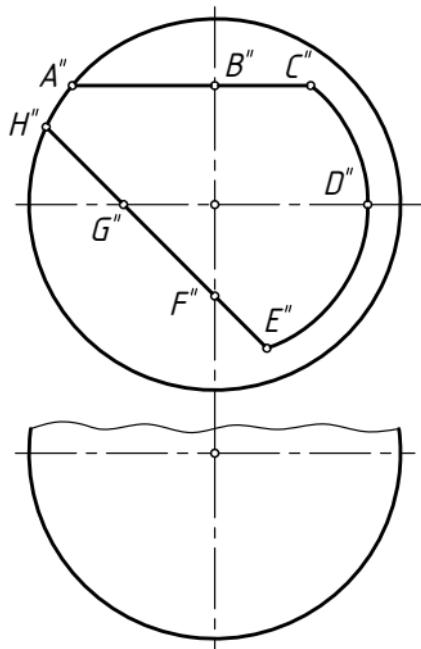
г/



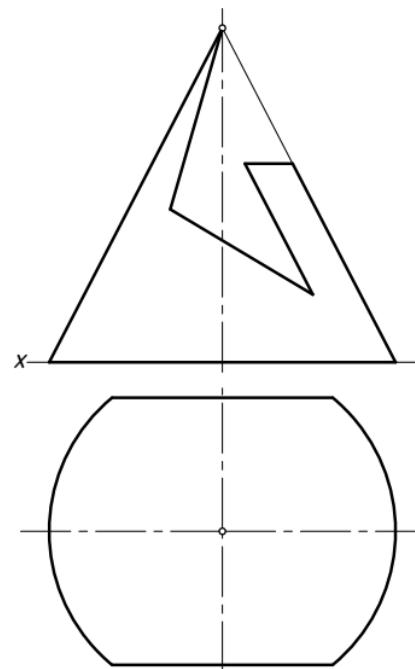
55. Построить горизонтальные проекции конуса вращения и линии *a*, принадлежащей его поверхности.



56. Построить горизонтальные проекции точек и линий, проходящих через эти точки, на поверхности сферы.

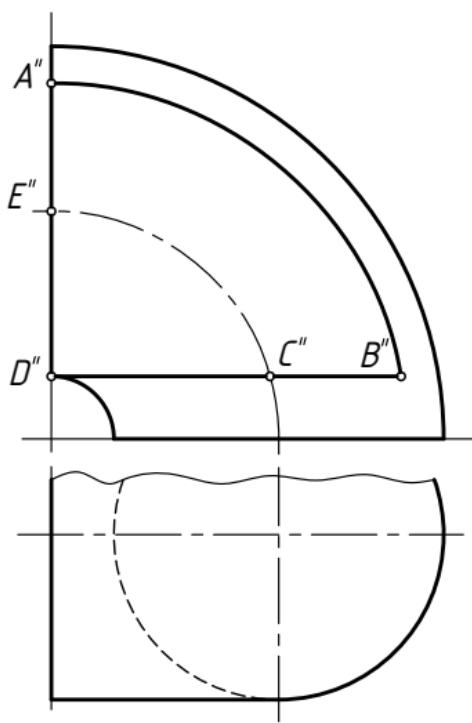


57. Построить недостающие проекции линий среза поверхности конуса заданными проецирующими плоскостями.

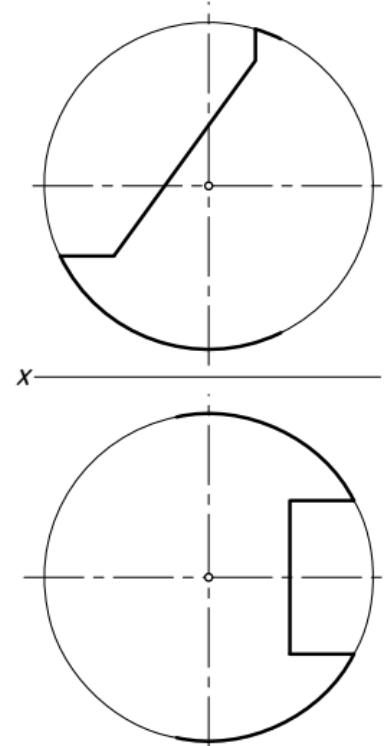


Упражнения для самостоятельного выполнения

1. Построить горизонтальные проекции точек и линий, проходящих через эти точки, на поверхности тора.

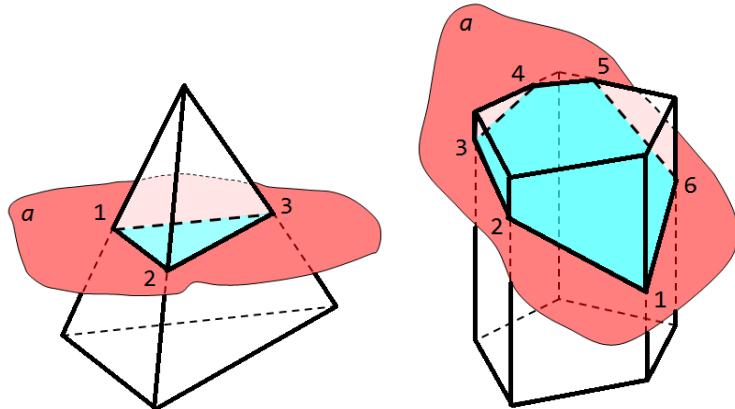


2. Построить недостающие проекции линий среза поверхности шара заданными проецирующими плоскостями.



12. СЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛ ПЛОСКОСТЬЮ

При сечении многогранника плоскостью получается плоская ломанная линия. Для её построения необходимо определить точки пересечения ребер и сторон основания (если она пересекается), а затем соединить построенные линии с учетом видимости (рисунок 22).



α – секущая плоскость

Рисунок 22 – Сечение поверхности многогранника плоскостью

При построении сечения тел вращения плоскостью, таких как цилиндр и конус, необходимо определить множество точек пересечения образующих с заданной плоскостью, при соединении которых получаются плоские кривые линии (исключением является прямоугольник, треугольник) (рисунок 23).

При этом следует определить, в первую очередь, характерные точки линии сечения: точки на очерковых образующих, точки, расположенные на близких и наиболее дальних от плоскости проекции образующих, наивысшие и наименее высокие точки сечения и другие. При их соединении следует учесть видимость.

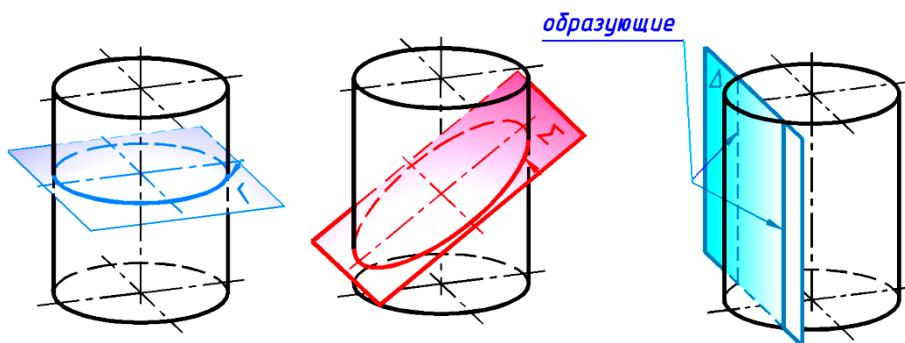


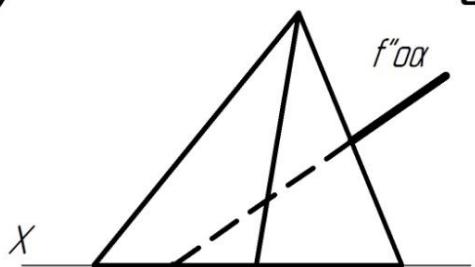
Рисунок 23 - Сечение поверхности цилиндра плоскостью

При построении проекций сечения пирамиды, конуса, шара плоскостью общего положения удобнее всего использовать способ замены плоскостей проекций так, чтобы заданная плоскость стала проецирующей. Тогда на новую плоскость проекций сечение проецируется в линию.

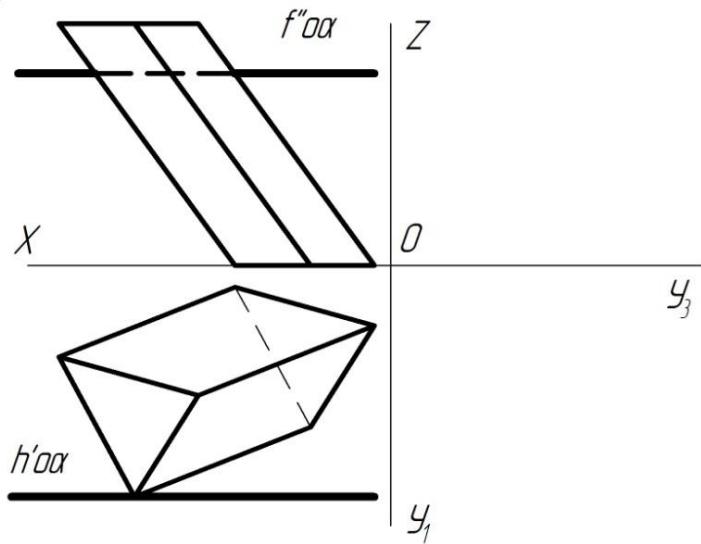
УПРАЖНЕНИЯ

58. Построить проекции линии пересечения тела проецирующей плоскостью и определить натуральную величину сечения методом совмещения.

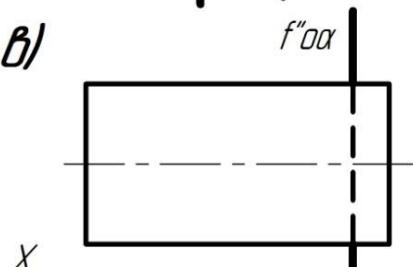
а)



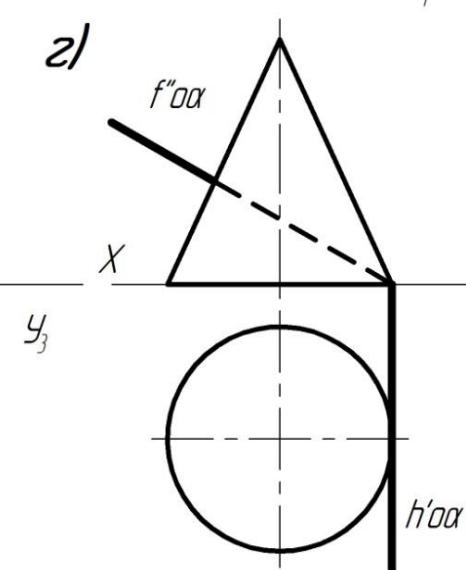
б)



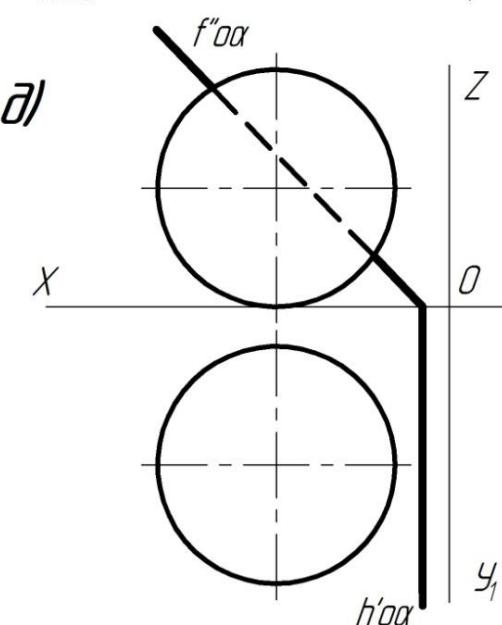
в)



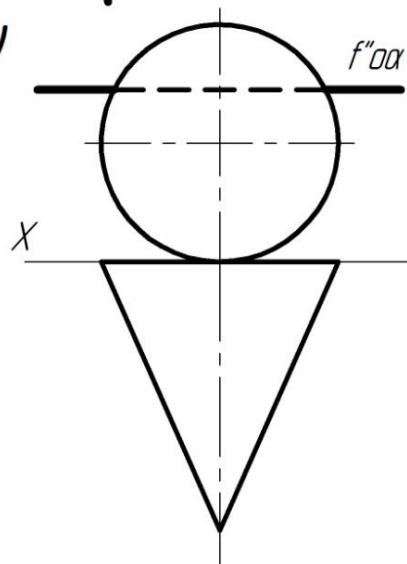
г)



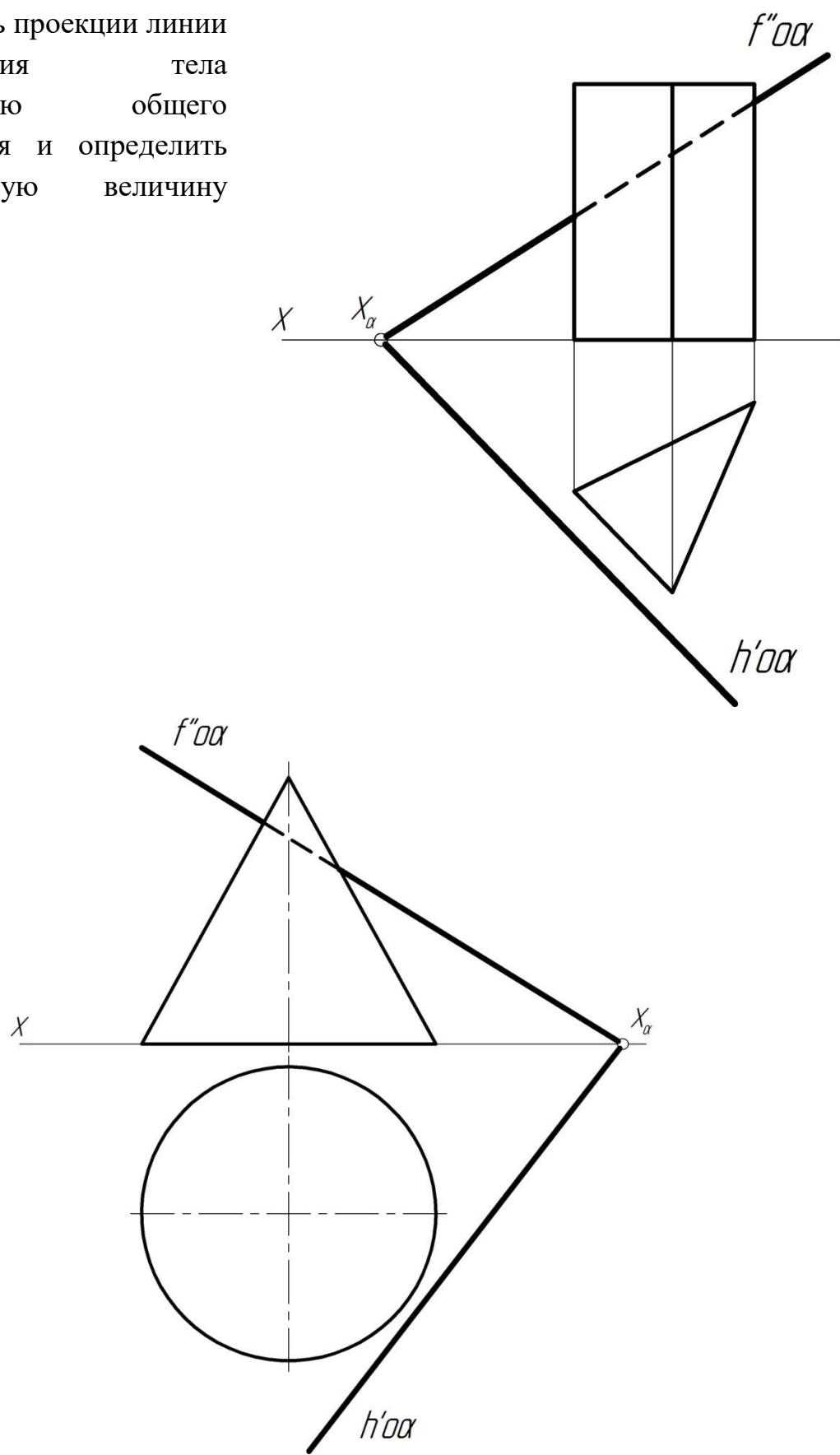
д)



е)

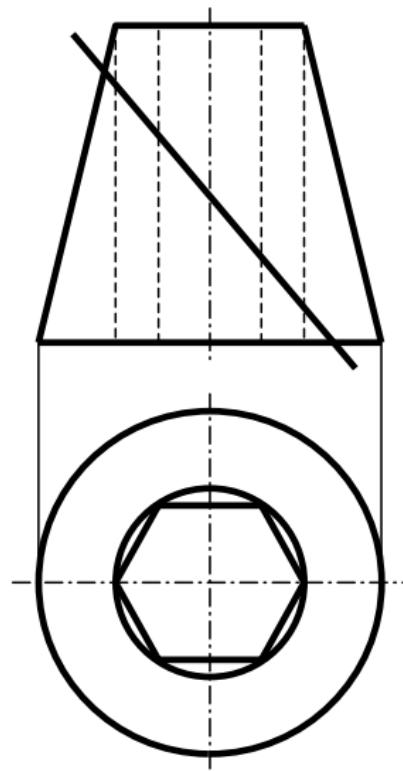


59. Построить проекции линии пересечения тела плоскостью общего положения и определить натуральную величину сечения.

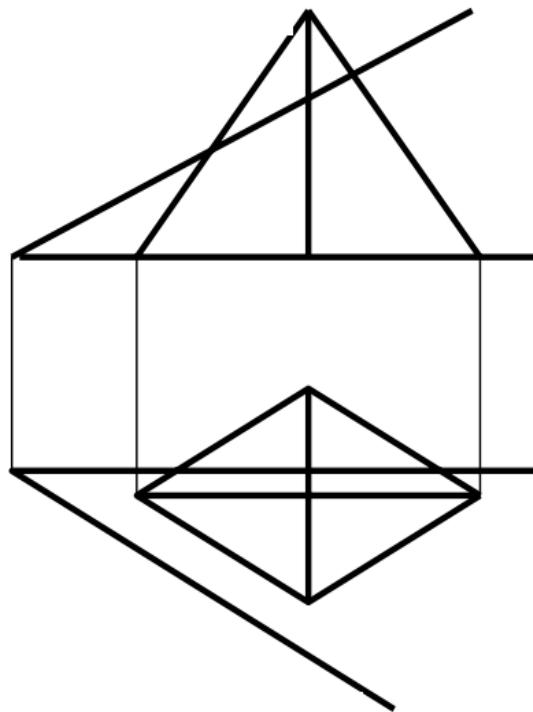


Упражнения для самостоятельного выполнения

1. Построить проекции линии сечения поверхности тела плоскостью частного положения и определить натуральную величину фигуры сечения.



2. Построить проекции линии сечения поверхности тела плоскостью общего положения и определить натуральную величину фигуры сечения.

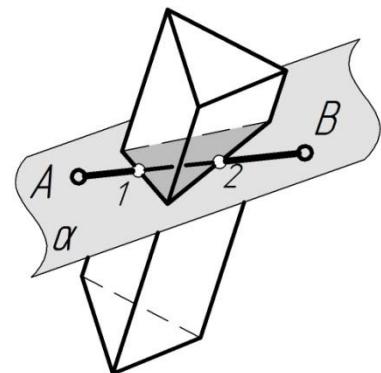


13. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ С ПОВЕРХНОСТЬЮ ТЕЛА

Для определения точек пересечения прямой с поверхностью тела прямую заключают во вспомогательную плоскость.

Причём вспомогательная плоскость должна быть выбрана такой, чтобы сечение заданного тела с этой плоскостью получалось наиболее простейшим (прямоугольник, треугольник, окружность).

Строят линию пересечения поверхности тела с выбранной вспомогательной плоскостью и отмечают искомые точки прокола, как точки пересечения прямой с линией пересечения (рисунок 24).



α – вспомогательная секущая плоскость;

1 и 2 – точки пересечения прямой AB с поверхностью тела

Рисунок 24 – Пересечение прямой с многогранником

Если прямая пересекает многогранник или шар, то её заключают в проецирующую плоскость.

Если задан конус или наклонный цилиндр, то прямую заключают в плоскость общего положения, проходящую на конусе через вершину, а на наклонном цилиндре, проходящим параллельно образующим (рисунок 25).

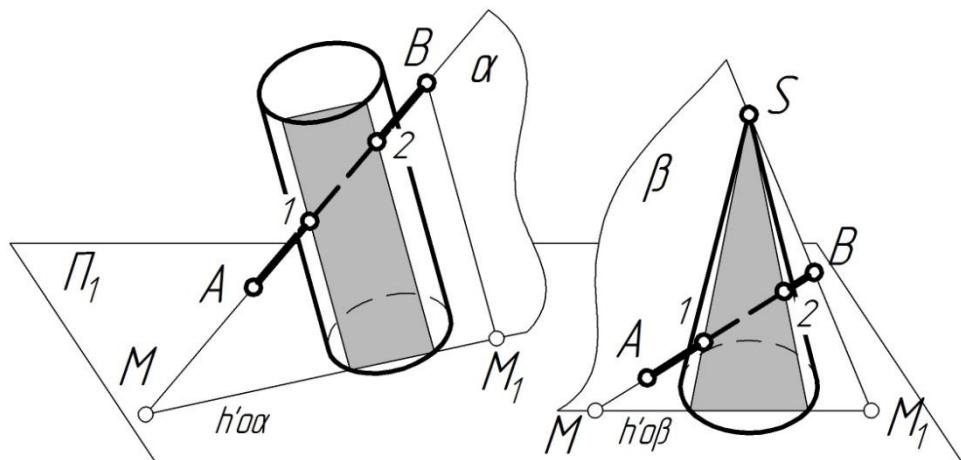


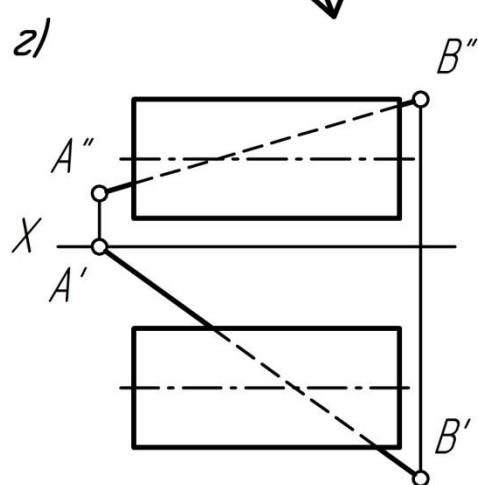
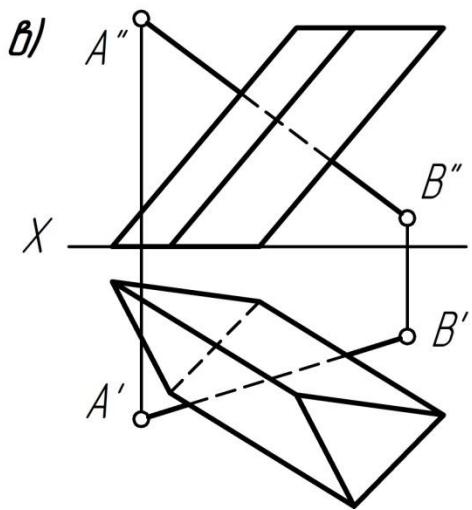
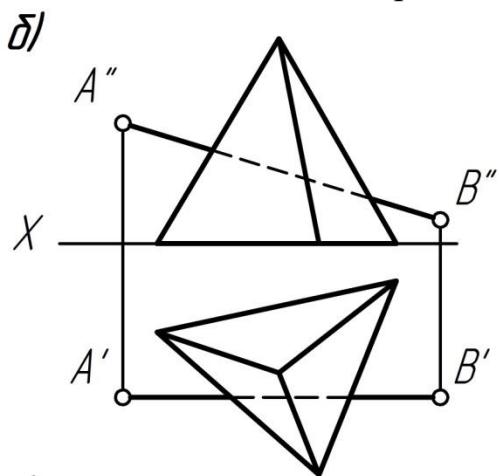
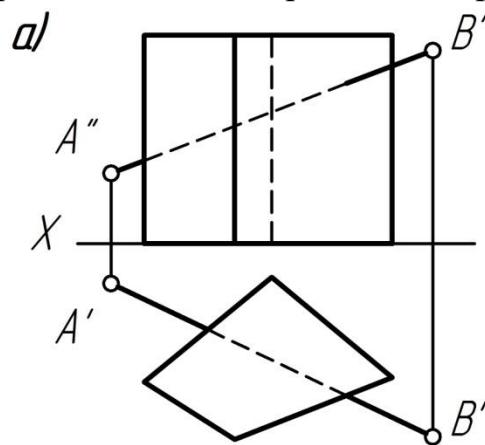
Рисунок 25 – Пересечение прямой с наклонным цилиндром и конусом

Чтобы вспомогательная плоскость рассекала поверхность конуса по треугольнику, она должна включать прямую, проходящую через вершину конуса (прямая SB на рисунке 25).

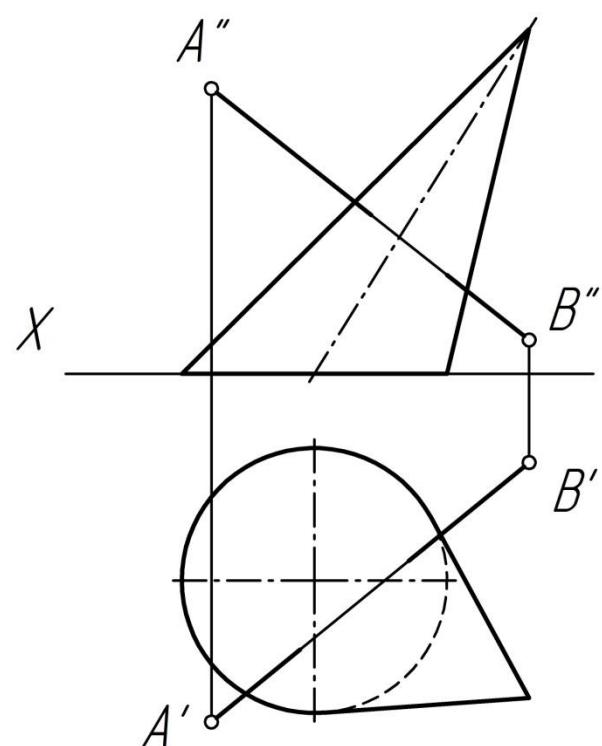
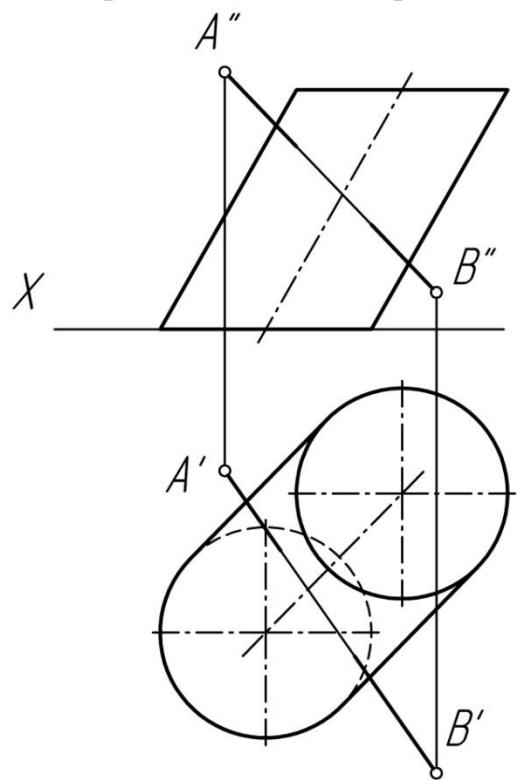
Чтобы вспомогательная плоскость рассекала поверхность цилиндра по прямоугольнику, она должна включать прямую параллельную образующим цилиндра.

УПРАЖНЕНИЯ

60. Определить точки пересечения прямой AB с заданными поверхностями.

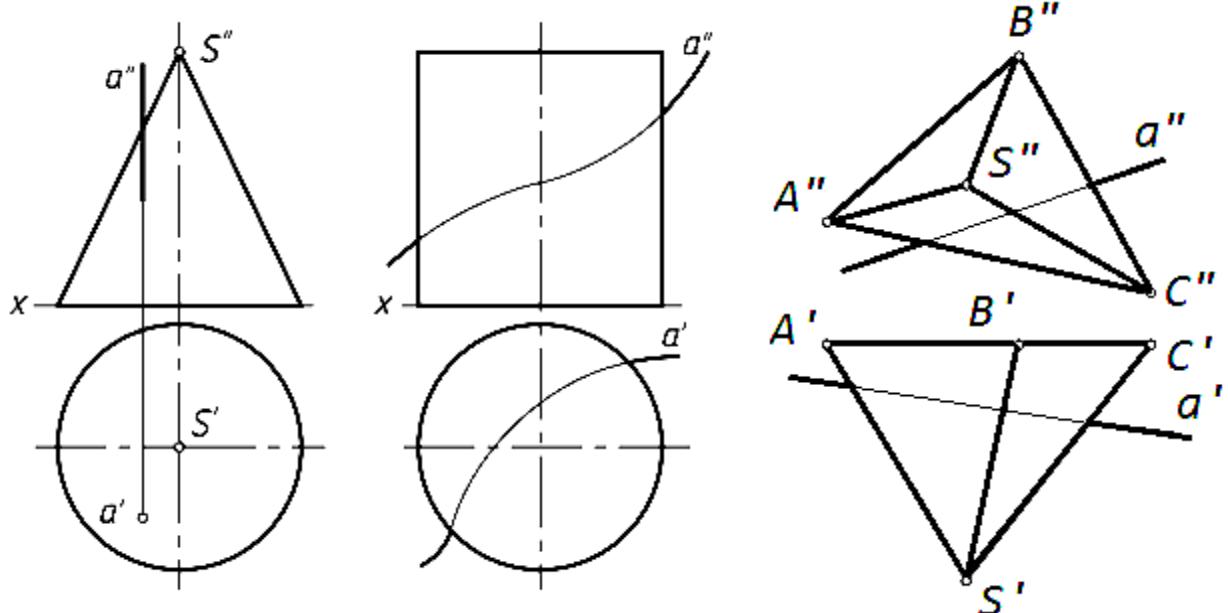


61. Определить точки пересечения прямой AB с поверхностями вращения.

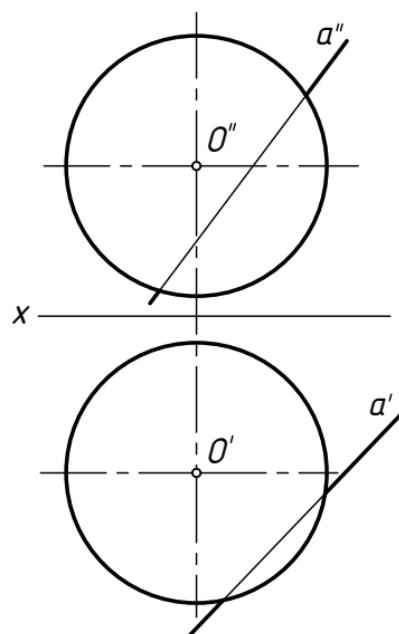


Упражнения для самостоятельного выполнения

1. Построить проекции точек пересечения линии a с заданными поверхностями.



2. Построить проекции точек пересечения прямой a со сферой, применив способ замены плоскостей проекций

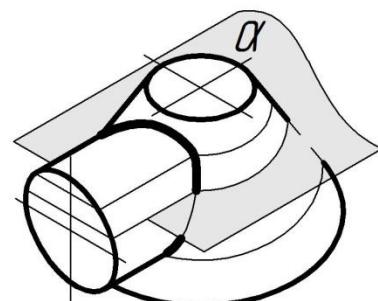


14. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДВУХ ТЕЛ

Линия взаимного пересечения двух тел вращения, как правило, представляет собой пространственную кривую линию.

Для построения линии взаимного пересечения поверхностей двух тел применяют **способ вспомогательных секущих поверхностей**.

В качестве таких поверхностей чаще используют *плоскости частных положений*, а в отдельных случаях *сфера*.



а – вспомогательная секущая плоскость

Рисунок 29 – Пересечение поверхностей двух тел

Сущность этого способа заключается в следующем (рисунок 29):

- заданные поверхности пересекают третьей вспомогательной поверхностью;
- определяют линии пересечения вспомогательной поверхности (плоскости) с каждой из заданных поверхностей в отдельности;
- находят точки пересечения, полученных линий, которые соединяют с учетом видимости.

Применение сфер основано на следующем свойстве поверхностей вращения: *соосные поверхности вращения пересекаются по окружности*.

Соосными называют поверхности вращения, имеющие общую ось.

Например, на рисунке 30 соосные сфера и круговой цилиндр пересекаются по окружности.

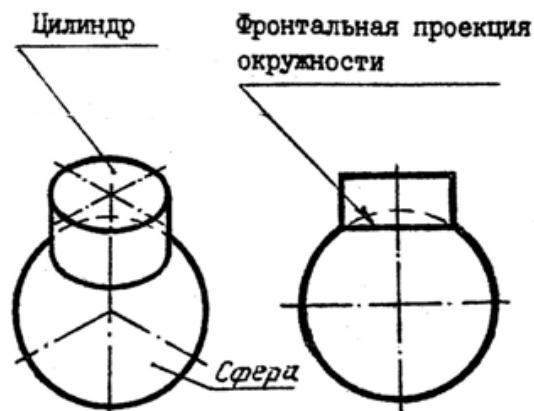


Рисунок 30 – Пересечение соосных поверхностей вращения

Условия для использования способа концентрических сфер (рисунок 30):

- Обе поверхности должны быть поверхностями вращения.
- Оси этих поверхностей должны пересекаться.
- Оси поверхностей должны быть параллельны плоскостям проекций.

Условия применения способа эксцентрических сфер (рисунок 31):

1. Одна из пересекающихся поверхностей - поверхность вращения, а вторая - поверхность с круговыми сечениями (трубчатая или циклическая).

2. Поверхности имеют общую плоскость симметрии.

3. Плоскость симметрии параллельна одной из плоскостей проекций.

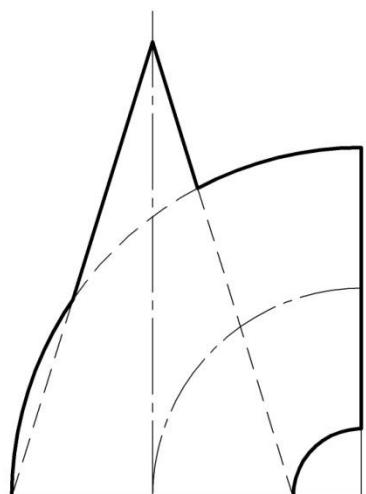
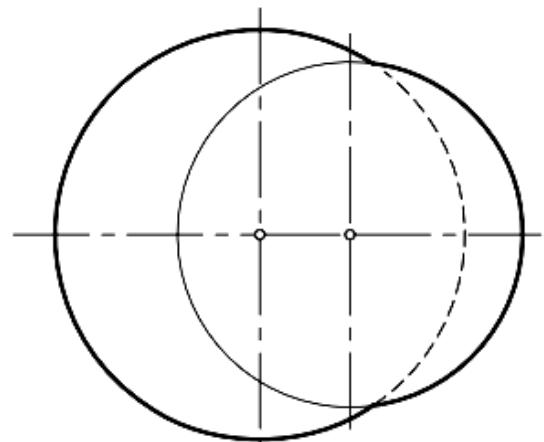
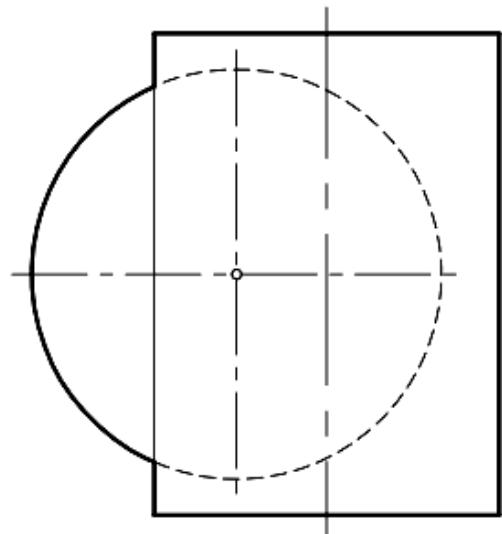
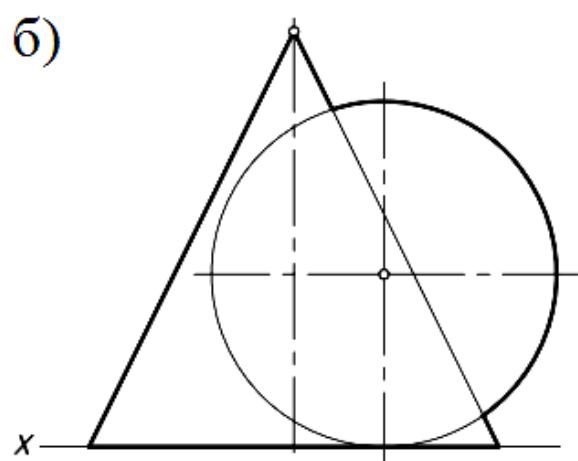
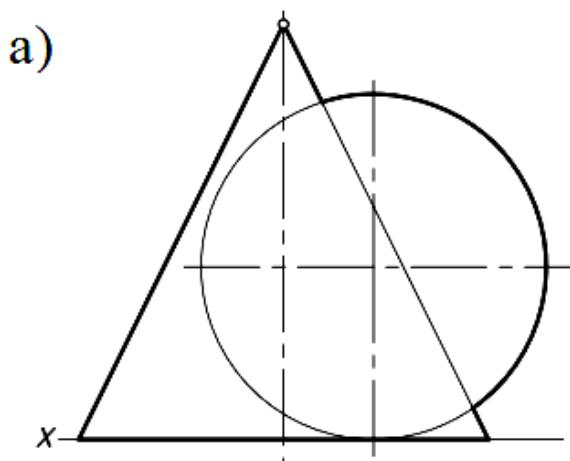
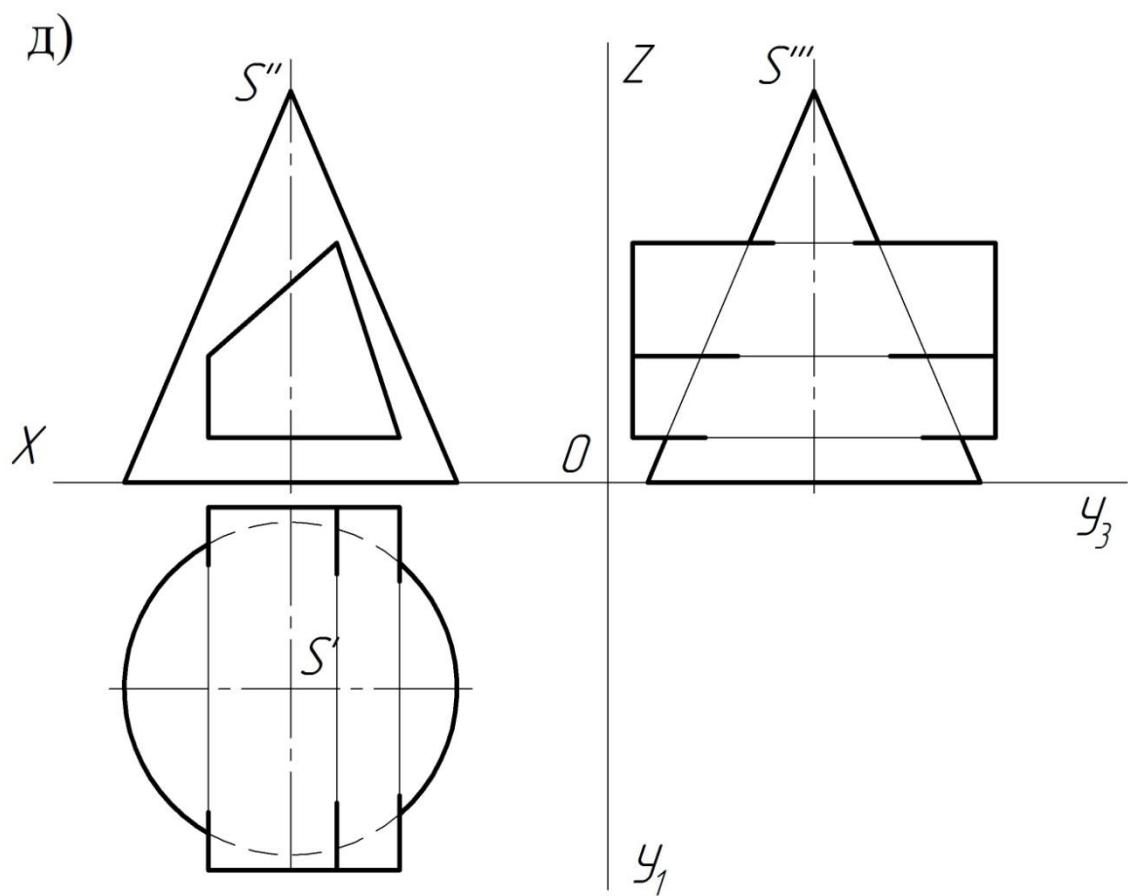
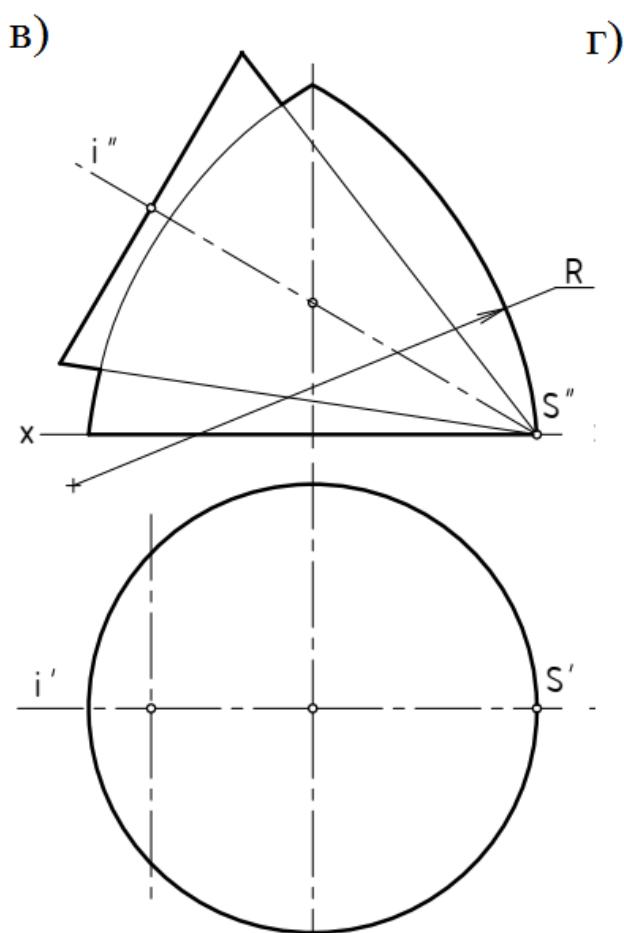


Рисунок 31 – Пересечение несоосных поверхностей вращения

УПРАЖНЕНИЯ

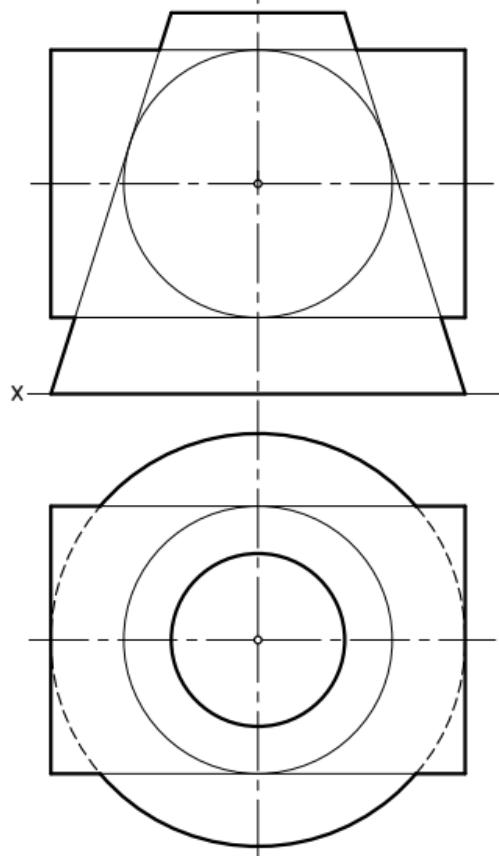
62. Построить проекции линии пересечения поверхностей, заданных тел.



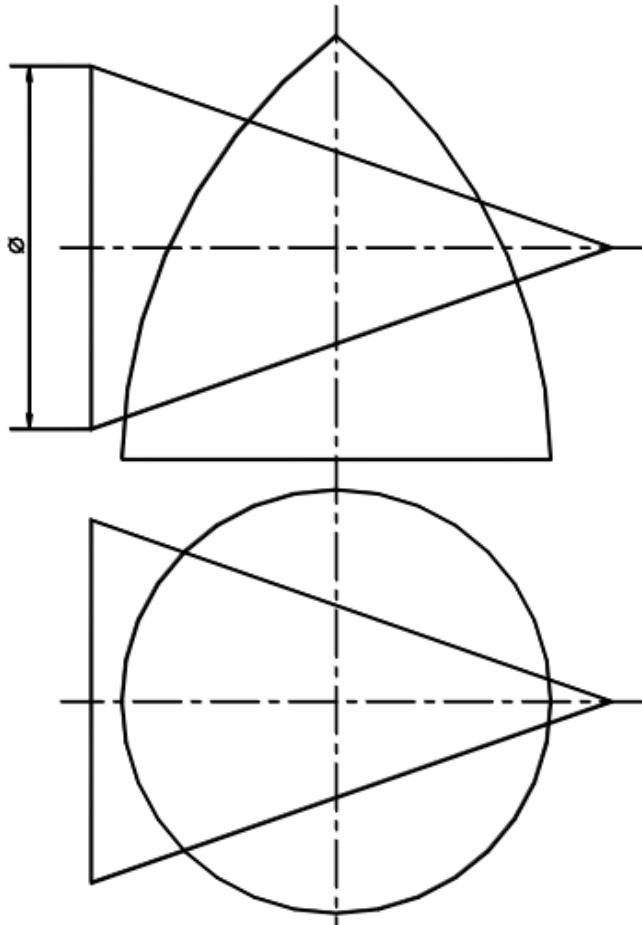


Упражнения для самостоятельного выполнения

1. Построить проекции линий пересечения поверхностей конуса вращения и цилиндра вращения.

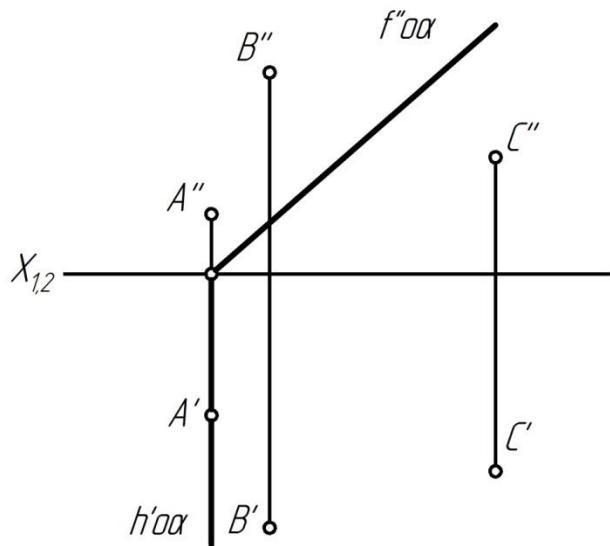


2. Построить линию пересечения поверхностей, используя метод концентрических сфер.

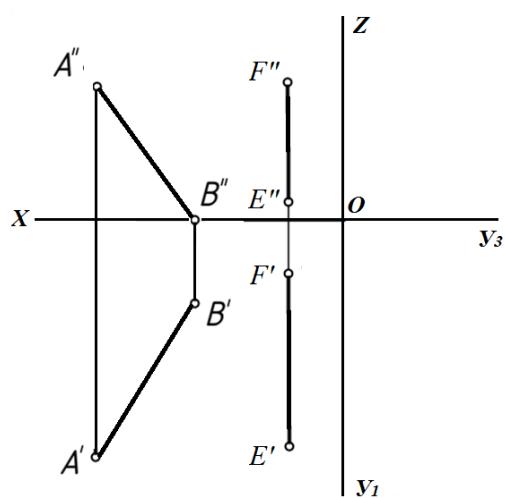


КОМПЛЕКСНЫЕ ЗАДАЧИ

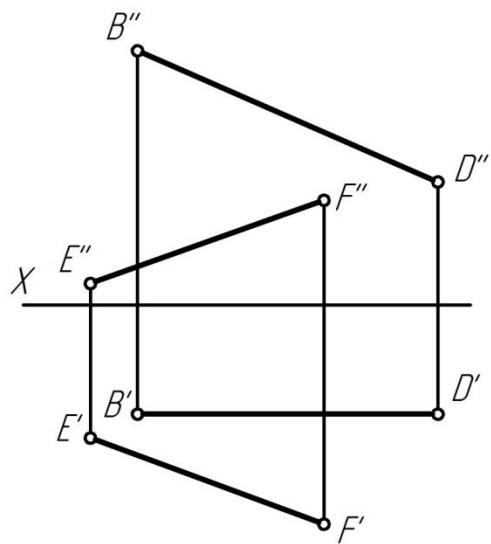
1. Построить точку в плоскости α , равноудаленную от точек A , B и C .



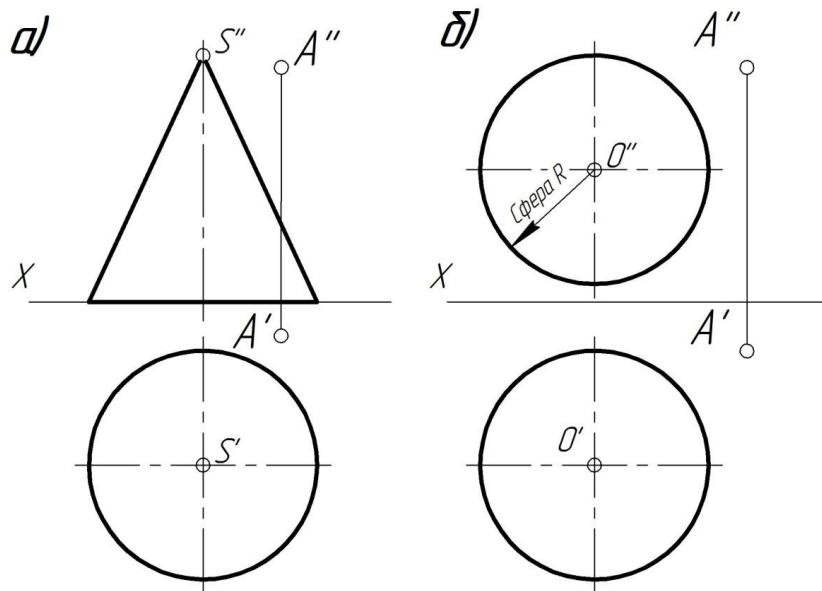
2. Построить шар с центром на прямой EF так, чтобы точки A и B принадлежали его поверхности.



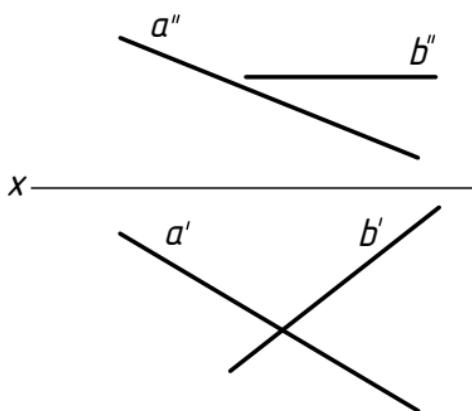
3. Построить ромб $ABCD$, зная, что отрезок BD является одной из его диагоналей, а вершина A должна быть на прямой EF .



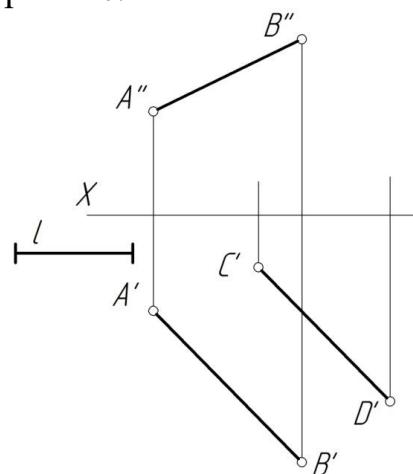
4. Определить расстояние от точки A до ближайшей точки на заданных поверхностях.



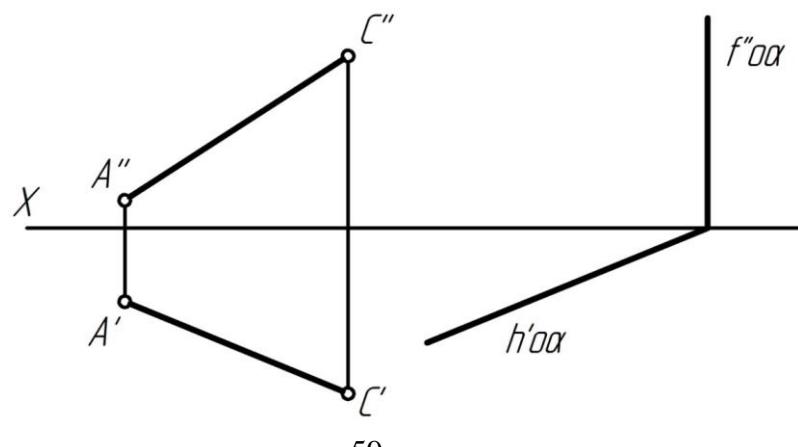
5. Построить проекции точек, принадлежащих прямой a и удаленных от прямой b на 10 мм.



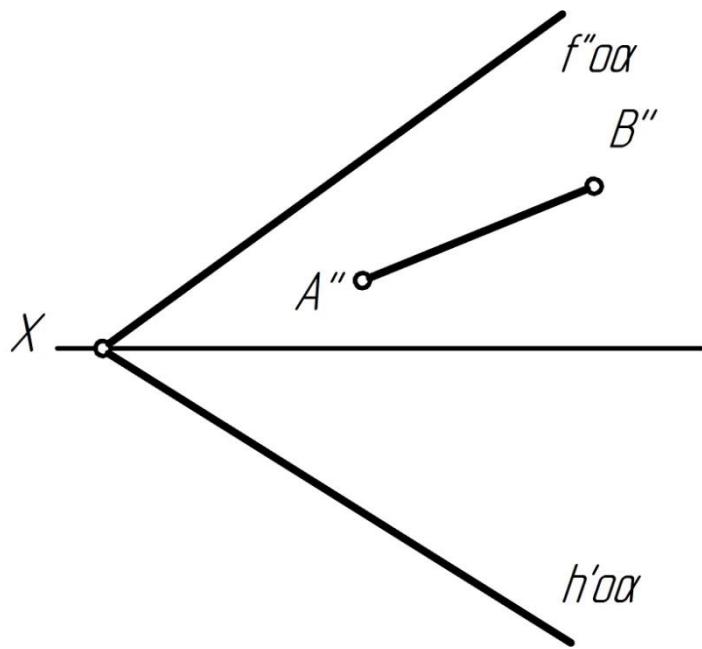
6. Построить недостающую проекцию прямой CD , параллельной прямой AB , если расстояние между ними равно l .



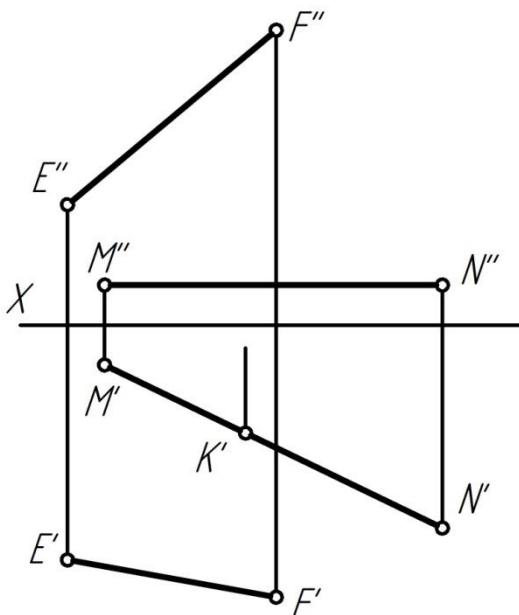
7. Достроить проекции ромба $ABCD$, если диагональ BD параллельна плоскости α , а вершина B лежит в плоскости Π_1 .



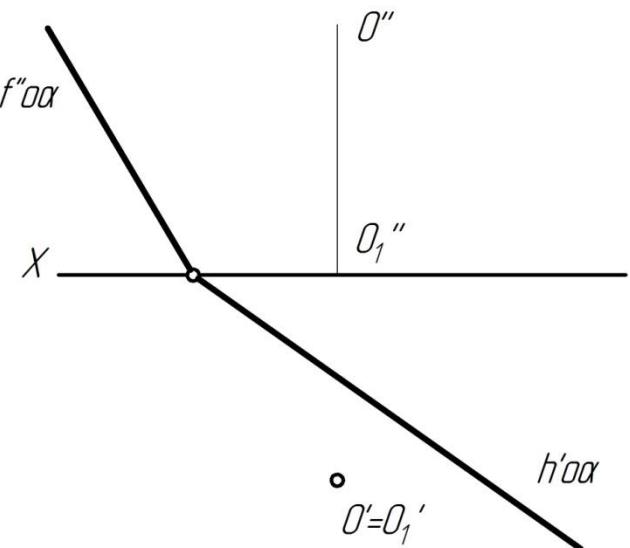
8. В плоскости α построить равнобедренный ΔABC с вершиной C , принадлежащей фронтальному следу плоскости α с основанием AB .



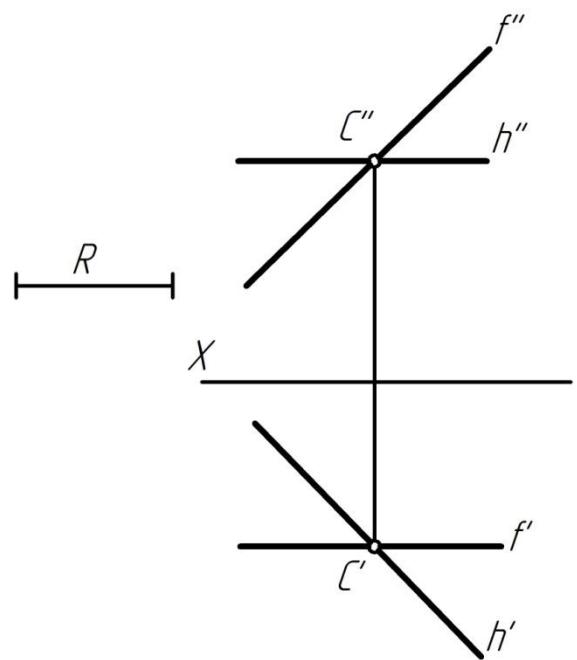
9. Построить равнобедренный треугольник с основанием на прямой MN и вершиной A на прямой EF . Основание BC должно равняться высоте треугольника AK , причем для точки K дана ее горизонт, проекция.



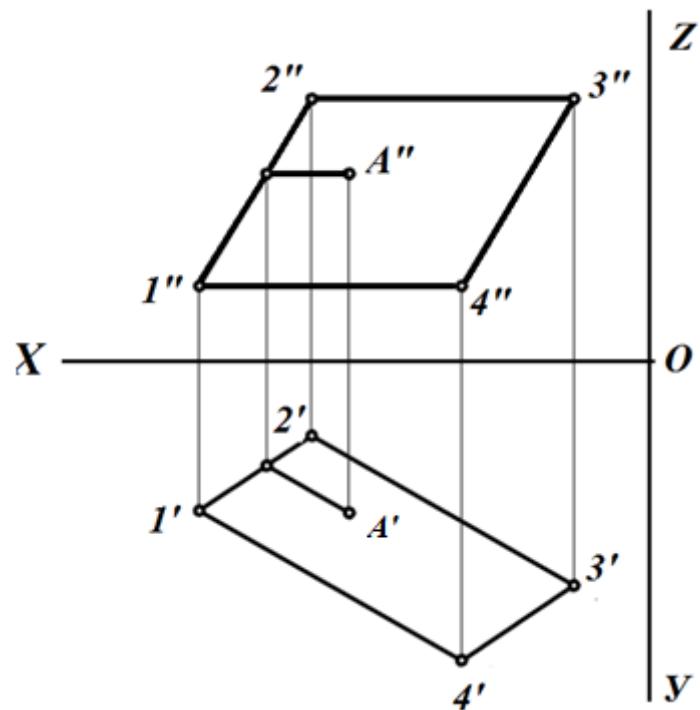
10. Построить проекции правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S (S принадлежит OO_1), одной боковой гранью, принадлежащей плоскости α и основанием, лежащим на плоскости Π_1 .



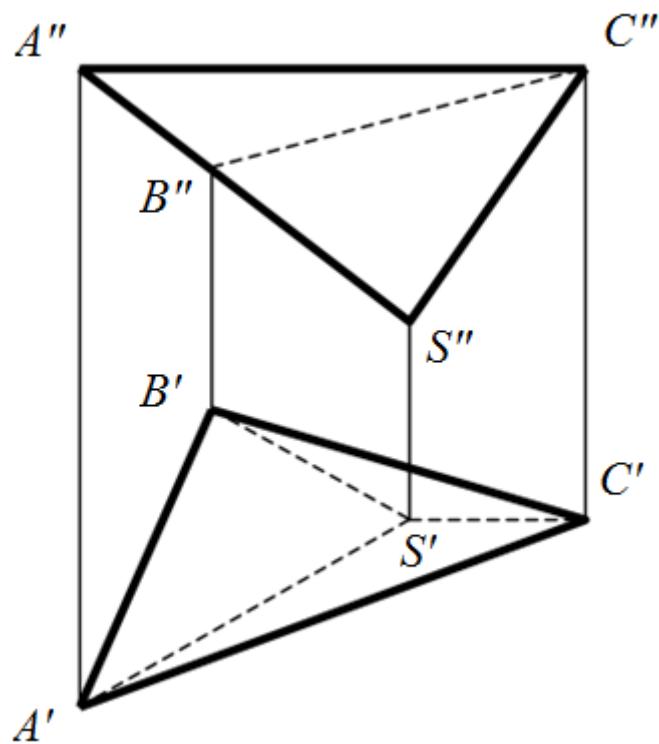
11. Построить проекции окружности, расположенной в плоскости, заданной ее горизонталью h и фронталью f . Известны величина радиуса этой окружности и положение центра — точка C .



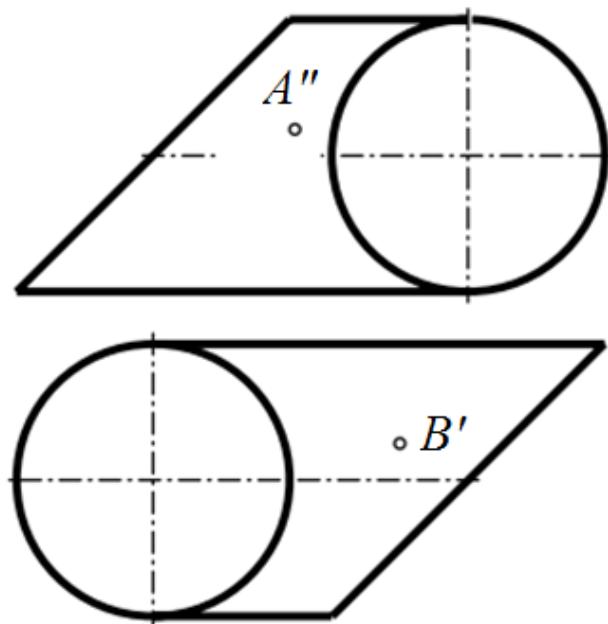
12. Построить правильную треугольную пирамиду $SBCD$ с основанием на плоскости **1-2-3-4** и центром основания в точке A . Угол наклона боковых ребер к основанию равен 60° .



13. Построить развёртку поверхности пирамиды $SABC$.



14. Построить развёртку и определить кратчайшее расстояние между точками A и B , лежащими на поверхности цилиндра.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонова, О.Н. Начертательная геометрия в примерах и задачах: учебное пособие /О.Н. Леонова, Е.А. Разумнова. - 2-е изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2020. - 212 с. - ISBN 978-5-8114-5533-1. - Текст: электронный// Лань: электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/142373> (дата обращения: 22.06.2021).
2. Начертательная геометрия: учебное пособие /В.В. Корниенко, В.В. Дергач, А.К. Толстыхин, И.Г. Борисенко. - 4-е изд., испр. и доп. - Санкт-Петербург: Лань, 2021. - 192 с.
3. Начертательная геометрия и инженерная графика: учебное пособие /составитель А.В. Косарева. - Иркутск: Иркутский ГАУ, 2019. - 106 с. - Текст: электронный// Лань: электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/143197> (дата обращения: 22.06.2021).
4. Салахов, И.М. Сечение поверхностей плоскостью: Практикум для выполнения лабораторных и самостоятельных работ по начертательной геометрии и инженерной графике /И.М. Салахов, Г.В. Пикмуллин, Т.Н. Вагизов. – Казань: Казанский государственный аграрный университет, 2021. – 20 с.
5. Сборник задач по курсу начертательной геометрии: Учеб. пособие для втузов /Под ред. Ю.Б. Иванова. – 7-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2000. – 320 с.: ил.
6. Фролов, С.А. Сборник задач по начертательной геометрии: учебное пособие /С.А. Фролов. - 3-е изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2021. - 192 с. - ISBN 978-5-8114-0804-7. - Текст: электронный// Лань: электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/167707> (дата обращения: 08.10.2021).
7. Яхин, С.М. Взаимное пересечение плоских фигур: Практикум для выполнения лабораторных и самостоятельных работ. /С.М. Яхин, Г.В. Пикмуллин, Р.Х. Гайнутдинов. - Казань: Казанский государственный аграрный университет, 2019. – 16 с.
8. Пикмуллин, Г.В. Пересечение поверхностей двух тел: Практикум для выполнения лабораторных и самостоятельных работ по дисциплине «Начертательная геометрия и инженерная графика» /Г.В. Пикмуллин, Т.Н. Вагизов, Р.Р. Ахметзянов. – Казань: Казанский государственный аграрный университет, 2022. – 32 с.
9. Салахов, И.М. Геометрические построения: Практикум для выполнения лабораторных и самостоятельных работ по начертательной

геометрии и инженерной графике / И.М. Салахов, Г.В. Пикмуллин, Т.Н. Вагизов. – Казань: Казанский государственный аграрный университет, 2021. – 28 с.

10. Яхин, С.М. Виды. Построение трех видов и аксонометрии по модели: Практикум для выполнения лабораторных и самостоятельных работ / С.М. Яхин, Г.В. Пикмуллин, Р.Х. Гайнутдинов. – Казань: Казанский государственный аграрный университет, 2020. – 16 с.