МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Физика и математика»

ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

Казань - 2023

УДК 517
ББК 22.1

Составители: к.т.н., доцент кафедры «Физика и математика» Зиннатулллина А.Н., к.с.-х.н., доцент кафедры «Физика и математика» Киселева Н.Г., д.т.н., профессор кафедры «Физика и математика» Ибятов Р.И.

Рецензенты:

Иванов В.В. - к.т.н., зам. директора по научной работе ООО «НПП ЭкоЭнергоМаш»,

Газетдинов М.Х. – д.э.н., профессор кафедры «Экономика и информационные технологии» ФГБОУ ВО Казанский ГАУ.

Практикум по дисциплине «Математическое моделирование» утвержден и рекомендован к печати на заседании кафедры «Физика и математика» ФГБОУ ВО Казанский ГАУ «9» ноября 2022 года (протокол № 4).

Практикум обсужден, одобрен и рекомендован к печати на заседании методической комиссии Института механизации и технического сервиса ФГБОУ ВО Казанский ГАУ «29» декабря 2022 года (протокол № 4).

Зиннатуллина, А.Н. Практикум по дисциплине «Математическое моделирование» / А.Н. Зиннатуллина, Н.Г. Киселева, Р.И. Ибятов. – Казань: Изд-во Казанского ГАУ, 2023. – 100 с.

Практикум по дисциплине «Математическое моделирование» предназначен студентам очной и заочной форм обучения всех направлений подготовки Казанского ГАУ. Содержит краткие теоретические сведения, разобранные примеры решения задач, задания для самостоятельной работы, типовые тестовые задания.

УДК 517
ББК 22.1

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

В практикуме по дисциплине «Математическое моделирование» рассмотрены виды моделей, приведена классификация видов моделирования, корреляционный и регрессионный анализ. Даны основные понятия линейного программирования, рассмотрен графический метод решения, симплекс метод решения и транспортная задача линейного программирования. Практикум состоит из введения, семи глав и списка литературы. После каждой главы приведены вопросы для самоконтроля, задания для самостоятельной работы и тестовые задания.

Данный практикум способствует формированию общекультурных и профессиональных компетенций обучающихся всех направлений подготовки Казанского ГАУ.

1. МОДЕЛИ. КЛАССИФИКАЦИЯ ВИДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Развитие современной техники в сельском хозяйстве связано с созданием новых и постоянным совершенствованием существующих технологических процессов и машин. Основой их разработки и оптимизации является эксперимент. Заметное повышение эффективности экспериментальных исследований и инженерных разработок достигается использованием математических методов планирования экспериментов (моделирование в агроинжинерии).

Жизнь любого человека сопровождается процессами моделирования и различными моделями. Если кратко охарактеризовать моделирование, то оно заключается в замене реальной системы (процесса, явления) моделью, которая находится с ней (с ними) в некотором соответствии и способна воспроизводить интересующие исследователя свойства или характеристики реальной системы. Безусловно, моделирование является не единственным методом изучения окружающего нас мира. Но роль моделирования в науке, в исследованиях инженерных, организационных, экономических объектов и систем и, вообще, в жизни человека, весьма велика.

При исследовании различных сложных объектов, явлений, процессов, при создании, организации и оптимизации сложных систем метод моделирования является одним из самых мощных методов. Так, перед изготовлением любого технического устройства или сооружения разрабатывается его модель - проект, человек, прежде чем совершить что-либо, обдумывает возможную последовательность действий и возможные последствия этих действий, организуя взаимодействие множества объектов, т.е. организуя деятельность некоторой системы, человек организует систему так, чтобы получить максимальный эффект от деятельности такой системы и т.д.

Причиной все более расширяющегося применения моделей является то, что процессы, происходящие в модели, можно регистрировать, проверять их соответствие результатам теоретического анализа, заменять аналитические расчеты процессов их непосредственным наблюдением, т. е. эффективно решать все основные задачи экспериментального исследования.

Моделирование представляет собой научную дисциплину, в рамках которой изучаются методы построения и использования моделей для познания реального мира.

Методом моделирования называется замена объекта-оригинала объектом-заместителем, обладающим определенным сходством с оригиналом, с целью получения новой информации об оригинале.

Моделью называется объект-заместитель объекта-оригинала, предназначенный для получения информации об оригинале.

Связь (отношение) между объектом реального мира и его моделью можно проиллюстрировать графически с помощью цикла моделирования (рисунок 1).

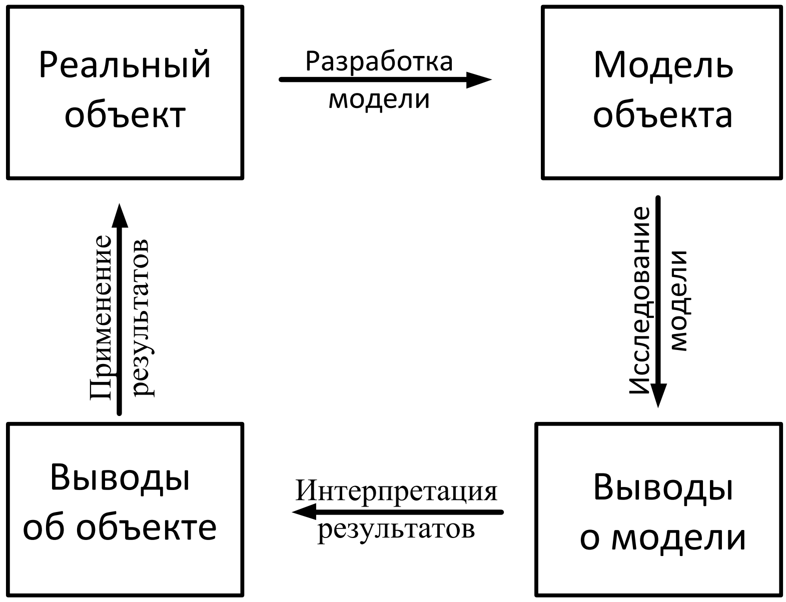


Рисунок 1 - Цикл моделирования

Классификацию видов моделирования и, соответственно, моделей (от лат. modulus – мера, образец) можно проводить по разным признакам: по сфере приложения (области применения), по характеру моделируемых объектов, по степени подробности моделей и т.д.

В этом случае различают две большие группы моделей, относящихся соответственно к материальному и идеальному моделированию (рисунок 2).

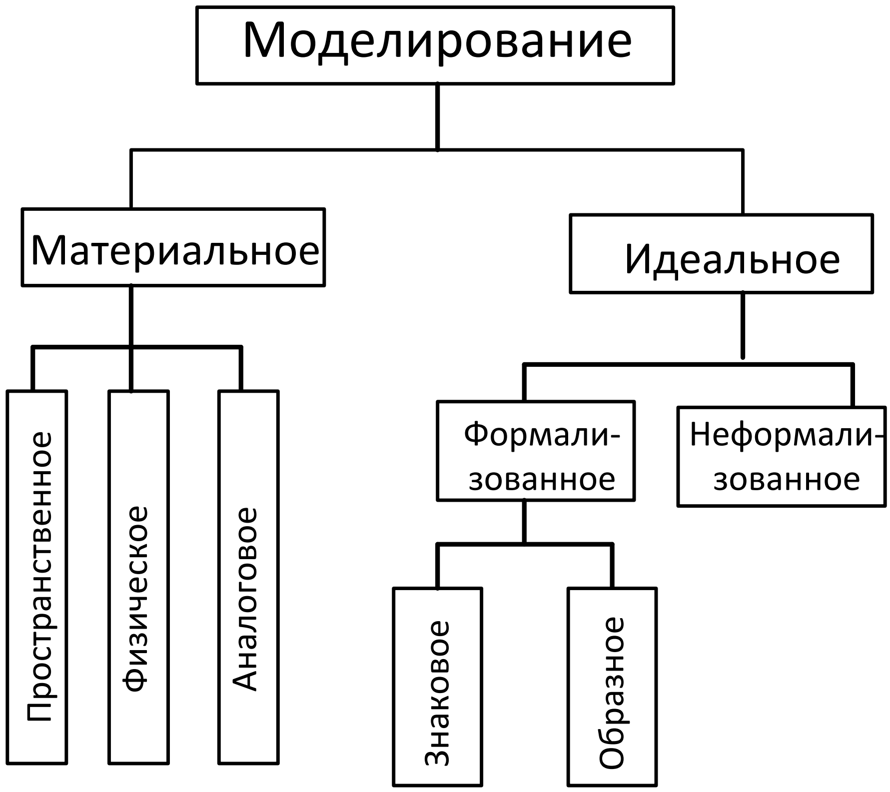


Рисунок 2 - Классификация видов моделирования

Материальное моделирование предполагает наличие связи, имеющей материальный характер, между моделью и исследуемым объектом. В материальном моделировании можно условно выделить три основные группы методов: пространственное, физическое и аналоговое моделирование.

В *пространственном* моделировании используются модели, предназначенные для воспроизведения или отображения пространственных (геометрических) свойств изучаемых объектов. В качестве примеров такой группы моделей можно назвать макеты разнообразных типов (зданий, устройств и т.д.).

В *физическом* моделировании используются модели, предназначенные для воспроизведения динамики процессов, происходящих в изучаемых объектах, причем общность процессов, происходящих в объекте исследования и модели, основывается на сходстве их физической природы. Наиболее известным примером физического моделирования является исследование летательных аппаратов на основе экспериментов в аэродинамической трубе.

В *аналоговом* моделировании используются материальные модели, физическая природа которых отличается от природы исследуемых объектов, но, вместе с тем, они описываются сходными математическими соотношениями, т.е. связь между моделью и объектом основывается на аналогии их математического описания.

Идеальное моделирование принципиально отличается от материального, поскольку оно основывается не на материальной аналогии между моделью и изучаемым объектом, а на идеальной, т.е. мыслимой связи между ними.

В *формализованном моделировании* моделями служат системы знаков или образов, вместе с которыми задаются правила их преобразования и интерпретации.

В *знаковом* (символьном) моделировании в качестве моделей используются системы знаков, которые могут существенно отличаться друг от. Важнейшим видом знакового моделирования является математическое моделирование, при использовании которого модель записывается в виде совокупности формул, преобразуемых на основе правил логики и математики.

Математическое моделирование – частный случай знакового моделирования.

Математическое моделирование – это знаковое моделирование, при котором описание объекта осуществляется на языке математики, а исследования модели проводятся с использованием тех или иных математических методов.

В настоящее время это один из самых результативных и наиболее часто применяемых методов научного познания.

Преимуществами математического моделирования по сравнению с другими видами моделирования являются:

- экономичность, сбережение ресурсов реальной системы;
- возможность моделирования гипотетических, т.е. не реализованных в природе объектов и систем;

- возможность реализации режимов, опасных или трудновоспроизводимых в реальности;

- возможность изменения масштаба времени;

- универсальность технического и программного обеспечения, наличие пакетов прикладных программ для проведения широкого круга работ;

- возможности прогнозирования и выявления общих закономерностей;

- возможности сравнительно простого многофакторного анализа.

Моделирование систем и процессов, исследование различных явлений на моделях стало одним из основных методов изучения сложных технических систем. Существующий аппарат современной математики, мощные средства вычислительной техники, развитые компьютерные технологии обработки информации позволяют успешно решать любые практические задачи, стоящие перед обществом.

В *образном* моделировании при построении модели используются такие наглядные элементы, как упругие шары, потоки жидкости, траектории движения тел.

Неформализованное моделирование – это анализ проблем разнообразного типа, когда модель не формулируется, а вместо нее используется некоторое, не зафиксированное точно, мысленное ощущение реальности, служащее основой для рассуждения и принятия решений.

Можно выделить следующие правила моделирования при исследовании технических систем и технологических процессов.

Первое правило моделирования заключается в привлечении различных специалистов для разработки обобщенной технологии создания и анализа моделей. Необходимость в привлечении специалистов разных профилей обусловлена сложностью и трудоемкостью процесса разработки, исследования и применения моделей.

Второе правило говорит о том, что разработчикам моделей нужно знать как общие законы функционирования технических систем, так и частные соотношения физики, механики и других наук, которые обычно представляются математическими соотношениями.

Третье правило заключается в том, что объективная сложность технических систем и происходящих в них технологических процессов, исключает возможность их всестороннего изучения с помощью одной какой-либо модели.

Итогом процесса моделирования технической системы должно быть создание работающей адекватной модели, удовлетворяющей требованиям заказчика и разработчика.

Математические модели относятся к символьным моделям и представляют собой описание объектов в виде математических символов, формул, выражений. При наличии достаточно точной математической модели можно путем математических расчетов прогнозировать результаты функционирования объекта при различных условиях, выбрать из множества возможных вариантов тот, который дает наилучшие результаты.

Вопросы для самоконтроля

1) Что такое модель и моделирование?
2) Назовите цели моделирования.
3) Какие существуют виды моделирования?
4) Перечислите свойства моделей.
5) Какие формы представления моделей вам известны?
6) Назовите отличие идеального моделирования от материального.
7) Какие модели называют содержательными?
8) Назовите разновидности содержательных моделей.
9) Чем концептуальная модель отличается от содержательной?
10) Какие виды концептуальных моделей вы знаете?
11) По каким классификационным признакам можно подразделять модели?
12) Какие модели в зависимости от способа представления объекта вы знаете?

Тестовые задания

1. Модель, представляющая собой объект, который ведет себя как реальный объект, но не выглядит как таковой — это …
1) ***физическая модель***
2) аналоговая модель
3) типовая модель
4) математическая модель

2. Термин «модель» обычно означает упрощенную реальность или … будущего
1) опровержение
2) доказательство
3) обоснование
4) ***прообраз***

3. При моделировании заменяют …
1) модель на образ
2) образ на модель
3) модель на реальную систему
4) ***оригинал на модель***

4. При математическом моделировании в модели воспроизводятся основные взаимосвязи и закономерности оригинала в … форме.
1) формализованной
2) описательной
3) условной
4) ***математической***

5. При физическом моделировании в модели воспроизводится оригинал с сохранением … сходства.
1) мнимого
2) виртуального
3) геометрического+
4) математического

6. Какой из структурных элементов включает в себя процесс моделирования?
1) ***анализ***
2) модель
3) объект
4) субъект

7. Процесс построения моделей называется…
1) ***моделирование***
2) экспериментирование
3) конструирование
4) проектирование

8. Математическая модель используется в основном для ...
1) применения системы
2) управления системой
3) ***изучения системы***
4) всего перечисленного выше

9. Математическая модель не зависит от ...
1) предложений о поведении моделируемой системы
2) ***средств (языка) описания системы***
3) методов изучения системы
4) обозначений

10. При формализации математической задачи необходимо … моделируемую систему
1) осмыслить
2) ***упростить***
3) детализировать
5) усложнить

11. Любая математическая модель должна (в рамках рассматриваемых гипотез моделирования) быть абсолютно ...
1) точной
2) ***адекватной***
3) идеальной
4) совершенной

12. Моделирование – это …

1) создание моделирующего алгоритма

2) ***замещение одного объекта другим с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала***

3) описание исследуемого объекта с помощью правил и формул.

4) все перечисленные

13. Какое высказывание не является определением модели?

1) Инструмент для прогнозирования последствий при действии входных сигналов на объект

2) ***Метод, повышающий эффективность суждений и интуиции специалистов***

3) Точная копия объекта, отображающая все свойства объекта.

4) Представление объекта в некоторой форме, отличной от реального существования.

14. Закончите предложение: «Объект, который используется в качестве «заместителя», представителя другого объекта с определенной целью, называется …»

1) ***моделью***

2) копией

3) предметом

4) оригиналом

15.Закончите предложение: «Модель, по сравнению с объектом-оригиналом, содержит …»

1) ***меньше информации***

2) столько же информации

3) больше информации

4) ноль информации.

16. Моделирование — это:

1) ***процесс замены реального объекта (процесса, явления) моделью, отражающей его существенные признаки с точки зрения достижения конкретной цели***

2) процесс демонстрации моделей одежды в салоне мод

3) процесс неформальной постановки конкретной задачи

процесс замены реального объекта (процесса, явления) другим материальным или идеальным объектом

4) процесс выявления существенных признаков рассматриваемого объекта

17. Процесс построения модели, как правило, предполагает:

1) описание всех свойств исследуемого объекта

2) ***выделение наиболее существенных с точки зрения решаемой задачи свойств объекта***

3) выделение свойств объекта безотносительно к целям решаемой задачи

описание всех пространственно-временных характеристик изучаемого объекта

4) выделение не более трех существенных признаков объекта

18. Модель есть замещение изучаемого объекта другим объектом, который отражает:

1) все стороны данного объекта

2) некоторые стороны данного объекта

3) ***существенные стороны данного объекта***

4) несуществующие стороны данного объекта

19. К моделированию нецелесообразно прибегать, когда

1) создание объекта чрезвычайно дорого

2) процесс очень медленный

3) ***не определены существенные свойства исследуемого объекта***

4) исследование самого объекта приводит к его разрушению

20. Наиболее важным свойством модели является…

1) ее наглядность

2) ***адекватность моделируемому объекту***

3) конечность числа возможных состояний моделируемого объекта

4) ее сложность

21. Определение целей моделирования осуществляется на этапе

1) разработки математической модели;

2) разработки концептуальной модели;

3) ***постановки задач***

4) разработки имитационной модели.

22. Какой модели быть не может?

1) вещественной, физической

2) ***идеальной, физической***

3) вещественной, математической

4) идеальной, математической

2. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Все явления и процессы, которые существуют в природе и обществе, взаимосвязанные. Изучение взаимосвязей – важная задача статистики, которую она решает с помощью особых методов.

Корреляционный анализ – раздел математической статистики, изучающий тесноту связи между признаками (между двумя признаками при парной связи и между результативным и множеством факторных признаков при многофакторной связи).

Целью корреляционного анализа является оценка тесноты связи между признаками.

Виды взаимосвязей между признаками:

- функциональная;
- корреляционная.

При ***функциональной*** связи каждому возможному значению одной переменной $\boldsymbol{x}$ соответствует четко определенное значение другой переменной $\boldsymbol{y}$.

$$
\begin{aligned}
&x_1 \to y_1;\\
&x_2 \to y_2;\\
&x_3 \to y_3;\\
&x_4 \to y_4;\\
&\dots\\
&x_n \to y_n.
\end{aligned}
$$

Обозначается $y = f(x)$. *Например*, в функции $y = 2x$ (рисунок 3) каждому значению x соответствует в два раза большее значение y.

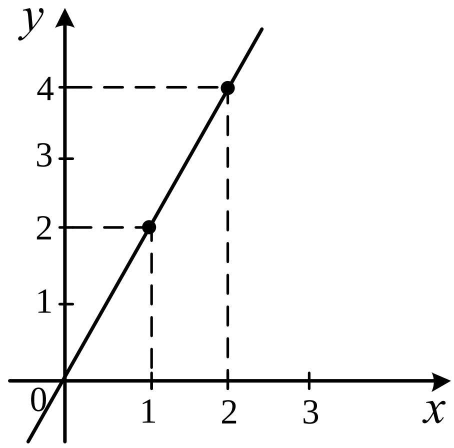


Рисунок 3 – График функциональной связи

Но такого рода функциональные (однозначные) связи между переменными величинами встречаются не всегда. *Например*, при одном и том же росте масса различных индивидуумов может быть различна (рисунок 4).

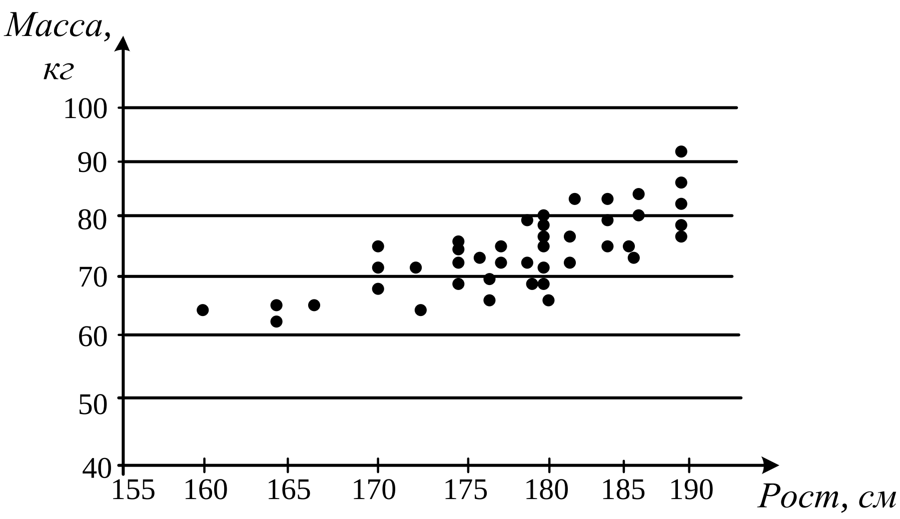


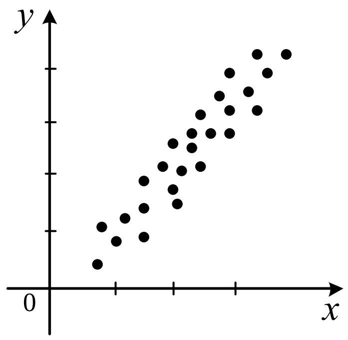
Рисунок 4 – График корреляционной связи

В данном случае, можно и целесообразно вести речь о ***среднем значении*** массы индивидуумов.

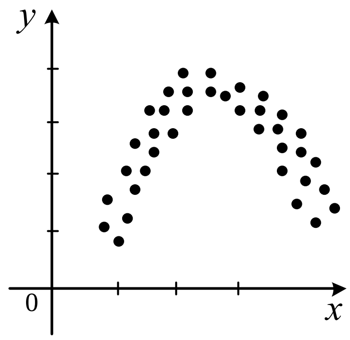
Корреляционная зависимость – это статистическая зависимость, проявляющаяся в том, что при изменении одной из величин изменяется среднее значение другой: $\overline{y} = f(x)$.

Виды корреляционных связей:

- по форме может быть прямолинейной или криволинейной;

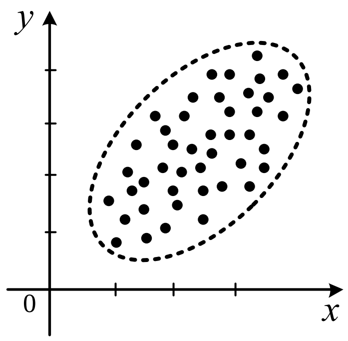


а) прямолинейная связь

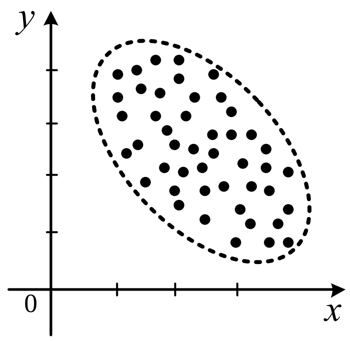


б) криволинейная связь

- по направлению может быть положительной («прямой») и отрицательной («обратной»);



а) положительная связь



б) отрицательная связь

Линейной называется связь, которая графически изображается прямой линией.

Нелинейной (криволинейной) называется связь, которая графически изображается любой другой линией, кроме прямой (гиперболой, параболой и т.д.)

Связь называется **положительной («прямой»)**, если при увеличении одного параметра второй тоже увеличивается.

Связь называется **отрицательной («обратной»),** если при увеличении одного параметра второй уменьшается.

Математической мерой корреляции двух случайных величин служит коэффициент корреляции. Обозначается символом ***r***. Коэффициент корреляции ***r*** характеризует величину, отражающую степень взаимосвязи двух переменных между собой. Он может варьировать в пределах от -1 (отрицательная корреляция) до +1 (положительная корреляция). В зависимости от того, насколько ***r*** приближается к 1, различают связи:

$0{,}91 \le |\boldsymbol{r}| < 1$ очень сильная связь;

$0{,}71 \le |\boldsymbol{r}| < 0{,}9$ сильная связь;

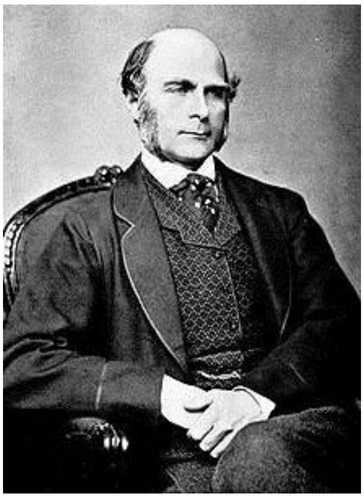
$0{,}51 \le |\boldsymbol{r}| < 0{,}7$ значительная связь;

$0{,}31 \le |\boldsymbol{r}| < 0{,}5$ умеренная связь;

$|\boldsymbol{r}| < 0{,}3$ связь очень слабая.

Если коэффициент корреляции равен 0, то это говорит об отсутствии корреляционных связей между переменными.

Термин «корреляция» был введен в науку выдающимся английским естествоиспытателем Ф. Гальтоном в 1886 г. Однако точную формулу для подсчёта коэффициента корреляции разработал его ученик Карл Пирсон.



Фрэнсис Гальтон
(Francis Galton)

Карл Пирсон
(Karl (Carl) Pearson)

Коэффициент корреляции характеризует наличие только линейной связи между признаками, обозначаемыми, как правило, символами *X* и *Y*. Формула расчёта коэффициента корреляции построена таким образом, что, если связь между признаками имеет линейный характер, коэффициент Пирсона точно устанавливает тесноту этой связи. Поэтому он называется также коэффициентом линейной корреляции Пирсона. Если же связь между переменными *X* и *Y* не линейна, то Пирсон предложил для оценки тесноты этой связи так называемое корреляционное отношение.

Величина коэффициента линейной корреляции Пирсона не может превышать +1 и быть меньше, чем –1. Эти два числа +1 и –1 являются границами для коэффициента корреляции. Если при расчёте получается величина, большая +1 или меньшая –1, то произошла ошибка в вычислениях.

Знак коэффициента корреляции очень важен для интерпретации полученной связи. Если знак коэффициента линейной корреляции положительный, то связь между коррелирующими признаками такова, что большей величине одного признака (переменной) соответствует большая величина другого признака (другой переменной). Иными словами, если один показатель (переменная) увеличивается, то соответственно увеличивается и другой показатель (переменная). Такая зависимость носит название прямой зависимости.

Если же коэффициент корреляции отрицателен, то большей величине одного признака соответствует меньшая величина другого. Иначе говоря, при наличии знака минус увеличению одной переменной (признака, значения) соответствует уменьшение другой переменной. Такая зависимость носит название обратной зависимости.

При линейной зависимости между признаками коэффициент корреляции определяется методом квадратов (метод Пирсона):

1) определить для каждого вариационного ряда средние значения $\overline{x}$ и $\overline{y}$;

2) найти отклонения $(x-\overline{x})$ и $(y-\overline{y})$ каждого числового значения от среднего значения своего вариационного ряда;

3) полученные отклонения перемножить и суммировать;

4) каждое отклонение возвести в квадрат и суммировать по каждому ряду.

Подставить полученные значения в формулу расчета коэффициента корреляции:

$$r = \frac{\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sqrt{\sum(x-\overline{x})^2\sum(y-\overline{y})^2}}.$$

Ошибка коэффициента корреляции. Значимость линейного коэффициента корреляции проверяется на основе величины ошибки коэффициента корреляции m_r:

$$m_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}},$$

где n – число парных вариант.

Оценка значимости коэффициента корреляции. Оценка значимости коэффициента корреляции проводится по критерию Стьюдента путем сравнения его значения с величиной случайной ошибки:

$$t_r = \frac{r}{m_r}.$$

Статистика t_r подчиняется распределению Стьюдента с числом степени свободы $\nu = n-2$. Из таблицы распределения критерия Стьюдента (Приложение 1) находят критическое значение $t_{кр} = t(\alpha,\nu)$.

Если $|t_r| > t_{кр}$, то параметр *r* статистически значим. В противном случае ($|t_r| < t_{кр}$) параметр *r* статистически незначим.

Задача. Найти коэффициент корреляции по данным *n* = 10 наблюдений, которые получены при изучении зависимости между ростом (*X*, см) и массой (*Y*, кг) некоторых животных:

x	31	32	33	34	35	36	40	41	42	46
y	7,8	8,3	7,6	9,1	9,6	9,8	11,8	12,1	14,7	13,0

Решение. Составим расчетную вспомогательную таблицу:

№	x_i	y_i	$(x_i-\bar{x})$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(y_i-\bar{y})$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$
1	31	7,8	-6	36	-2,58	6,6564	15,48
2	32	8,3	-5	25	-2,08	4,3264	10,4
3	33	7,6	-4	16	-2,78	7,7284	11,12
4	34	9,1	-3	9	-1,28	1,6384	3,84
5	35	9,6	-2	4	-0,78	0,6084	1,56
6	36	9,8	-1	1	-0,58	0,3364	0,58
7	40	11,8	3	9	1,42	2,0164	4,26
8	41	12,1	4	16	1,72	2,9584	6,88
9	42	14,7	5	25	4,32	18,6624	21,6
10	46	13,0	9	81	2,62	6,8644	23,58
Σ	370	103,8	-	222	-	51,796	99,3

Вычислим: $\bar{x} = \frac{370}{10} = 37$, $\bar{y} = \frac{103{,}8}{10} = 10{,}38$.

Подставляем в формулу:

$$r = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2\sum(y-\bar{y})^2}} = \frac{99{,}3}{\sqrt{222\cdot 51{,}796}} = \frac{99{,}3}{107{,}232} = 0{,}926.$$

Вывод: связь положительная (прямая, т.е. чем больше рост животных, тем больше у них масса), очень тесная.

Ошибка коэффициента корреляции. Значимость линейного коэффициента корреляции проверяется на основе величины ошибки коэффициента корреляции m_r:

$$m_r = \sqrt{\frac{1-0{,}926^2}{10-2}} = 0{,}1335.$$

Оценка значимости коэффициента корреляции. Оценка значимости коэффициента корреляции проводится по критерию Стьюдента путем сравнения его значения с величиной случайной ошибки:

$$t_r = \frac{r}{m_r} = \frac{0{,}926}{0{,}1335} = 6{,}94.$$

Статистика t_r подчиняется распределению Стьюдента с числом степени свободы $\nu = n - 2$.

Из таблицы распределения критерия Стьюдента находят критическое значение $t_{кр} = t(\alpha, \nu)$=2,31.

Так как $|t_r| > t_{кр}$, то параметр *r* статистически значим.

Вопросы для самоконтроля

1) Дайте определение функциональной связи.
2) Дайте определение корреляционной связи.
3) Приведите примеры прямой и обратной корреляционной связи.
4) Для чего нужен коэффициент корреляции?
5) Напишите формулу для вычисления коэффициента корреляции.
6) Какой ученый вывел точную формулу для подсчета коэффициента?
7) Виды корреляционных связей.
8) В каких границах находятся значения линейного коэффициента корреляции?
9) Укажите размеры коэффициентов корреляции при слабой, средней и сильной связи между признаками.
10) В каких случаях применяется расчет коэффициента корреляции Пирсона?
11) Парный линейный коэффициент корреляции принимает значение равное 0. Что это означает?
12) Парный коэффициент корреляции между переменными равен 1. Что это означает?
13) Парный коэффициент корреляции между переменными равен -1. Что это означает?
14) Какая зависимость между x и y, если линейный коэффициент корреляции отрицательный? Объясните.
15) Какая зависимость между x и y, если линейный коэффициент корреляции положительный? Объясните.

Задания для самостоятельного решения

Вычислить коэффициент корреляции r Пирсона, сделать вывод. Вычислить ошибку коэффициента корреляции. Оценить значимость коэффициента корреляции.

1.

X	41	40	39	38	36	37	39	36	36	38
Y	47	48	44	45	42	45	50	47	46	46

2.

X	25	30	25	30	35	35	40	40	45	45
Y	36	38	42	36	24	28	24	20	22	20

3.

X	21	20	18	14	20	21	17	18	16	15
Y	19	18	16	13	19	17	16	15	14	13

4.

X	28	23	24	25	26	27	29	23	29	26
Y	30	25	26	28	27	31	30	24	31	28

5.

X	20	20	35	20	30	25	25	27	30	30
Y	18	19	25	20	25	21	23	22	23	24

6.

X	56	58	61	60	59	58	56	57	59	56
Y	46	47	46	48	44	45	42	46	50	46

7.

X	17	14	18	15	16	17	16	19	13	15
Y	30	40	35	40	40	35	35	25	45	38

8.

X	56	56	58	57	57	54	55	52	55	60
Y	38	36	40	41	36	39	38	36	37	39

9.

X	17	18	21	25	29	33	37	41	45	44
Y	36	32	36	46	40	48	50	45	50	46

10.

X	20	19	18	21	23	22	23	24	25	25
Y	40	38	36	45	42	50	49	45	36	40

11.

X	40	39	38	37	35	36	38	35	36	37
Y	46	47	42	44	41	44	48	43	42	45

12.

X	26	32	26	31	34	33	38	40	42	44
Y	35	37	41	36	25	27	26	22	21	24

13.

X	20	22	19	15	20	19	18	17	16	14
Y	18	19	16	13	18	17	16	15	13	15

14.

X	27	24	23	25	24	26	29	24	29	25
Y	30	26	25	27	28	30	28	23	31	27

15.

X	19	20	24	23	28	25	24	26	29	30
Y	18	19	25	21	24	23	22	23	25	26

16.

X	46	48	51	50	49	48	46	47	49	46
Y	35	37	36	38	34	35	32	36	40	36

17.

X	16	15	18	16	15	17	16	18	13	14
Y	26	30	28	29	30	24	25	22	25	28

18.

X	36	36	38	37	37	34	35	32	35	40
Y	28	26	30	31	26	29	28	26	27	29

19.

X	27	28	21	25	29	23	27	21	25	24
Y	36	32	36	33	40	28	40	35	38	36

20.

X	20	19	18	21	23	22	23	24	25	22
Y	30	38	36	35	32	40	39	35	36	40

21.

X	20	22	32	20	28	25	30	27	26	29
Y	18	17	25	22	24	21	24	22	23	21

22.

X	36	40	34	32	37	35	31	34	30	36
Y	30	37	32	28	30	33	38	29	35	32

23.

X	17	14	18	15	16	17	16	19	13	15
Y	26	28	20	25	18	22	24	25	20	19

24.

X	26	32	26	31	34	33	38	40	32	34
Y	38	36	30	29	36	31	32	36	37	39

25.

X	17	18	21	25	29	33	30	28	26	24
Y	26	22	26	30	34	28	35	31	28	22

Тестовые задания

1. Термин «КОРРЕЛЯЦИЯ» в статистике понимают как
1) ***связь, зависимость***
2) отношение, соотношение
3) функцию, уравнение
4) коэффициент

2. Точную формулу для подсчета коэффициента корреляции разработал…
1) ***Карл Пирсон***
2) Исаак Ньютон
3) Фишер-Снедекор
4) Якоб Бернулли

3. Коэффициент корреляции измеряется в …
1) процентах
2) тех же единицах, что и изучаемый признак
3) промилле
4) ***не имеет единиц измерения***

4. Если коэффициент корреляции равен 0, то … между признаками
1) существует положительная связь
2) существует отрицательная связь
3) ***линейная связь отсутствует***
4) линейная связь присутствует

5. Если коэффициент корреляции равен 1, то связь является …
1) сильной, прямой
2) сильной обратной
3) средней, прямой
4) ***полной (функциональной), прямой***

6. Зависимость, при которой увеличение или уменьшение значения одного признака ведет к увеличению или уменьшению – второго, характеризует следующий вид связи
1) ***прямая***
2) обратная
3) полная
4) неполная

7. Связь между признаками можно считать умеренной при значении коэффициента корреляции
1) r=0,13
2) $\boldsymbol{r}$**=0,45**
3) r=0,71
4) r=1,0

8. Коэффициент корреляции r = - 0,82 говорит о том, что корреляционная связь

1) прямая, средней силы
2) обратная, слабая
3) прямая, сильная
4) ***обратная, сильная***

9. При значении коэффициента корреляции в диапазоне от 0 до 0,3 сила связи оценивается как

1) ***слабая***
2) средняя
3) сильная
4) полная

10. Связь между признаками можно считать обратной, сильной при значении коэффициента корреляции

1) r = - 0,25
2) r = 0,62
3) **r = - 0,95**
4) r = 0,55

11. Зависимость, при которой увеличение одного признака дает уменьшение второго характеризует следующий вид корреляционной связи

1) прямая
2) ***обратная***
3) полная
4) неполная

12. Коэффициент корреляции Пирсона определяет

1) статистическую значимость различий между переменными
2) степень разнообразия признака в совокупности
3) ***силу и направление связи между зависимой и независимой переменными***
4) долю дисперсии результативного признака, объясняемую влиянием независимых переменных

13. Условием для расчета коэффициента корреляции Пирсона является …

1) распределение переменных неизвестно
2) ***нормальное распределение по крайней мере, одной из двух переменных***
3) по крайней мере, одна из двух переменных измеряется в ранговой шкале
4) отсутствует нормальное распределение переменных

14. Зависимость, когда каждому значению одного признака соответствует точное значение другого, называется …

1) прямой

2) обратной
3) корреляционной
4) ***функциональной***

15. Зависимость, когда при изменении величины одного признака изменяется тенденция (характер) распределения значений другого признака, называется …
1)прямой
2) обратной
3) ***корреляционной***
4) функциональной

16. Для изображения корреляционной зависимости используется график
1) линейный
2) ***график рассеяния точек***
3) радиальный
4) динамический

17. Связь между *Y* и *X* можно признать более существенной при следующем значении линейного коэффициента корреляции
1) r= 0,35 2) r= 0,15 3) **r= -0,57** 4) r=0,46

18. Корреляционный анализ используется для изучения
1) ***взаимосвязи явлений***
2) развития явления во времени
3) структуры явлений
4) статистической значимости различий между явлениями

19. Коэффициент корреляции может принимать значения
1) от 0 до 1
2) от -1 до 0
3) **от -1 до 1**
4) любые положительные

20. В результате проведения регрессионного анализа получают уравнение, описывающее ... показателей
1) ***взаимосвязь***
2) соотношение
3) структуру
4) темпы роста

21. Оценка значимости коэффициента корреляции проводится по критерию …
1) ***Критерия Стьюдента***
2) Критерия Фишера
3) Критерия Дарбина-Уотсона
4) Критерия Фостера-Стюарта

3. РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Регрессионный анализ – раздел математической статистики, изучающий форму связи между признаками. Чаще всего регрессионный анализ используется для прогноза, то есть предсказания значений ряда зависимых переменных по известным значениям других переменных.

Регрессией принято называть зависимость среднего значения какой-либо величины (y) от некоторой другой величины или от нескольких величин (x_i).

Теоретической линией регрессии называется линия, вокруг которой группируются точки корреляционного поля, и которая указывает основную тенденцию связи.

Теоретическая линия регрессии должна отображать изменение средних величин результативного признака y по мере изменения величин факторного признака x при условии полного взаимопогашения всех прочих, случайных по отношению к фактору x, причин.

Следовательно, эта линия должна быть проведена так, чтобы сумма отклонений точек поля корреляции от соответствующих точек теоретической линии регрессии равнялась нулю, а сумма квадратов этих отклонении была бы минимальной величиной.

В 1806 году французский математик Лежандр доказал, что наилучшим образом связь между x и y будет отражать прямая линия:

$$\bar{y}_x = a + bx,$$

для которой выполняется условие:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_{i\,эксп} - y_{i\,теор})^2 = \min,$$

где $y_{i\,эксп}$ – значение y, полученное из опыта;

$y_{i\,теор}$ – расчетное y, лежащее на прямой;

S – отклонение.

Так как $\bar{y}_{i\,теор} = a + bx$, то условие $S = \sum_{i=1}^{n} (y_{i\,эксп} - y_{i\,теор})^2 = \min$ можно записать:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2 = \min.$$

Это выражение означает, что значения коэффициентов a и b должны быть подобраны так, чтобы сумма квадратов отклонений ординат экспериментальных точек от ординат точек сглаживающей прямой была бы минимальной.

Геометрически можно изобразить следующим образом (рисунок 5):

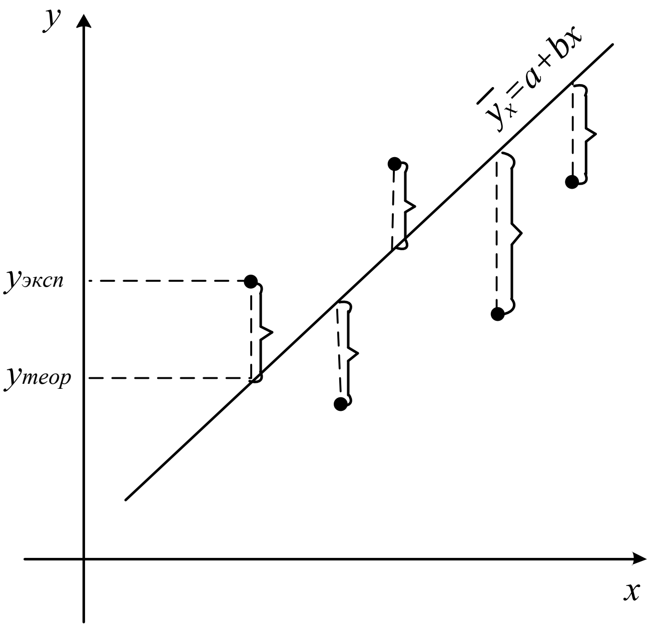


Рисунок 5 – Геометрическая иллюстрация задачи на минимум

Необходимым условием минимума данной функции является равенство нулю ее частных производных по параметрам a и b, откуда для определения параметров линейной регрессии получаем линейную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} an + b\sum x_i = \sum y_i, \\ a\sum x_i + b\sum x_i^2 = \sum x_i y_i. \end{cases}$$

Коэффициент b называется выборочным коэффициентом регрессии y на x. Он показывает, на сколько единиц в среднем изменятся переменная y при увеличении переменной x на одну единицу.

Из системы уравнений находим коэффициенты a и b по формулам:

$$a = \frac{\sum y_i \cdot \sum x_i^2 - \sum x_i y_i \cdot \sum x_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \qquad b = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

Таким образом, получаем следующую регрессионную модель:

$$\overline{y}_x = a + bx.$$

Оценка качества модели. Для оценки качества модели определяют среднюю ошибку аппроксимации – это среднее отклонение расчетных данных от фактических. Чем меньше эти отклонения, тем ближе теоретические значения подходят к эмпирическим данным, это лучшее качество модели.

Среднюю ошибку аппроксимации рассчитывают по формуле:

$$\overline{A} = \frac{1}{n}\sum\left|\frac{y_i - \overline{y}_i}{y_i}\right| \cdot 100\%$$

Средняя ошибка аппроксимации не должна превышать 8-10%. Для грубого приближения регрессии к реальной зависимости полагают, что значение средней ошибки аппроксимации не должно превышать 12-15%.

Оценка адекватности модели. Оценка адекватности уравнения регрессии в целом производится на основе F-критерия Фишера:

$$F = \frac{\overline{S}_y^2}{\overline{S}_{ост}^2}$$

(отношение полной и остаточной дисперсий показывает, во сколько раз уравнение регрессии предсказывает результаты опыта лучше, чем среднее значение по y),

где $\overline{S}_y^2 = \dfrac{\sum y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum y_i\right)^2}{k_1}$ – общая дисперсия,

$\overline{S}_{ост}^2 = \dfrac{\sum (y_i - \overline{y}_i)^2}{k_2}$ – остаточная дисперсия.

Вычисленное значение F – критерия Фишера сравнивается с табличным значением: $F_{табл}(\alpha; k_1; k_2)$ при уровне значимости α и степенях свободы

$$k_1 = n-1, k_2 = n-m-1,$$

где n – число наблюдений, m – число параметров при переменной x (в нашем случае $m = 1$).

Если вычисленное значение $F>F_{табл}$, то полученное уравнение регрессии адекватно (статистически значимо). В противном случае ($F<F_{табл}$) уравнение регрессии неадекватно (статистически незначимо).

Оценка значимости коэффициентов регрессии. Оценка значимости коэффициентов регрессии проводится по критерию Стьюдента путем сравнения их значений с величиной случайной ошибки:

$$t_a = \frac{a}{m_a}, t_b = \frac{b}{m_b}.$$

где случайные ошибки коэффициентов линейной регрессии определяются по формулам:

$$m_a = \frac{S^2{}_{ост} \cdot \sqrt{\sum x^2}}{n\sigma_x},\ m_b = \frac{S^2{}_{ост}}{\sigma_x \cdot \sqrt{n}},$$

где $\overline{S}_{ост}^2 = \dfrac{\sum(y_i - \overline{y}_i)^2}{n-2}$ – остаточная дисперсия,

$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^2 - (\overline{x})^2}$ – среднее квадратическое отклонение.

Статистики t_a и t_b подчиняются распределению Стьюдента с числом степени свободы $\nu = n-2$.

Из таблицы распределения критерия Стьюдента находят критическое значение $t_{кр} = t(\alpha, \nu)$.

Если $t_a > t_{кр}$, то параметр a статистически значим.

В противном случае ($t_a < t_{кр}$) параметр a статистически незначим.

Задача. Найти уравнение прямой линии регрессии по данным $n = 8$ наблюдений, которые получены при изучении зависимости количества продаж сельскохозяйственной продукции y от затрат на рекламу этого товара x:

x	1,5	4,0	5,0	7,0	8,5	10,0	11,0	12,5
y	5,0	4,5	7,0	6,5	9,5	9,0	11,0	9,0

Решение. Составим расчетную вспомогательную таблицу:

№ п/п	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$	$\overline{y}_i = a + bx_i$	$(y_i - \overline{y}_i)^2$	A_i, %
1	1,5	5,0	2,25	25	7,5	4,525	0,2256	9,50
2	4,0	4,5	16	20,25	18	5,85	1,8225	30,00
3	5,0	7,0	25	49	35	6,38	0,3844	8,86
4	7,0	6,5	49	42,25	45,5	7,44	0,8836	14,46
5	8,5	9,5	72,25	90,25	80,75	8,235	1,6002	13,32
6	10,0	9,0	100	81	90	9,03	0,0009	0,33
7	11,0	11,0	121	121	121	9,56	2,0736	13,09
8	12,5	9,0	156,25	81	112,5	10,355	1,8360	15,06
$\sum$	59,5	61,5	541,75	509,75	510,25	-	8,8269	104,61

Вычислим коэффициенты a и b по формулам:

$$a = \frac{\sum y_i \cdot \sum x_i^2 - \sum x_i y_i \cdot \sum x_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{61{,}5 \cdot 541{,}75 - 510{,}75 \cdot 59{,}5}{8 \cdot 541{,}75 - (59{,}5)^2} = 3{,}73$$

$$b = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{8 \cdot 510{,}25 - 59{,}5 \cdot 61{,}5}{8 \cdot 541{,}75 - (59{,}5)^2} = 0{,}53$$

Получим уравнение вида: $\overline{y}_i = 3{,}73 + 0{,}53x_i$.

Оценка качества модели. Качество построенной модели оценим по средней ошибке аппроксимации:

$$\overline{A} = \frac{1}{n}\sum\left|\frac{y_i - \overline{y}_i}{y_i}\right| \cdot 100\% = \frac{\sum A_i}{n} = \frac{104{,}61}{8} = 13{,}08\%.$$

Вывод: в среднем расчетные значения отклоняются от фактических на 13,08%.

Оценка адекватности модели. Вычислим число степеней свободы:

$$k_1 = n - 1 = 8 - 1 = 7,$$
$$k_2 = n - 2 = 8 - 2 = 6.$$

Общая дисперсия равна $\overline{S}_y^2 = \dfrac{\sum y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum y_i\right)^2}{k_1} = \dfrac{509{,}75 - \frac{1}{8} \cdot 61{,}5^2}{7} = 5{,}28$.

Остаточная дисперсия $\overline{S}_{ост}^2 = \dfrac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{k_2} = \dfrac{8{,}8269}{6} = 1{,}47$.

Вычислим F – критерий Фишера по формуле:

$$F = \frac{\overline{S}_y^2}{\overline{S}_{ост}^2} = \frac{5{,}28}{1{,}47} = 3{,}59.$$

По таблице значений F – критерия Фишера находим

$$F_{табл}(\alpha; k_1; k_2) = 4{,}21.$$

Вывод: $F < F_{табл}$, следовательно, линейное уравнение регрессии адекватно описывает фактические значения количества продаж товара от затрат на рекламу этого товара.

Оценка значимости коэффициентов регрессии. Случайные ошибки коэффициентов линейной регрессии находят по формулам:

$$m_a = \frac{S^2_{ост} \cdot \sqrt{\sum x^2}}{n\sigma_x}, \; m_b = \frac{S^2_{ост}}{\sigma_x \cdot \sqrt{n}}.$$

Вычислим среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^2 - (\overline{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{8} \cdot 541{,}75 - 7{,}44^2} = 3{,}52.$$

Тогда

$$m_a = \frac{S^2_{ост} \cdot \sqrt{\sum x^2}}{n\sigma_x} = \frac{1{,}47 \cdot \sqrt{541{,}75}}{8 \cdot 3{,}52} = 1{,}22, \; m_b = \frac{S^2_{ост}}{\sigma_x \cdot \sqrt{n}} = \frac{1{,}47}{3{,}52 \cdot \sqrt{8}} = 0{,}15.$$

Оценим значимости коэффициентов регрессии по критерию Стьюдента путем сравнения их значений с величиной случайной ошибки:

$$t_a = \frac{a}{m_a} = \frac{3{,}73}{1{,}22} = 3{,}06, t_b = \frac{b}{m_b} = \frac{0{,}53}{0{,}15} = 3{,}53.$$

Из таблицы распределения критерия Стьюдента находим критическое значение:

$$t_{кр} = t(\alpha, \nu) = t(\alpha, n-2) = t(0{,}05; 6) = 2{,}45.$$

Так как $t_a > t_{кр}$ и $t_b > t_{кр}$, то параметры a и b статистически значимы.

Вывод: модель по F-критерию Фишера в целом адекватна, и все коэффициенты регрессии значимы. Такая модель может быть использована для принятия решений к осуществлению прогнозов.

Вопросы для самоконтроля

1) Дайте определение «регрессии».

2) В чем сущность метода регрессии?

3) Уравнение регрессии имеет вид: $\overline{y_x} = 5{,}24 - 1{,}45x$.

На сколько единиц своего измерения в среднем изменится Y при увеличении X на 1 единицу своего измерения?

4) Уравнение регрессии имеет вид: $\overline{y_x} = 3{,}25 + 3{,}17x$.

На сколько единиц своего измерения в среднем изменится Y при увеличении X на 1 единицу своего измерения?

5) Задачи регрессионного анализа.

6) Метод наименьших квадратов.

7) Геометрическая интерпретация метода наименьших квадратов.

8) Охарактеризуйте формулу уравнения простой линейной регрессии.

9) Дайте определение коэффициента регрессии.

10) Какой можно сделать вывод, если коэффициент регрессии веса по росту равен 0,26 кг/см?

11) Для чего используется формула уравнения регрессии?

12) В чем суть регрессионного анализа?

13) С помощью какого метода определяют коэффициенты уравнения регрессии?

Задания для самостоятельного решения

Разработать регрессионную линейную модель: $\bar{y}_i = a + bx_i$, **о**ценить качество и адекватность модели, значимость коэффициентов регрессионной модели.

1.

X	18	19	17	18	16	19	18	22	17	18	15	20	18	17	21
Y	14	19	16	14	14	16	14	21	18	16	12	19	18	18	18

2.

X	22	23	20	22	21	20	21	18	16	22	18	25	13	23	17
Y	24	21	21	19	23	23	25	21	20	19	24	23	18	23	18

3.

X	17	20	19	22	18	16	23	25	14	16	22	18	24	22	23
Y	19	22	18	24	22	17	20	22	19	21	19	21	19	19	22

4.

X	16	13	16	14	19	17	21	17	21	10	20	19	11	13	20
Y	15	16	17	14	18	16	18	16	21	11	17	21	12	12	17

5.

X	22	15	19	21	23	18	23	19	18	21	17	20	16	22	20
Y	18	13	15	16	19	17	19	18	15	18	13	17	15	20	19

6.

X	18	13	16	19	20	20	17	17	18	15	16	15	15	19	16
Y	17	14	17	18	22	19	18	21	20	17	19	17	14	21	15

7.

X	14	17	17	15	19	16	18	17	16	18	21	20	15	19	21
Y	14	18	20	14	20	15	18	15	17	16	19	17	17	18	17

8.

X	19	20	15	16	15	14	16	18	19	13	14	18	17	18	17
Y	17	19	17	15	16	16	18	19	20	14	15	19	20	17	16

9.

X	19	22	16	14	21	20	18	17	15	22	15	18	16	20	17
Y	19	21	18	15	20	21	19	16	17	19	18	19	15	17	20

10

X	15	21	16	14	19	20	18	17	20	22	19	22	23	20	17
Y	16	18	18	15	16	21	19	15	18	20	20	21	21	21	18

11

X	16	22	18	18	14	20	19	18	20	17	16	15	19	17	20
Y	17	20	16	17	16	22	19	20	20	21	19	17	17	18	18

12

X	18	19	21	18	16	19	18	21	17	18	16	22	16	20	21
Y	14	17	18	14	14	15	18	20	15	16	17	19	17	19	17

13

X	22	18	19	20	21	20	21	19	17	22	18	16	15	21	17
Y	18	17	17	19	20	17	17	20	16	19	16	17	16	19	18

14

X	20	21	17	19	19	16	23	23	15	16	20	18	14	18	22
Y	22	20	18	20	22	19	20	21	19	21	19	21	19	19	21

15

X	16	14	15	18	16	17	21	17	21	18	20	19	17	18	20
Y	15	15	17	18	18	16	18	18	20	16	19	18	15	20	17

16

X	14	15	19	21	23	21	23	17	20	18	20	17	16	24	16
Y	15	18	20	18	20	22	19	18	21	17	18	20	15	21	19

17

X	22	21	16	18	20	17	16	19	18	15	16	16	17	20	15
Y	21	20	20	19	21	19	17	21	20	17	19	17	18	19	19

18

X	15	22	18	18	20	14	16	18	16	17	21	20	15	19	17
Y	14	20	19	17	21	15	15	16	17	18	19	18	17	18	15

19

X	19	20	16	19	15	14	16	16	18	13	17	18	17	18	15
Y	18	19	17	20	17	18	19	19	20	15	16	19	19	17	18

20

X	16	19	15	14	16	20	17	16	18	17	16	15	13	19	17
Y	19	20	18	16	17	21	19	17	19	18	18	17	15	21	21

21

X	17	22	16	14	21	20	18	16	15	23	19	25	22	20	16
Y	19	20	18	17	18	21	19	18	18	19	20	22	21	19	18

22

X	17	21	19	18	15	23	24	22	20	18	17	16	19	20	21
Y	15	20	18	17	16	21	21	20	18	20	18	17	17	21	18

23

X	19	18	20	18	16	19	21	16	17	19	15	22	15	17	21
Y	16	17	18	20	17	20	18	19	18	18	18	19	18	19	20

24

X	22	20	19	21	21	20	21	18	16	22	18	19	15	23	17
Y	20	21	17	19	22	19	18	19	16	19	16	20	16	21	18

25

X	17	22	19	20	19	17	21	20	20	16	22	18	20	16	16
Y	17	21	18	18	20	19	20	19	19	18	20	19	20	19	17

Тестовые задания

1. В результате проведения регрессионного анализа получают уравнение, описывающее ... показателей

1) ***взаимосвязь***
2) соотношение
3) структуру
4) темпы роста

2. Линейная связь между факторами исследуется с помощью уравнения регрессии

1) $\overline{y}_x = ax^b$
2) $\overline{y}_x = a + bx + cx^2$
3) $\overline{y}_x = a + bx$
4) $\overline{y}_x = a + \dfrac{b}{x}$

3. Гиперболическая связь между факторами исследуется с помощью уравнения регрессии

1) $\overline{y}_x = ax^b$
2) $\overline{y}_x = a + bx + cx^2$
3) $\overline{y}_x = a + bx$
4) $\overline{y}_x = a + \dfrac{b}{x}$

4. Параболическая связь между факторами исследуется с помощью уравнения регрессии

1) $\overline{y}_x = ax^b$
2) $\overline{y}_x = a + bx + cx^2$
3) $\overline{y}_x = a + bx$
4) $\overline{y}_x = a + \dfrac{b}{x}$

5. Степенная корреляционная зависимость может описываться уравнением регрессии вида…

1) $\overline{y_x} = 0{,}56 \cdot x^{-0{,}9}$
2) $\overline{y_x} = 11{,}3 \cdot 1{,}12^x$
3) $\overline{y_x} = 8{,}27 - 16{,}1 \cdot \dfrac{1}{x}$
4) $\overline{y_x} = 3{,}59 + 0{,}17x + 1{,}18x^2$

6. Гиперболическая корреляционная зависимость может описываться уравнением регрессии вида…

1) $\overline{y_x} = 5{,}67 \cdot 0{,}98^x$

2) $\overline{y_x} = 9{,}9 - 7{,}3 \cdot \frac{1}{x}$

3) $\overline{y_x} = 6{,}2 \cdot x^{-0{,}12}$

4) $\overline{y_x} = 2{,}3 + 0{,}61x + 0{,}72x^2$

7. Показательная корреляционная зависимость может описываться уравнением регрессии вида…

1) $\overline{y_x} = 2{,}47 \cdot x^{0{,}18}$

2) $\overline{y_x} = 24 + 0{,}64x + 2{,}17x^2$

3) $\overline{y_x} = 8{,}03 \cdot 0{,}45^x$

4) $\overline{y_x} = 5{,}26 - 6{,}28 \cdot \frac{1}{x}$

8. Параболическая корреляционная зависимость может описываться уравнением регрессии вида…

1) $\overline{y_x} = 3{,}1 \cdot x^{0{,}54}$

2) $\overline{y}_x = 1{,}03 \cdot 10{,}15^x$

3) $\overline{y_x} = 4{,}23 + 5{,}0 \cdot \frac{1}{x}$

4) $\overline{y_x} = 8{,}93 + 0{,}52x + 3{,}26x^2$

9. Дано выборочное уравнение регрессии $\overline{y_x} =$ -1,94 + 0,04x и выборочные среднеквадратические отклонения σ_x = 0,4, σ_y = 0,2. Тогда выборочный коэффициент корреляции равен

1) 0,02 2) **0,08** 3) - 0,08 4) - 0,02

10. Дано выборочное уравнение регрессии $\overline{y_x} =$- 1,4 + 4,4x. Тогда выборочный коэффициент регрессии равен…

1) 3,14 2) 1,4 3) 0,32 4) **4,4**

11. Параметр b (b = 0,016) линейного уравнения $\overline{y_x} = 0{,}678 + 0{,}016x$ регрессии показывает, что

1) с увеличением признака "x" на 1 признак "y" увеличивается на 0,678

2) ***с увеличением признака "x" на 1 признак "y" увеличивается на 0,016***

3) с увеличением признака "x" на 1 признак "y" уменьшается на 0,678

4) с увеличением признака "x" на 1 признак "y" уменьшается на 0,016

12. Зависимая переменная в уравнении регрессии называется
1) вариантой
2) уровнем
3) предиктором
4) ***переменной отклика***

13. Из нижеперечисленных величин для определения размера одного признака при изменении другого на единицу измерения применяется
1) среднеквадратическое отклонение
2) коэффициент корреляции
3) ***коэффициент регрессии***
4) коэффициент вариации

14. Регрессионный анализ – раздел математической статистики, изучающий …
1) тесноту связи между признаками X и Y
2) ***форму связи между признаками X и Y***
3) полноту связи между признаками X и Y
4) глубину связи между признаками X и Y

15. Для оценки качества регрессионной модели определяют…
1) ***среднюю ошибку аппроксимации***
2) среднее квадратическое отклонение
3) среднее арифметическое значение
4) среднюю дисперсию

16. Допустимый предел значений средней ошибки аппроксимации …. %
1) ***не более 8-10***
2) более 10-20
3) не более 10-20
4) более 8-10

17. Оценка статистической значимости коэффициентов линейной регрессии осуществляется с помощью…
1) Критерия Фишера
2) ***Критерия Стьюдента***
3) Критерия Дарбина-Уотсона
4) Критерия Фостера-Стюарта

4. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Каждый человек ежедневно, не всегда осознавая это, решает проблему получения наибольшего эффекта, при затрате ограниченных средств. К сожалению, наши средства и ресурсы всегда ограничены, приходится действовать очень обдуманно, ответственно, для того чтобы добиться желаемого. Чтобы достичь наибольшего эффекта, имея ограниченные средства, надо составить план, или программу действий.

Линейное программирование (Linear programming) – это математический метод решения задач на оптимальное распределение имеющихся ресурсов для достижения какой-либо цели (максимальной выручки или минимальных затрат).

На данный момент времени, линейные модели являются одним из наиболее используемых классов математических моделей. (Математическая модель – формализация условия задачи посредством неравенств и уравнений) Они просты для понимания, однако, могут быть достаточно эффективны в ряде стандартных ситуаций.

Необходимым условием постановки задачи линейного программирования являются ограничения на наличие ресурсов, величину спроса, производственную мощность предприятия и другие производственные факторы.

Основоположником линейного программирования (далее ЛП) считается советский математик Л.В.Канторович. В 1939 году он опубликовал работу «Математические методы организации и планирования производства», в которой описал новый класс экстремальных задач с ограничениями и предложил метод их решения. (Экстремальные задачи – задачи на нахождение экстремума (оптимума) – максимального или минимального значения функции на определённом множестве). В работах учёного приведены математические методы решения таких задач, как задача повышения эффективности работы транспорта, определения оптимальных производственных режимов, рационального распределения промышленных материалов и др.

Позже были созданы такие методы линейного программирования, как симплексный, комбинаторный и другие методы, которые эффективно используются для решения различных оптимальных задач. К разработке этих методов приложили руку G. Dantzig (Джордж Данциг), A. Charnes (Абрахам Чэрнс) и ряд других советских и зарубежных ученых.

Сущность линейного программирования состоит в нахождении точек наибольшего или наименьшего значения некоторой функции при определенном наборе ограничений, налагаемых на аргументы и образующих систему ограничений, которая имеет, как правило, бесконечное множество решений.

Каждая совокупность значений переменных (аргументов функции F), которые удовлетворяют системе ограничений, называется допустимым планом задачи линейного программирования. Функция F, максимум или минимум которой определяется, называется целевой функцией задачи.

Допустимый план, на котором достигается максимум или минимум функции F, называется оптимальным планом задачи. Система ограничений, определяющая множество планов, диктуется условиями производства.

Общую форму задачи линейного программирования формулируют следующим образом:

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min),$$

удовлетворяющие системе линейных ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\,(\le, =, \ge)\,b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n\,(\le, =, \ge)\,b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n\,(\le, =, \ge)\,b_m, \end{cases}$$

где коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$; $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – заданные числа, а величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные.

Каждое из ограничений системы может содержать один из трех возможных знаков: $\le, =, \ge$.

Математическая модель любой задачи линейного программирования включает в себя:

- максимум или минимум целевой функции (критерий оптимальности);
- систему ограничений в форме линейных уравнений и неравенств;
- требование неотрицательности переменных.

Одна и та же (ЗЛП) может быть сформулирована в различных эквивалентных формах.

Наиболее важными формами задачи линейного программирования являются каноническая и стандартная.

Общая форма	Каноническая (основная) форма	Стандартная (симметрическая) форма
1) ограничения		
Уравнения и неравенства	Уравнения	Неравенства
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \begin{pmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{pmatrix} b_j$ $i = 1,\ldots,m$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_j$ $i = 1,\ldots,m$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le (\ge) b_j$ $i = 1,\ldots,m$
2) условия неотрицательности		
Часть переменных	Все переменные	Все переменные
$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,s\,(s \le n)$	$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,n$	$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,n$
3) Цель задачи $F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j$		
max или min	max или min	max или min

В канонической форме ЗЛП является задачей на максимум (минимум) некоторой линейной функции F, ее система ограничений состоит только из равенств (уравнений). При этом переменные задачи x_1, x_2, ..., x_n являются неотрицательными:

Правило приведения ЗЛП к каноническому виду:

1. Если в исходной задаче некоторое ограничение (например, первое) было неравенством, то оно преобразуется в равенство, введением в левую часть некоторой неотрицательной переменной, причем для неравенства «≤» вводится дополнительная неотрицательная переменная со знаком «+»; в случае неравенства «≥» - со знаком «-».

2. Если в исходной задаче некоторая переменная не подчинена условию неотрицательности, то ее заменяют (в целевой функции и во всех ограничениях) разностью неотрицательных переменных.

3. Если в ограничениях правая часть отрицательна, то следует умножить это ограничение на (-1).

4. Наконец, если исходная задача была задачей на минимум, а нам удобнее по каким-либо причинам решать задачу на максимум, то введением новой целевой функции $F_1 = -F$ мы преобразуем нашу задачу на минимум функции F в задачу на максимум функции F_1.

Всякую задачу линейного программирования можно формулировать в стандартной форме. Приведение к стандартной форме необходимо, так как большинство методов решения задач линейного программирования разработано именно для стандартной формы.

Для приведения к стандартной форме задачи программирования может потребоваться выполнить следующие действия:

- перейти от минимизации целевой функции к ее максимизации;
- изменить знаки правых частей ограничений;
- перейти от ограничений-равенств к неравенствам;
- избавиться от переменных, не имеющих ограничений на знак.

Задачами линейного программирования (ЗЛП) являются следующие задачи.

Задача 1 (задача об использовании ресурсов). Предприятие имеет в своем распоряжении определенное количество ресурсов разного рода: рабочую силу, деньги, сырье, оборудование, производственные ресурсы, площади и т.п. Допустим, например, ресурсы трех видов R_1, R_2, R_3 имеются в количествах соответственно b_1, b_2, b_3 условных единиц. Предприятие выпускает два вида товаров: T_1, T_2. Причем известно, сколько единиц каждого ресурса требуется для производства одной единицы каждого товара. Пусть a_{ij} - число единиц ресурса R_i (i = 1,2,3), необходимое для производства единицы товара T_j (j =1, 2). Доход, получаемый предприятием от единицы каждого вида товаров, соответственно равен c_1, c_2. Требуется при данных ресурсах выпустить такую комбинацию товаров, при которой доход предприятия оказался бы максимальным.

Решение. Составим математическую модель задачи. Обозначим через x_1, x_2 соответственно количества товаров T_1, T_2. Очевидно, доход предприятия:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2.$$

Общее количество ресурса R_i, используемого при выпуске обоих товаров, равно:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2\,.$$

Оно не должно превосходить запаса b_1, т.е.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1\,.$$

Вообще количество ресурса R_i (i = 1,2,3) используемого при выпуске обоих товаров, равное $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2$ не должно превосходить b_i, т.е. должны выполняться неравенства:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i \ (i = 1, 2, 3).$$

Математическая задача об использовании ресурсов состоит в отыскании значений неизвестных x_1, x_2 удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

и максимизирующих функцию $F = c_1x_1 + c_2x_2$.

Задача 2. Привести к каноническому виду задачу

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$F = x_1 + 2x_2 \to \max$$

Решение. Введем дополнительные переменные x_3, x_4, x_5. Причем в первое неравенство введем неотрицательную переменную x_3 со знаком минус, а во второе и в третье – со знаком плюс переменные x_4, x_5, запишем задачу в виде:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

$$F = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max$$

Вопросы для самоконтроля

1) Сформулируйте задачу линейного программирования.

2) Кто является основоположником линейного программирования.

3) Какие необходимые условия постановки задачи линейного программирования.

4) Какие задачи решаются методами линейного программирования.

5) Приведите содержательные примеры задачи линейного программирования.

6) Что такое стандартная и каноническая формы задачи линейного программирования.

7) Какие требования для системы ограничений в канонической форме задачи линейного программирования.

8) Какие требования для системы ограничений в стандартной форме задачи линейного программирования.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Привести к каноническому виду задачу

1) $F= 2x_1-3x_2 \to max$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_2 \le 5, \\ x_1 + 3x_2 \le 2, \\ x_1 \le 4. \end{cases}$$

2) $F= 2x_1 -5x_2 \to min$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 2, \\ 4x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 3. \end{cases}$$

3) $F= 3x_1+7x_2 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ 4x_1 - x_2 \le 2, \\ -2x_1 + x_2 \le 3, \\ x_2 \le 5. \end{cases}$$

4) $F= -3x_1 +x_2 \to min$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 7, \\ -x_1 + 2x_2 \le 3, \\ 4x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 \le 3. \end{cases}$$

5) $F= 4x_1+2x_2 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 \ge 5, \\ 3x_1 \ge 7, \\ x_2 \ge 1. \end{cases}$$

6) $F= -4x_1 -x_2 \to min$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 - 5x_2 \le 6, \\ x_1 \le 1, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 9. \end{cases}$$

7) $F= 4x_1+3x_2 \to max$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2, \\ -3x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + 5x_2 \ge 6, \\ 4x_1 + x_2 \le 5. \end{cases}$$

8) $F= -2x_1 +5x_2 \to min$
$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_2 \ge 3, \\ x_1 - x_2 \le 6. \end{cases}$$

9) $F= 6x_1+3x_2 \to max$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9, \\ 2x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 - 4x_1 \ge 8, \\ x_2 \le 2. \end{cases}$$

10) $F= 3x_1 +4x_2 \to min$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_2 \ge 5. \end{cases}$$

11) $F= 5x_1+2x_2 \to max$
$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 + 5x_2 \ge 1, \\ x_1 \le 2. \end{cases}$$

12) $F= -4x_1 +x_2 \to min$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 4, \\ -3x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 \le 4. \end{cases}$$

13) $F= 5x_1+2x_2 \to max$

14) $F= x_1 +4x_2 \to min$

15) $F= 3x_1+x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 4, \\ -3x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_2 \leq 3. \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 8, \\ x_1 + 7x_2 \leq 4, \\ x_1 - 3x_2 \geq 1, \\ x_2 \geq 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 2, \\ x_1 - 4x_2 \leq 8, \\ x_1 \leq 4. \end{cases}$$

16) $F = 3x_1 - x_2 \to min$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 \leq 3, \\ -x_2 \leq 2. \end{cases}$$

17) $F = 3x_1 + x_2 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \leq 2, \\ x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

18) $F = 5x_1 - 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ 3x_1 + x_2 \geq 6, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 \leq 3. \end{cases}$$

19) $F = 5x_1 + x_2 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ -8x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \leq 3. \end{cases}$$

20) $F = -x_1 + 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_2 \geq 2, \\ x_1 - 3x_2 \leq 6. \end{cases}$$

21) $F = x_1 - 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \geq -1, \\ x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 4. \end{cases}$$

22) $F = 4x_1 - 3x_2 \to min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 0, \\ -4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_1 \leq 3, \\ x_1 + 4x_2 \leq 5. \end{cases}$$

23) $F = x_1 + 4x_2 \to max$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 5, \\ x_1 \leq 1, \\ x_1 + 3x_2 \geq 4. \end{cases}$$

24) $F = 3x_1 + x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \leq 7, \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ 2x_2 \geq 1. \end{cases}$$

Тестовые задания

1. Линейное программирование – это математический метод решения задач на …

1) ***оптимальное распределение имеющихся ресурсов для достижения какой-либо цели (максимальной выручки или минимальных затрат)***

2) нахождение мало имеющихся ресурсов

3) нахождение ресурсов, находящихся в избытке

4) нормальное распределение имеющихся ресурсов

2. Основоположником линейного программирования считается …

1) французский математик Г.Ф. Лопиталь

2) ***советский математик Л.В.Канторович***

3) немецкий математик К.Ф. Гаусс

4) советский математик В.А. Стеклов

3. Если целевая функция и все ограничения выражаются с помощью линейных уравнений, то рассматриваемая задача является задачей….

1) динамического программирования

2) ***линейного программирования***

3) целочисленного программирования

4) нелинейного программирования

4. Модель задачи линейного программирования, в которой целевая функция исследуется на максимум, и система ограничений задачи является системой уравнений, называется…

1) общей
2) стандартной
3) ***канонической***
4) нормальной

5. Модель задачи линейного программирования, в которой целевая функция исследуется на максимум, и система ограничений задачи является системой уравнений и неравенств, называется…

1) стандартной
2) канонической
3) нормальной
4) ***общей***

6. Модель задачи линейного программирования, в которой целевая функция исследуется на максимум, и система ограничений задачи является системой неравенств, называется…

1) нормальной
2) общей
3) ***стандартной***
4) канонической

7. Дана задача линейного программирования $F = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 2 \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 1 \\ x_1 + 5x_2 \le 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Сформулированная в таком виде она является…

1) нелинейной
2) основной
3) канонической
4) ***стандартной***

8. Дана задача линейного программирования $F = 3x_1 - 4x_2 \rightarrow \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - 4x_2 = 3 \\ x_1 + 5x_2 = 1 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Сформулированная в таком виде она является…

1) нелинейной

2) основной

3) ***канонической***

4) стандартной

9. Дана оптимизационная задача «Найти $\max(\min) f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при условиях $\varphi_j(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_j, \quad j = \overline{1, m}$». Запись $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется…

1) ***целевая функция***

2) критерий оптимальности

3) ограничения

4) условия

10. В задачах линейного программирования линейными должны быть

1) целевая функция

2) ограничения задачи

3) ***целевая функция и ограничения задачи***

11. В каком случае задача математического программирования является линейной?

1) если ее целевая функция линейна

2) если ее ограничения линейны

3) ***если ее целевая функция и ограничения линейны***

12. Если целевая функция и все ограничения выражаются с помощью линейных уравнений, то рассматривая задача является задачей…

1) динамического программирования

2) ***линейного программирования***

3) целочисленного программирования

4) нелинейного программирования

13. Что такое допустимый план задачи линейного программирования?

1) ***план, при подстановке которого в систему ограничений все они выполняются***

2) план, при подстановке которого в систему ограничений выполняется хотя бы одно ограничение

3) план, при подстановке которого в систему ограничений ни одно из них не выполняется

5. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования и применяется в основном при решении задач двумерного пространства и только некоторых задач трёхмерного пространства, так как довольно трудно построить многогранник решений, который образуется в результате пересечения полупространств. Задачу пространства размерности больше трёх изобразить графически вообще невозможно.

Задача линейного программирования в стандартной форме с двумя переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le (\ge) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le (\ge) b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le (\ge) b_m, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min)$$

Эта задача допускает простое геометрическое истолкование.

Рассмотрим вначале геометрическое истолкование системы ограничений задачи. Каждую совокупность значений переменных x_1, x_2 можно изобразить точкой на плоскости, если ввести систему координат и по одной оси откладывать x_1, а по другой x_2 (рисунок 6).

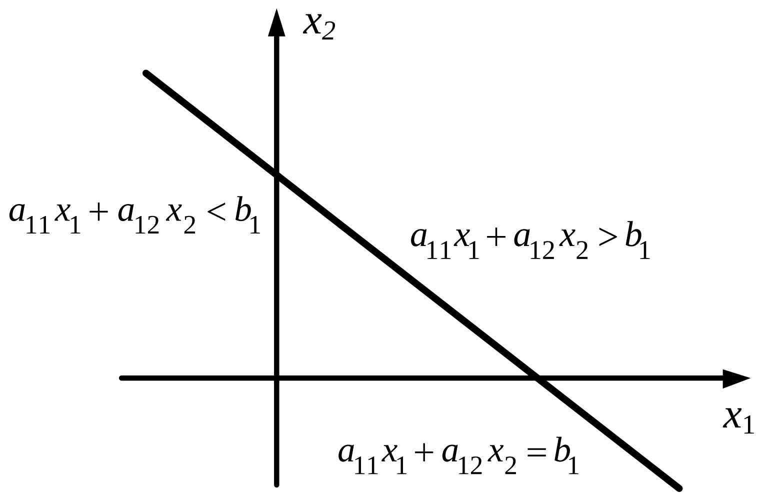


Рисунок 6 – Геометрическая иллюстрация системы ограничений

Выясним, что геометрически означает совокупность решений одного отдельно взятого неравенства:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1,$$

которое определяет полуплоскость, лежащую по одну из сторон прямой $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$. Координаты точки другой полуплоскости удовлетворяют противоположному неравенству $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$.

Для того, чтобы проверить, какая из полуплоскостей состоит из решений нашего неравенства, следует взять точку из какой-либо полуплоскости и проверить, выполняется ли наше неравенство в этой точке.

Множество решений отдельно взятого линейного неравенства представляет собой полуплоскость. Для системы из нескольких таких неравенств точки, координаты которых удовлетворяют всем неравенствам одновременно, должны находиться во всех соответствующих полуплоскостях, т.е. принадлежать теоретико-множественному пересечению этих полуплоскостей.

Множество точек на плоскости, удовлетворяющих системе ограничений, составляет, таким образом, некоторую выпуклую многоугольную область (область допустимых решений).

При решении двумерных задач линейного программирования возможны следующие ситуации (ОДР - область допустимых решений) (рисунок 7):

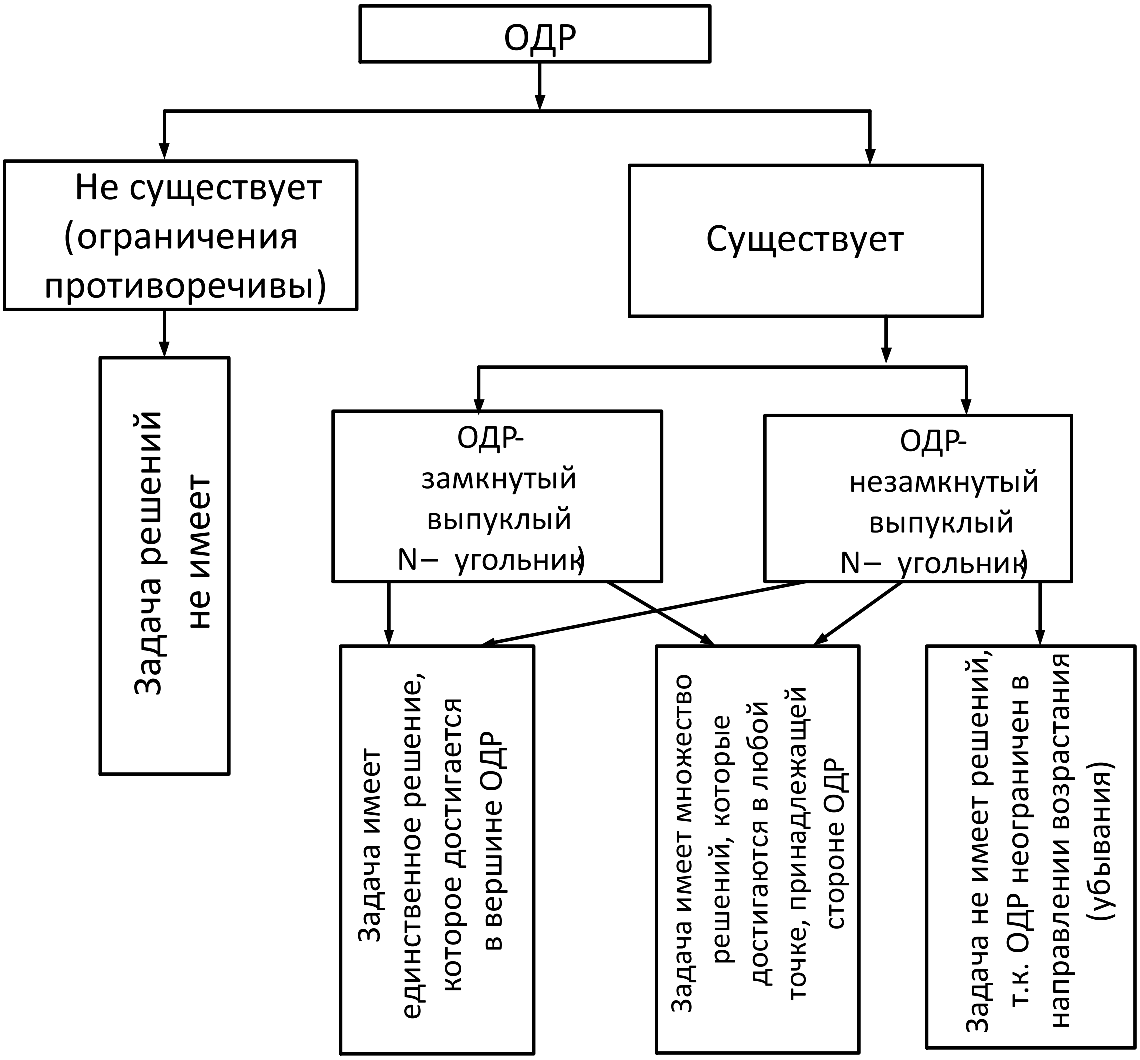


Рисунок 7 – Возможные ситуации области допустимых решений

Таким образом, исходная задача линейного программирования состоит в нахождении такой точки многоугольника решений, в которой целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение. Эта точка существует тогда, когда многоугольник решений не пуст и на нем целевая функция ограничена сверху (снизу). При указанных условиях в одной из вершин многоугольника решений целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение.

Для решения ЗЛП с двумя переменными используют следующий алгоритм:

1) строится область допустимых значений переменных, являющихся решениями соответствующих неравенств – допустимый многоугольник X;

2) изображается целевой вектор $\bar{n} = (c_1; c_2)$;

3) через допустимое множество проводится перпендикуляр к целевому вектору – это линия уровня целевой функции;

4) линию уровня параллельно самой себе перемещают по направлению (против направления) целевого вектора до тех пор, пока не определится последняя точка касания с многоугольником X. Эта точка и будет точкой максимума (минимума);

5) вычисляют значение целевой функции в точке максимума (минимума).

Геометрическое решение задачи ЗЛП с двумя переменными представлено на рисунке 8.

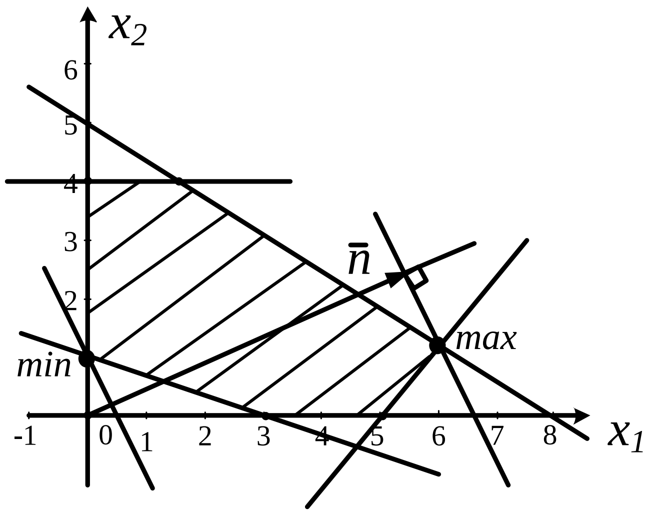


Рисунок 8 – Геометрическая иллюстрация решения задачи ЗЛП

Решением ЗЛП, исходя от вида ОДР и целевой функции F(x), могут быть следующие случаи:

- единственное решение (a) (рисунок 9),
- отрезок прямой (b) (рисунок 10),
- бесконечное множество решений (c) (рисунок 11),
- нет ни одного оптимального решения (d) (рисунок 12).

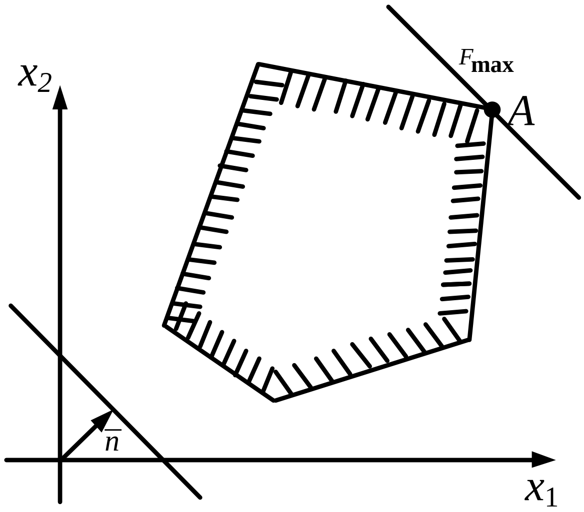


Рисунок 9 – Единственное решение (a)

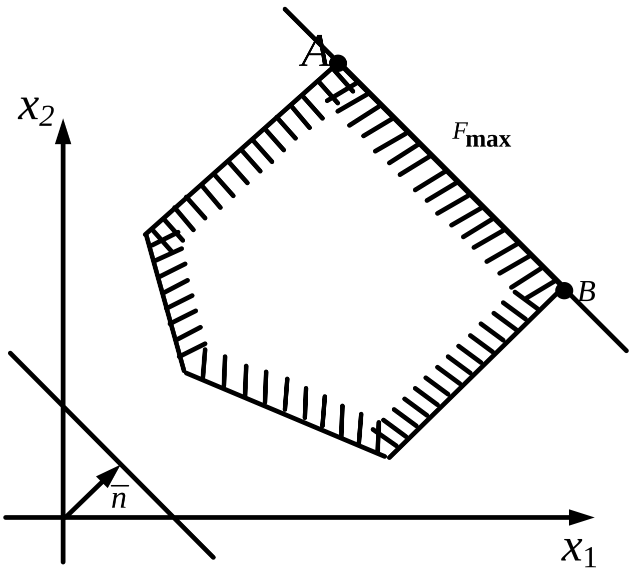


Рисунок 10 – Отрезок прямой (*b*)

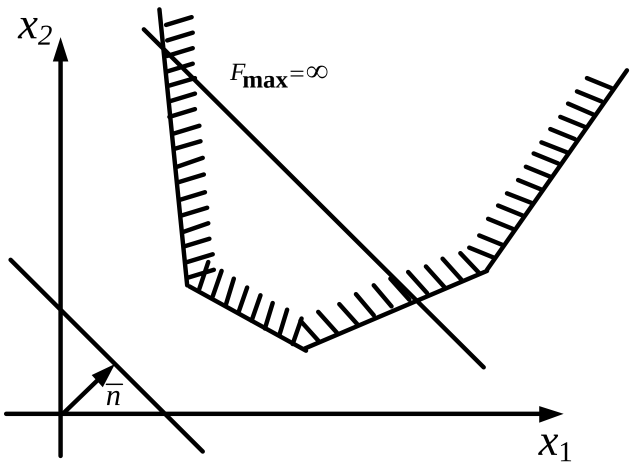


Рисунок 11 – Бесконечное множество решений (*c*)

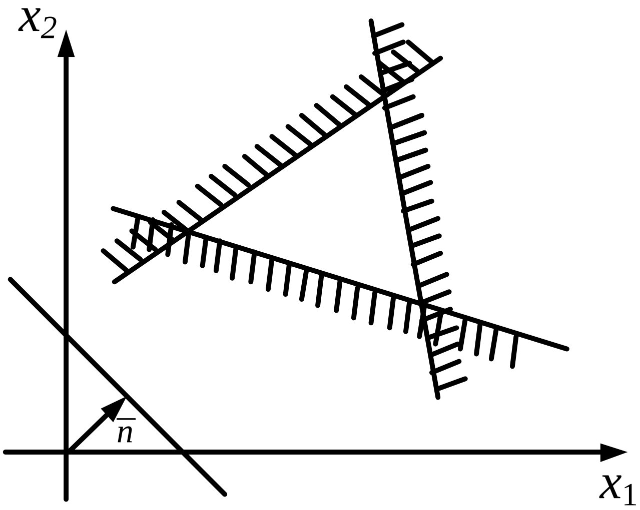


Рисунок 12 - Нет ни одного оптимального решения (d)

Пример 1. Хозяйству требуется не более 6 шт. двухтонных и не более 4 шт. пятитонных автомашин. На приобретение машин у хозяйства имеется 40 у.е., а стоимость одной машины равна 5у.е. и 8 у.е. соответственно. Сколько следует приобрести машин каждой марки, чтобы их суммарная грузоподъемность была максимальной?

Решение. Для составления математической модели обозначим:

x_1 – количество двухтонных машин;

x_2 – количество пятитонных машин.

Учитывая условие задачи, получаем систему ограничений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \le 40, \\ x_1 \le 6, \\ .x_2 \le 4. \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Суммарную грузоподъемность машин можно выразить в виде линейной функции $f(x) = 2x_1 + 5x_2$.

Стандартная математическая модель задачи:

$$f(x) = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \le 40, \\ x_1 \le 6, \\ .x_2 \le 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Решим ЗЛП геометрическим способом.

Для построения прямой $5x_1 + 8x_2 = 40$ определим точки пересечения ее с осями координат, то есть для данной прямой имеем таблицу значений:

x_1	0	8
x_2	5	0

Возьмем точку (0; 0) и подставим в неравенство $5x_1 + 8x_2 \le 40$, получим $0 \le 40$ - неравенство выполняется $\Rightarrow$ данному неравенству соответствует нижняя полуплоскость, содержащая точку (0; 0).

Построим прямые $x_1 = 6$, $x_2 = 4$.

Неравенство $x_1 \le 6$ геометрически определяет полуплоскость, лежащую левее граничной прямой $x_1 = 6$. Решением неравенства $x_2 \le 4$ является нижняя полуплоскость с граничной прямой $x_2 = 4$.

Решением неравенств $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ является I четверть плоскости X_1OX_2.

Выпуклый пятиугольник *ABCDE*, имеющий пять угловые точки *A*(0; 0), *B*(0; 4), *C*(1,6; 4), *D*(6; 1,33) является областью допустимых решений системы неравенств (рисунок 13).

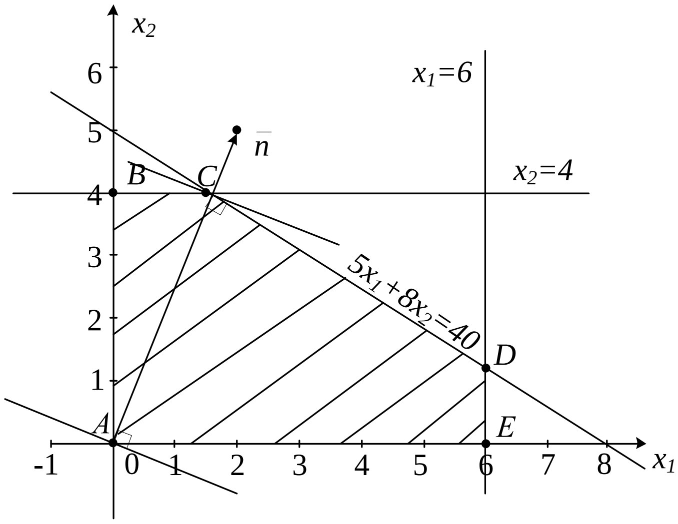


Рисунок 13 – Область допустимых решений системы неравенств

Построим вектор $\bar{n} = (2;5)$ и прямую $2x_1 + 5x_2 = 0$, она будет проходить через начало координат перпендикулярно вектору $\bar{n} = (2;5)$. Перемещая линию уровня по направлению вектора $\bar{n}$, получим, что на пятиугольнике решений максимальное значение линейной формы будет достигнуто в угловой точке *C*(1,6; 4):

$$F_{\max} = 2 \cdot 1{,}6 + 5 \cdot 4 = 23{,}2.$$

Так как по смыслу задачи переменные x_1 и x_2 – количество машин, следовательно, они должны быть целочисленные, то линию уровня передвигаем назад до нахождения ближайшей целой точки (1; 4):

$$F_{\max} = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 = 22.$$

Таким образом, для того, чтобы суммарная грузоподъемность машин была максимальной, хозяйству следует приобрести 1 двухтонную машину и 4 пятитонных машин. Любой другой вариант приобретения машин дает меньшую суммарную грузоподъёмность.

Пример 2. Агрофирма для кормления животных использует два вида корма I и II, которые содержат питательные вещества S_1, S_2, S_3. В рационе животного на один день должно быть не менее 9 ед. питательного вещества S_1, 8 ед. вещества S_2, 12 ед. вещества S_3. Стоимость 1 кг корма I составляет 7 ден. ед., корма II – 5 ден. ед. Содержание количества единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Содержание количества единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма

Питательные вещества	Кол-во единиц питательных веществ в 1 кг корма	
	корм I	корм II
S_1	3	1
S_2	1	2
S_3	1	6
Цена 1 кг корма, ден. ед.	7	5

Необходимо составить такой дневной рацион, который бы имел минимальную стоимость, а содержание питательных веществ каждого вида не выходило бы за нормы допустимого.

Решение. Для составления математической модели обозначим:

x_1 - количество корма I;

x_2 - количество корма II,

входящих в дневной рацион животных.

Принимая во внимание значения, приведенные в таблице 1, и условие, что дневной рацион удовлетворяет требуемой питательности только в случае, если количество единиц питательных веществ не меньше предусмотренного, получаем систему ограничений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12. \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Общую стоимость рациона можно выразить в виде линейной функции $f(x) = 7x_1 + 5x_2$.

Стандартная математическая модель задачи: необходимо найти значения x_1 и x_2, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9, \\ x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + 6x_2 \ge 12. \end{cases}$$

условиям $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, при которых линейная функция $f(x)=7x_1+5x_2$ принимает минимальное значение.

Решим ЗЛП геометрическим способом.

Для построения прямой $3x_1+x_2=9$ определим точки пересечения ее с осями координат, то есть для данной прямой имеем таблицу значений:

x_1	0	3
x_2	9	0

Определим какая полуплоскость соответствует неравенству $3x_1 + x_2 \ge 9$. Возьмем точку (0;0) и подставив в неравенство, получим $0 \ge 9$ - неравенство не выполняется $\Rightarrow$данному неравенству соответствует верхняя полуплоскость, не содержащая точку (0; 0).

Аналогично, для прямой $x_1 + 2x_2 = 8$ имеем таблицу значений:

x_1	0	8
x_2	4	0

Определим какая полуплоскость соответствует неравенству $x_1 + 2x_2 \ge 8$. Возьмем точку (0;0) и подставив в неравенство, получим $0 \ge 8$ - неравенство не выполняется $\Rightarrow$данному неравенству соответствует верхняя полуплоскость, не содержащая точку (0; 0).

Аналогично строим прямую $x_1 + 5x_2 = 12$, для нее соответствует таблица значений:

x_1	0	12
x_2	2	0

Для определения полуплоскости берем точку (0;0), имеем $0 \ge 12$ - неравенство не выполняется $\Rightarrow$данному неравенству соответствует верхняя полуплоскость, не содержащая точку (0; 0).

Решением неравенств $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ является I четверть плоскости X_1OX_2.

Область *ABCDEF* – это открытая область допустимых решений системы неравенств (рисунок 14).

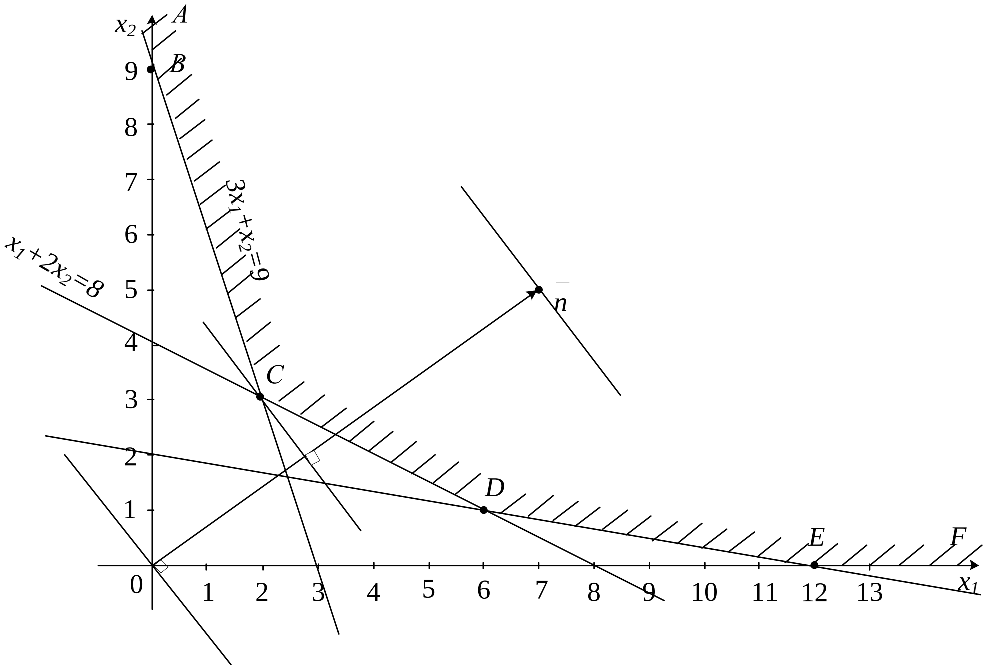


Рисунок 14 – Область допустимых решений системы неравенств

Построим вектор $\bar{n}=(7;5)$ и прямую $7x_1 + 5x_2 = 0$, которая будет проходить через начало координат и перпендикулярно вектору $\bar{n}=(7;5)$. Так как в задаче требуется найти минимум, значит, перемещаем линию уровня против направления вектора $\bar{n}$ и минимальное значение линейной формы будет достигнуто в угловой точке C.

Для нахождения координат точки C, необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ 3x_1 + x_2 = 9. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - 2x_2, \\ 3(8 - 2x_2) + x_2 = 9. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Следовательно, линейная форма достигает минимального значения в точке $C(2; 3)$:

$$F_{\min} = 7\cdot 2 + 5\cdot 3 = 29.$$

Таким образом, дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, состоит из 2 ед. корма I и 3 ед. корма II.

Вопросы для самоконтроля

1) Какие задачи линейного программирования можно решить графическим методом?

2) Какую область образуют допустимые решения задачи линейного программирования и что она собой представляет?

3) Какое множество называется выпуклым?

4) Что такое угловая точка?

5) Где целевая функция задачи линейного программирования достигает своего экстремального значения?

6) Какая зависимость существует между областью определения задачи и ее решением?

7) Какие возможны исходы при решении задачи линейного программирования?

8) Что показывает направляющий вектор $\bar{n}$?

9) Что такое линии уровня?

10) Как строится линия уровня?

Задания для самостоятельной работы

Найти наибольшее и наименьшее значения функции геометрическим методом. Во всех задачах $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

1) $F = x_1 + 5x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_2 \leq 4, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 \leq 6. \end{cases}$$

2) $F = 4x_1 - 2x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 1. \end{cases}$$

3) $F = 4x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ 2x_1 - x_2 \leq 8, \\ -x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_2 \leq 5. \end{cases}$$

4) $F = -5x_1 + x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \leq 2. \end{cases}$$

5) $F = 2x_1 + 2x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 2. \end{cases}$$

6) $F = -4x_1 - x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 5, \\ -5x_1 + 2x_2 \leq 10. \end{cases}$$

7) $F = 3x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 5. \end{cases}$$

8) $F = -x_1 + 3x_2 \to \min$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_2 \geq 1, \\ x_1 - 3x_2 \leq 6. \end{cases}$$

9) $F = x_1 + 3x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \leq 8. \end{cases}$$

10) $F = x_1 + 2x_2 \to \min$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 16, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 2, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

11) $F = x_1 + 4x_2 \to \max$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \leq 4. \end{cases}$$

12) $F = -3x_1 + 2x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ -x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 6. \end{cases}$$

13) $F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ -2x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \leq 2, \\ x_2 \leq 5. \end{cases}$$

14) $F = 3x_1 + 4x_2 \to \min$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3, \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 42, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

15) $F = x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 4. \end{cases}$$

16) $F = 3x_1 - 4x_2 \to \min$

17) $F = x_1 + x_2 \to \max$

18) $F = -6x_1 - 2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 9, \\ 3x_1 - x_2 \ge 3, \\ x_1 \le 4, \\ -x_2 \le 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1 \le 3, \\ x_2 \ge 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \le 3. \end{cases}$$

19) $F = 2x_1+x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ -8x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \le 3. \end{cases}$$

20) $F = -3x_1 +2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + x_2 \le 3, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_2 \ge 1, \\ x_1 - 3x_2 \le 6. \end{cases}$$

21) $F = x_1-2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -1, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ 2x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 \le 5. \end{cases}$$

22) $F = 4x_1 - x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 0, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 5, \\ 2x_1 \le 3, \\ 4x_2 \le 5. \end{cases}$$

23) F = 4x1+4x2→max

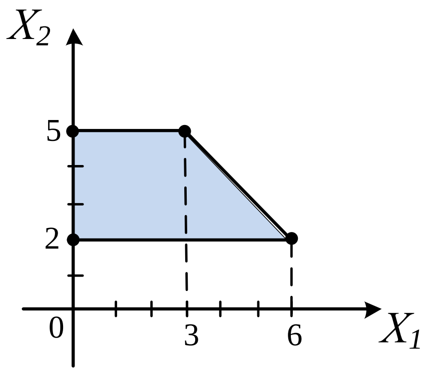
$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \le 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \le 3, \\ x_1 + 3x_2 \ge 4. \end{cases}$$

24) $F = 3x_1 +2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 7, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 8, \\ -3x_1 + x_2 \le 8, \\ 2x_2 \ge 5. \end{cases}$$

Тестовые задания

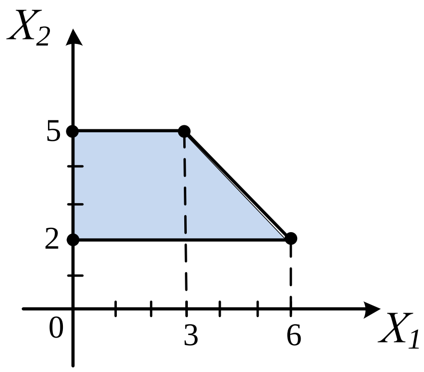
1. Область допустимых решений задачи линейного программирования имеет вид



Тогда максимальное значение функции $Z=X_1+2X_2$ равно

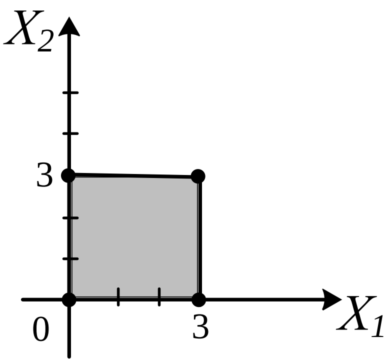
1) 17 2) **13** 3) 10 4) 4

2. Область допустимых решений задачи линейного программирования имеет вид



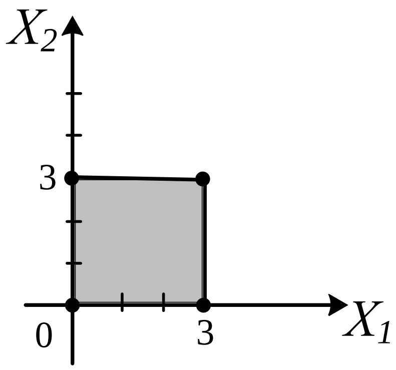
Тогда минимальное значение функции $Z=X_1+2X_2$ равно
1) 17 2) 13 3) 10 4) **4**

3. Область допустимых решений задачи линейного программирования имеет вид



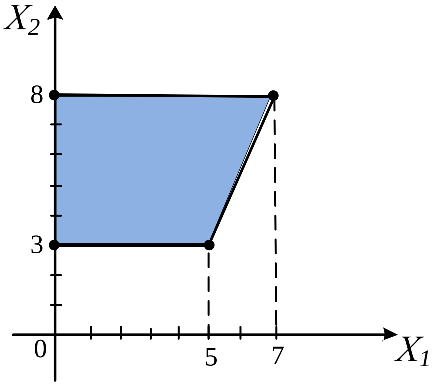
Тогда максимальное значение функции $Z=2X_1-X_2$ равно
1) -3 2) 3 3) **6** 4) 9

4. Область допустимых решений задачи линейного программирования имеет вид



Тогда минимальное значение функции $Z=2X_1-X_2$ равно
1) -6 2) **-3** 3) 0 4) 6

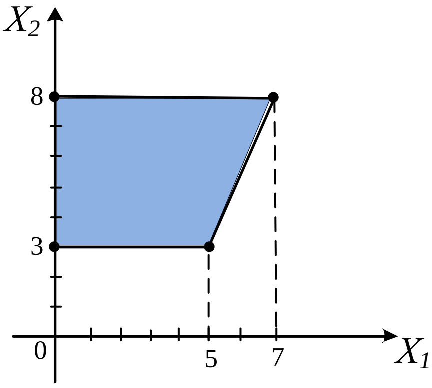
5. Область допустимых решений задачи линейного программирования имеет вид



Тогда максимальное значение функции $Z=2X_1+2X_2$ равно

1) -24 2) 32 3) **30** 4) 56

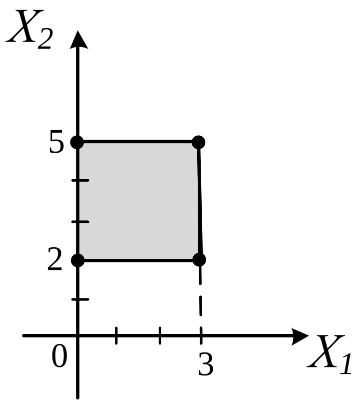
6. Область допустимых решений задачи линейного программирования имеет вид



Тогда минимальное значение функции $Z=2X_1+2X_2$ равно

1) 9 2) **6** 3) 4 4) 5

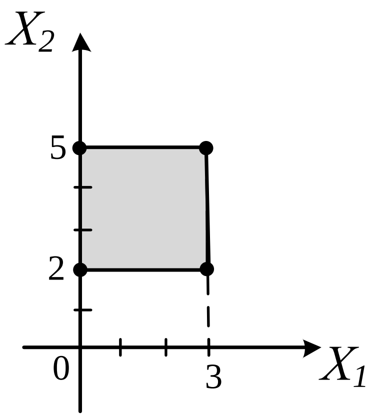
7. Область допустимых решений задачи линейного программирования имеет вид



Тогда максимальное значение функции $Z=2X_1+3X_2$ равно

1) 38 2) **21** 3) 14 4) 10

8. Область допустимых решений задачи линейного программирования имеет вид



Тогда минимальное значение функции Z=2X_1+3X_2 равно

1) 8　　2) **6**　　3) 4　　4) 10

9. Максимальное значение целевой функции Z=2X_1+X_2 при ограничениях

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \le 6 \\ X_1 \le 4 \\ X_1 \ge 0, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

равно…

1) 18　　2) 12　　3) **10**　　4) 8

10. Минимальное значение целевой функции Z=2X_1–3X_2 при ограничениях

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \le 6 \\ X_1 \le 4 \\ X_1 \ge 0, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

равно…

1) -20　　2) -18　　3) **0**　　4) 4

11. Максимальное значение целевой функции Z=2X_1+X_2 при ограничениях

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \le 4 \\ X_2 \le 3 \\ X_1 \ge 0, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

равно…

1) 4　　2) 0　　3) -8　　4) **8**

12. Минимальное значение целевой функции Z=X_1–3X_2 при ограничениях

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \le 4 \\ X_2 \le 3 \\ X_1 \ge 0, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

равно…

1) -16　　2) -9　　3) **0**　　4) 12

13. Минимальное значение целевой функции $Z=2X_1+5X_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \le 6 \\ X_1 \le 4 \\ X_1 \ge 0, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

равно…

1) **30** 2) 8 3) 0 4) -2

14. Максимальное значение целевой функции $Z=X_1-3X_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \le 6 \\ X_1 \le 4 \\ X_1 \ge 0, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

равно…

1) -2 2) 0 3) **4** 4) 18

15. В каком направлении сдвигают линию уровня целевой функции при решении задачи линейного программирования на максимум

1) ***по направлению целевого вектора*** $\bar{n}$

2) против направления целевого вектора $\bar{n}$

3) по области допустимых решений

16. В каком направлении сдвигают линию уровня целевой функции при решении задачи линейного программирования на минимум

1) по направлению целевого вектора $\bar{n}$

2) ***против направления целевого вектора*** $\bar{n}$

3) по области допустимых решений

6. СИМПЛЕКС - МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Графическим методом решаются обычно ЗЛП, которые содержат две переменные (если в задаче количество переменных три и более трех, то представить ОДР графически вызывает затруднения). Для решения задач, имеющих более двух переменных, применяют симплекс метод – метод последовательного улучшения планов.

Симплекс метод – это метод последовательного перехода от одного базисного решения (вершины многогранника решений) системы ограничений задачи линейного программирования к другому базисному решению до тех пор, пока функция цели не примет оптимального значения (максимума или минимума).

Симплекс метод был предложен американским математиком Р. Данцигом в 1947 году, с тех пор для нужд промышленности этим методом нередко решаются задачи линейного программирования с тысячами переменных и ограничений.

Всякое неотрицательное решение системы ограничений называется ***допустимым*** *решением*.

Пусть имеется система m ограничений с n переменными ($m < n$).

Допустимым базисным решением является решение, содержащее m неотрицательных основных (базисных) переменных и n - m неосновных (небазисных, или свободных) переменных.

Базисное решение называется **недопустимым базисным решением,** если в нем значение хотя бы одной переменной меньше нуля.

Неосновные переменные в базисном решении равны нулю, основные же переменные, как правило, отличны от нуля, то есть являются положительными числами.

Любые m переменных системы m линейных уравнений с n переменными называются ***основными (базисными)***, если определитель из коэффициентов при них отличен от нуля. Тогда остальные n - m переменных называются ***неосновными (или свободными).***

Алгоритм симплекс – метода

1. Приводим задачу к каноническому виду.

2. Если в полученной системе m уравнений, то:

- m переменных необходимо принять за базисные (основные), а n - m за свободные (неосновные);

- выразить базисные (основные) переменные через свободные (неосновные);

- найти соответствующее базисное решение.

Если первое найденное базисное решение окажется недопустимым, то с помощью симплекс метода осуществляется переход к другим базисным решениям, которые приближают нас к области допустимых решений, пока на каком-то шаге решения базисное решение окажется допустимым. Если первое же найденное базисное решение оказалось допустимым, то проверяют его на оптимальность. Если оно не оптимально, то, осуществляется переход к другому, обязательно допустимому базисному решению.

3. Проверка на оптимальность - выразить целевую функцию через свободные (неосновные) переменные допустимого базисного решения. Если отыскивается максимум (минимум) целевой функции и в её выражении нет свободных (неосновных) переменных с положительными (отрицательными) коэффициентами, то критерий оптимальности выполнен и полученное базисное решение является оптимальным - решение окончено. Если при нахождении максимума (минимума) целевой функции в её выражении имеется одна или несколько свободных (неосновных) переменных с положительными (отрицательными) коэффициентами, то необходимо перейти к новому базисному решению. Из свободных (неосновных) переменных, входящих в целевую функцию с положительными (отрицательными) коэффициентами, выбирают ту, которой соответствует наибольший коэффициент, и переводят её в основные.

4. Далее устанавливается, какая базисная (основная) переменная должна быть переведена в число свободных (неосновных). Для этого используют правило: находят отношения свободных членов к коэффициентам при переменной, переводимой в базисные (основные) из всех уравнений, где знаки свободных членов и указанных коэффициентов противоположны. Для уравнений, в которых свободные члены и указанные коэффициенты при переменной одного знака (т.е. оба положительные или оба отрицательные) или переменная, переводимая в основные, в них отсутствует, эти отношения считают равными ∞. Из найденных оценочных отношений выбирают наименьшее и тем самым решают, какая из базисных (основных) переменных перейдет в свободные (неосновные). Соответствующее уравнение выделяют и называют разрешающим.

5. Выражают новые базисные (основные) переменные и целевую функцию через новые свободные (неосновные) переменные, начиная с разрешающего уравнения.

6. Повторяют п.2 – 5 алгоритма до тех пор, пока не будет достигнут критерий оптимальности.

Задача. Небольшая фирма планирует выпускать три вида изделий B_1, B_2, B_3; для их производства требуется три вида машин A_1, A_2, A_3. Для машин типа A_1 требуется машинного рабочего времени – 48 ч, для машин типа A_2 – 60 ч, для машин типа A_3 – 36 ч. Стоимость одного изделия каждого вида составляет 6, 4 и 3 тыс. руб. соответственно. Затраты рабочего времени каждой из машин на производство одного изделия представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Затраты рабочего времени каждой из машин

Виды машин	Изделия			Всего машинного рабочего времени
	B_1	B_2	B_3	
A_1	2	4	3	48
A_2	4	2	3	60
A_3	3	0	1	36

Составить план производства изделий на фирме так, чтобы оно получало максимальную прибыль.

Решение. Для составления математической модели обозначим:

x_1 - количество изделий B_1;

x_2 - количество изделий B_2;

x_3 - количество изделий B_3.

По условию задачи эти переменные должны удовлетворять системе ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 48, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 60, \\ 3x_1 + x_3 \le 36. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Требуется найти план, доставляющий максимальное значение функции прибыли $f(x) = 6x_1 + 4x_2 + 3x_3$.

Приведем задачу к каноническому виду, добавим дополнительные неотрицательные переменные x_4, x_5, x_6:

$$f(x) = 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 48, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 60, \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 36. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Найдем любое базисное решение.

I шаг. x_4, x_5, x_6. – базисные переменные;

x_1, x_2, x_3 – свободные переменные.

Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_4 = 48 - 2x_1 - 4x_2 - 3x_3, \\ x_5 = 60 - 4x_1 - 2x_2 - 3x_3, \\ \boxed{x_6 = 36 - 3x_1 - x_3}. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Базисное решение (0; 0; 0; 48; 60; 36) не содержит отрицательных чисел, поэтому оно является допустим. Проверим данное допустимое базисное решение на оптимальность, для этого подставляем базисные переменные в функцию:

$$f(x) = 6x_1 + 4x_2 + 3x_3.$$

Значение функции $f(x) = 0$ не является оптимальным (максимальным), так как содержит переменные x_1, x_2, x_3 со знаком «+». Переменная x_1 может быстрее увеличить значение функции $f(x)$ (т.к. коэффициент больше, чем у остальных), поэтому ее не выгодно считать свободной. Переведем переменную x_1 в базисные переменные.

Найдем минимальное значение отношения свободного члена к коэффициенту при x_1, причем знаки у них должны быть противоположными (в противном случае пишут ∞):

$x_1 = min\{42/2;\ 60/4;\ 36/3\} = 12.$

Минимальное отношение соответствует третьему ограничению, поэтому x_6 переходит в свободные переменные.

II шаг. x_1, x_4, x_5. – базисные переменные;

x_2, x_3, x_6 – свободные переменные.

Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_4 = 48 - 2(12 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6) - 4x_2 - 3x_3, \\ x_5 = 60 - 4(12 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6) - 2x_2 - 3x_3, \\ x_1 = 12 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим:

$$\begin{cases} \boxed{x_4 = 24 - 4x_2 - \frac{7}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_6}, \\ x_5 = 12 - 2x_2 - \frac{5}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_6, \\ x_1 = 12 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Базисное решение (12; 0; 0; 24; 12; 0) проверим на оптимальность, для этого подставляем базисные переменные в функцию:

$$f(x) = 6(12 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_6) + 4x_2 + 3x_3 = 72 + 4x_2 + x_3 - x_6.$$

Значение функции $f(x) = 72$ не является оптимальным (максимальным), так как содержит переменные x_3, x_2 со знаком «+». Переменная x_2 может быстрее увеличить значение функции $f(x)$ (т.к. коэффициент больше, чем у остальных). Переведем переменную x_2 в базисные переменные.

Найдем минимальное значение отношения свободного члена к коэффициенту при x_2, причем знаки у них должны быть противоположными (в противном случае пишут ∞):

$x_2 = min\{24/4;\ 12/2;\ \infty\} = 6.$

Минимальное отношение соответствует первому ограничению, поэтому x_4 переходит в свободные переменные.

III шаг. x_1, x_2, x_5. – базисные переменные;

x_3, x_4, x_6 – свободные переменные.

Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_2 = 6 - \frac{7}{12}x_3 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{6}x_6, \\ x_5 = 12 - 2(6 - \frac{7}{12}x_3 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{6}x_6) - \frac{5}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_6, \\ x_1 = 12 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим:

$$\begin{cases} x_2 = 6 - \frac{7}{12}x_3 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{6}x_6, \\ x_5 = 0 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + x_6, \\ x_1 = 12 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Базисное решение (12; 6; 0; 0; 0; 0) проверим на оптимальность, для этого подставляем базисные переменные в функцию:

$$f(x) = 72 + 4(6 - \frac{7}{12}x_3 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{6}x_6) + x_3 - x_6 = 96 - \frac{4}{3}x_3 - x_4 - \frac{1}{3}x_6.$$

Значение функции $f(x)$ является оптимальным (максимальным), так как содержит все переменные со знаком «-». Значит, никакая переменная не может увеличить значение функции $f(x)$.

Следовательно, для получения максимальной прибыли фирме следует выпускать изделий B_1 в количестве 12, изделий B_2 в количестве 6, а изделий B_3 вообще не следует выпускать, тогда прибыль составит 96 тыс. рублей.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем состоит симплекс – метод?
2. Какое решение называют допустимым базисным решением?
3. Какое решение называют недопустимым базисным решением?
4. Какие переменные в системе уравнений называются свободными?
5. Какие переменные в системе уравнений называются базисными?
6. Как осуществляется проверка допустимого базисного решения на оптимальность?
7. Как происходит переход базисной (основной) переменной в число свободных (неосновных) переменных?
8. Через какие переменные должна быть выражена целевая функция?

Задания для самостоятельной работы

Заводу для процесса изготовления двух видов изделий A и B требуется: во-первых, наличие стали, во-вторых, последовательная обработка на токарных и фрезерных станках. Потребности каждого ресурса на единицу выпускаемого изделия, общие запасы ресурсов и прибыль от реализации изделий приведены в таблице 3:

Таблица 3 – Потребности каждого ресурса на единицу выпускаемого изделия

Производственные характеристики	Затраты на одно изделие		Ресурсы
	A	B	
Сталь, кг	20	$30 + 2n$	$120 + 10\ k$
Токарные станки, станкочасов	$100 – 2m$	200	800
Фрезерные станки, станкочасов	30	$110 – 2n$	$330 – 10\ k$
Прибыль на изделие, тыс.руб	$2 + m$	n - 2	

Примечание: вместо букв m, n, k следует подставить три последних цифры номера зачетной книжки соответственно.

Определить план выпуска продукции, который обеспечивает максимальную прибыль.

Тестовые задания

1. Чему равны небазисные переменные в опорном плане задачи линейного программирования?

1) ***нулю***

2) любым числам

3) положительным числам

2. Если при попытке решить задачу линейного программирования симплекс- методом не обнаружено необходимого числа базисных переменных, то …

1) задачу можно решить только графически

2) задача неразрешима

3) ***для решения задачи симплекс-методом необходимо ввести искусственный базис***

3. Что такое оптимальный план задачи линейного программирования?

1) любая вершина области допустимых планов

+) ***допустимый план, при подстановке которого в целевую функцию она принимает свое максимальное или минимальное значение***

3) план, с рассмотрения которого следует начать решение задачи

4. Для тела в k -мерном пространстве симплексом называется множество, состоящее из:

1) k -1 вершин этого тела
2) k +1 граней этого тела
3) ***k* +1 *вершин этого тела***

5. На сколько основных этапов разбивается решение задач с помощью симплекс-метода?
1) **2**
2) 3
3) 1

6. В каких случаях система называется определённой?
1) **при *n*=*m***
2) при $n>m$
3) при $n<m$

7. Как называются системы, в которых переменных больше, чем ограничений $n>m$?
1) определенные
2) ***неопределенные***
3) условные

8. Базисом называется любой набор из m таких переменных, что определитель, составленный из коэффициентов при этих переменных в m-ограничениях:
1) не равен 1
2) меньше 0
3) ***отличен от* 0**

9. Как ещё называются небазисные переменные?
1) ***свободные***
2) нормированные
3) нулевые

10. Через какие переменные выражается целевая функция?
1) базисные
2) через любые
3) ***небазисные***

11. Чем отличается новый набор базисных переменных на каждом шаге от предыдущего?
1) ***двумя переменными***
2) одной переменной
3) всеми переменными

12. Нахождением какого базисного решения завершается первый этап?
1) максимального
2) оптимального

3) ***допустимого***

13. Процесс решения, используя симплекс-метод, продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто:

1) наименьшее значение
2) наибольшее значение
3) ***наименьшее или наибольшее значение***

14. Какого правила выбора вводимых и исключающих переменных в симплекс-методе нет?

1) условия допустимости
2) условия оптимальности
3) ***условия кумулятивности***

15. Как называется последнее базисное решение?

1) допустимое
2) ***оптимальное***
3) максимальное

16. К какому виду нужно привести задачу, для решения ее симплекс-методом?

1) ***к каноническому***
2) к графическому
3) к базисному

7. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В агропромышленном комплексе в производственном процессе часто приходится сталкиваться с множеством проблем, таких как: необходимость быстрой перевозки сельскохозяйственной продукции, быстрой переработки информации о состоянии полей, динамичность агроклиматических факторов, острая ограниченность во времени, характерная для определенных периодов сельскохозяйственного производства. Использование математических моделей оптимизации землепользования позволяют решить задачи, связанные с экологическими проблемами, планированием рационального природопользования.

В задачах такого вида требуется найти такой оптимальный план, в результате которого бы в зависимости от поставленной задачи, получили наименьшие затраты или наибольшую прибыль и такие задачи называют транспортными.

Транспортные задачи могут быть решены симплексным методом, однако матрица системы ограничений транспортной задачи настолько своеобразна, что для ее решения разработаны специальные методы. Эти методы, как и симплексный метод, позволяют найти начальное опорное решение, а затем, улучшая его получить оптимальное решение. Транспортная задача может также решаться с ограничениями и без ограничений.

Формулировка транспортной задачи. Имеется m пунктов $A_1, A_2, \ldots, A_m$, в которых имеются запасы груза в количестве $a_1, a_2, \ldots, a_m$ единиц и имеется n пунктов назначения $B_1, B_2, \ldots, B_n$, подавших заявки на $b_1, b_2, \ldots, b_n$ единиц товара соответственно.

Стоимость c_{ij} перевозок единицы груза из пункта A_i в пункт B_j называют истинным тарифом.

	B_1	B_2	…	B_n	*Запасы* a_i
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m
Заявки b_j	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Математическая формулировка задачи. Пусть x_{ij} – количество единиц груза, отправляемого из i–го пункта A_i в j–й пункт B_j . Запишем системы ограничений:

1) все грузы должны быть вывезены, т.е.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m, \end{cases}$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \text{ , } i = 1, \ldots, m;$$

2) все потребности должны быть удовлетворены, т.е.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n, \end{cases}$$

или

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1, \ldots, n.$$

Суммарная стоимость затрат перевозки груза x_{ij} из A_i в B_j, должна быть минимальной, т.е.

$F = c_{11}\,x_{11} + c_{12}\,x_{12} + \ldots + c_{1n}\,x_{1n} + c_{21}\,x_{21} + c_{22}\,x_{22} + \ldots + c_{2n}\,x_{2n} + \ldots + c_{m1}\,x_{m1} + + c_{m2}\,x_{m2} + \ldots + c_{mn}\,x_{mn} \rightarrow min$

Требуется найти минимальное значение целевой функции $F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i, i = 1,\ldots,m; \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1,\ldots,n; \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

Транспортная задача считается закрытой, если $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, в противном случае – открытой.

	B_1	B_2	B_3	B_4	*Запасы* a_i
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	*150*
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	*150*
A_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	*200*
Заявки b_j	*100*	*150*	*130*	*120*	$\sum = 500$

Запасов: 150+150+200=500 и заявок:100+150+130+120=500 одинаковое количество, следовательно, задача закрытая.

В случае, если задача открытая, то ее приводят к закрытому виду следующим образом:

1) Если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводится $(n + 1)$ пункт оправления с запасами $a_{m+1} = \sum b_j - \sum a_j$ и истинными тарифами c_j, $m + 1 = 0$, где $j = 1, \ldots, n$.

	B_1	B_2	B_3	B_4	*Запасы* a_i
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	*150*
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	*150*
A_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	*200*
Заявки b_j	*100*	*150*	*180*	*120*	$\sum_{i=1} a_i < \sum_{j=1} b$

В данном случае заявок: 100+150+180+120=550, а запасов: 150+150+200=500, следовательно, задача открытая. Вводится новый пункт отправления A_4 с запасом, равным 50 и с нулевыми истинными тарифами.

	B_1	B_2	B_3	B_4	*Запасы* a_i
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	*150*
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	*150*
A_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	*200*
A_4	$c_{41}=0$	$c_{42}=0$	$c_{43}=0$	$c_{44}=0$	*50*
Заявки b_j	*100*	*150*	*180*	*120*	$\sum = 550$

2) Если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводится (m+1) пункт назначения с заявкой $b_{n+1} = \sum a_i - \sum b_j$ и истинными тарифами c_i , $n + 1 = 0$, где $i = 1, \ldots, m$.

	B_1	B_2	B_3	B_4	*Запасы* a_i
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	*150*
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	*150*
A_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	*250*
Заявки b_j	*100*	*150*	*130*	*120*	$\sum_{i=1} a_i > \sum_{j=1} b$

В данном случае заявок: 100+150+130+120=500, а запасов: 150+150+250= 550, следовательно, задача открытая. Вводится новый пункт назначения B_5 с заявкой, равной 50 и с нулевыми истинными тарифами.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	*Запасы* a_i
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	$c_{15}=0$	*150*
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	$c_{25}=0$	*150*
A_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	$c_{35}=0$	*250*
Заявки b_j	*100*	*150*	*130*	*120*	*50*	$\sum = 550$

Определение опорного плана транспортной задачи. Как и при решении задачи линейного программирования симплексным методом, определение оптимального плана транспортной задачи начинают с нахождения какого-нибудь ее опорного плана.

Этот план находят методом северо-западного угла, методом **наименьшего** (минимального) **тарифа.**

Метод «северо-западного угла». При нахождении опорного плана транспортной задачи методом «северо-западного угла» на каждом шаге рассматривают первый из оставшихся пунктов отправления и первый из оставшихся пунктов назначения. Заполнение клеток таблицы условий начинается с левой верхней клетки для неизвестного x_{11} («северо-западный угол») и заканчивается клеткой для неизвестного x_{mn}.

Пример. На трех базах A_1, A_2, A_3 находится однородный груз в количестве 200, 200, 100 тонн. Этот груз необходимо развести пяти потребителям B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, потребности которых в данном грузе составляют 70, 80, 150, 110, 90 тонн соответственно. Стоимость перевозок единицы продукции от i-го поставщика к j-му потребителю c_{ij} представлена матрицей:

$$\begin{pmatrix} 4 & 11 & 6 & 5 & 15 \\ 8 & 7 & 9 & 13 & 10 \\ 9 & 5 & 12 & 7 & 20 \end{pmatrix}$$

Требуется установить такие объемы перевозок x_{ij} от каждого поставщика к каждому потребителю, чтобы суммарные затраты на перевозки были минимальными и потребности всех потребителей были удовлетворены.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	4	11	6	5	15	200
A_2	8	7	9	13	10	200
A_3	9	5	12	7	20	100
Заявки b_j	70	80	150	110	90	∑=500

Найдем опорный план данной задачи методом «северо – западного угла».

В методе «северо-западного» угла каждый раз начинают с левой верхней клетки – «северо-западного угла» таблицы поставок распределение груза в пункты назначения, причем истинные тарифы не учитываются. Решение распишем по пунктам.

1. В клетку A_1B_1 запишем $min\{70,200\}$ = 70, спрос потребителя B_1 удовлетворен.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	70 (4)	11	6	5	15	200-70
A_2	8	7	9	13	10	200
A_3	9	5	12	7	20	100
Заявки b_j	70	80	150	110	90	∑=500

2. В таблице поставок находим новый «северо-западный угол» – A_1B_2. Записываем $min\{200\text{-}70,80\}$= 80, спрос потребителя B_2 удовлетворили.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	4 70	11 80	6	5	15	200-70-80
A_2	8	7	9	13	10	200
A_3	9	5	12	7	20	100
Заяв-ки b_j	70	80	150	110	90	∑=500

3. В клетку A_1B_3 записываем $min\{200\text{-}70\text{-}80,\ 150\} = 50$, запас поставщика A_1 распределили.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	4 70	11 80	6 50	5	15	200-70-80
A_2	8	7	9	13	10	200
A_3	9	5	12	7	20	100
Заяв-ки b_j	70	80	150-50	110	90	∑=500

4. Новый «северо-западный угол» – A_2B_3, получаем для данной клетки значение $min\{200,150\text{-}50\}= 100$ - спрос потребителя B_3 удовлетворили.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	4 70	11 80	6 50	5	15	200-70-80
A_2	8	7	9 100	13	10	200-100
A_3	9	5	12	7	20	100
Заяв-ки b_j	70	80	150-50	110	90	∑=500

5. Теперь «северо-западный угол» – A_2B_4, записываем $min\{200\text{-}100,110\} = 100$. Следовательно, запасы второй строки распределили.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	4 70	11 80	6 50	5	15	200-70-80
A_2	8	7	9 100	13 100	10	200-100
A_3	9	5	12	7	20	100
Заяв-ки b_j	70	80	150-50	110-100	90	∑=500

6. Следующий «северо-западный угол» – A_3B_5, получаем $min\{100,110-100\}= 10$ - спрос потребителя B_4 удовлетворили.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	70 [4]	80 [11]	50 [6]	[5]	[15]	200-70-80
A_2	[8]	[7]	100 [9]	100 [13]	[10]	200-100
A_3	[9]	[5]	[12]	10 [7]	[20]	100-10
Заявки b_j	70	80	150-50	110-100	90	∑=500

7. В таблице остался последний «северо-западный угол» – A_3B_4, для данной клетки значение $min\{100\text{-}10,90\}= 90$. Все запасы распределили, спросы потребителей удовлетворили.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	70 [4]	80 [11]	50 [6]	[5]	[15]	200-70-80
A_2	[8]	[7]	100 [9]	100 [13]	[10]	200-100
A_3	[9]	[5]	[12]	10 [7]	90 [20]	100-10
Заявки b_j	70	80	150-50	110-100	90	∑=500

При составлении первоначального опорного плана методом «северо-западного угла» стоимость перевозки единицы груза не учитывалась, поэтому построенный план далек от оптимального. Найдем общую стоимость составленного плана как сумму произведений объемов перевозок, стоящих в левом углу занятых клеток, на соответствующие стоимости в этих же ячейках:

$$F = 70\cdot4 + 80\cdot11 + 50\cdot6 + 100\cdot9 + 100\cdot13 +10\cdot7 + 90\cdot20 = 5530.$$

Метод наименьшего (минимального) тарифа. Груз распределяют сначала в клетки с минимальным тарифом c_{ij}. Далее, учитывая оставшиеся запасы у поставщиков и спрос потребителей, распределяют в незанятые клетки с наименьшим тарифом.

Найдем исходное опорное решение методом наименьшего тарифа.

1. Смотрим по всей таблице минимальный тариф 4.

Значит, в A_1B_1 помещаем $\min\{70, 200\}=70$. Так как потребность пункта B_1 удовлетворена, то далее из рассмотрения исключаем этот столбец.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запа-сы a_i
A_1	(4) 70	(11)	(6)	(5)	(15)	200-70
A_2	(8)	(7)	(9)	(13)	(10)	200
A_3	(9)	(5)	(12)	(7)	(20)	100
Заяв-ки b_j	70	80	150	110	90	$\sum$=500

2) Следующий наименьший тариф 5.

В клетку A_1B_4 помещаем min{200-70, 110}=110 и потребность пункта B_4 удовлетворена. Исключаем этот столбец.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запа-сы a_i
A_1	(4) 70	(11)	(6)	(5) 110	(15)	200-70-110
A_2	(8)	(7)	(9)	(13)	(10)	200
A_3	(9)	(5)	(12)	(7)	(20)	100
Заяв-ки b_j	70	80	150	110	90	

3) В клетку A_3B_2 также с минимальным тарифом 5 помещаем min{100,80}= 80 и потребность пункта B_2 удовлетворена. Исключаем этот столбец.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запа-сы a_i
A_1	(4) 70	(11)	(6)	(5) 110	(15)	200-70-110
A_2	(8)	(7)	(9)	(13)	(10)	200
A_3	(9)	(5) 80	(12)	(7)	(20)	100-80
Заяв-ки b_j	70	80	150	110	90	

4. Заполняем клетку A_1B_3 с тарифом 6.

В эту клетку вписываем min{200-70-110, 150} 20, запасы A_1 распределили.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	4 70	11	6 20	5 110	15	200-70-110
A_2	8	7	9	13	10	200
A_3	9	5 80	12	7	20	100-80
Заявки b_j	70	80	150-20	110	90	

5. заполняем клетку A_2B_3 с тарифом 9.

В эту клетку вписываем min{200, 150-20} = 130, потребность пункта B_3 удовлетворена.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	4 70	11	6 20	5 110	15	200-70-110
A_2	8	7	9 130	13	10	200-130
A_3	9	5 80	12	7	20	100-80
Заявки b_j	70	80	150-20	110	90	

6. В клетку A_2B_5 с тарифом 10 помещаем min{200-130, 90}=70, запасы A_2 распределили и ее исключаем.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	4 70	11	6 20	5 110	15	200-70-110
A_2	8	7	9 130	13	10 70	200-130
A_3	9	5 80	12	7	20	100-80
Заявки b_j	70	80	150-20	110	90-70	

7. В клетку A_3B_5 с тарифом 20 вписываем min{100-80, 90-70}=20, все запасы распределили.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	4 70	11	6 20	5 110	15	200-70-110
A_2	8	7	9 130	13	10 70	200-130
A_3	9	5 80	12	7	20 20	100-80
Заявки b_j	70	80	150-20	110	90-70	

Первоначальный опорный план:

$$F = 70{\cdot}4 + 20{\cdot}6 + 110{\cdot}5 + 130{\cdot}9 + 70{\cdot}10 + +80{\cdot}5 + 20{\cdot}20 = = 3620$$

Под опорным планом транспортной задачи понимается такой допустимый план, который удовлетворяет требованию: количество заполненных клеток транспортной таблицы равно числу

$$m+n-1,$$

где m - количество поставщиков, n-количество потребителей.

В случае, когда число заполненных клеток при построении плана перевозок меньше, чем $(m + n - 1)$, то в недостающее число свободных клеток вводят нулевые поставки и далее эти клетки рассматривают как заполненные.

Проверка опорного плана на оптимальность. Одним из таких методов является метод улучшения плана, примененный к транспортной задаче. Он называется методом потенциалов. Как и в симплексном методе, в методе потенциалов сначала строится первый опорный план, то есть определяется состав базисных переменных. Затем производятся оценки свободных переменных. Если хотя бы одна оценка свободной переменной приводит к уменьшению целевой функции, то ее вводят в состав базисных переменных. После чего переходят к новым базисным переменным, определяя переменную, выходящую из базиса.

Алгоритм нахождения оптимального плана содержит следующие этапы:

1. Нахождение опорного плана.

Опорный план должен быть невырожденным, т.е. число заполненных клеток должно быть равно:

$$m+n-1,$$

где m – количество строк (поставщики с запасами груза), n – количество столбцов (потребители с заявками на товар).

Если количество базисных клеток в нем меньше, чем $m+n-1$, то план называется вырожденным. Вырожденный план необходимо пополнить, проставив в недостающем числе клеток нулевую перевозку и превратив, тем самым, эти клетки в базисные (общий баланс и суммарная стоимость перевозок плана при этом не изменятся).

Клетки, в которых введены нулевые перевозки, называются фиктивно занятыми.

2. Для анализа полученного опорного плана вводят дополнительные характеристики пунктов отправления и назначения, называемые потенциалами.

Для каждого из пунктов отправления и назначения определяют потенциалы U_i (потенциалы строк) и V_j (потенциалы столбцов) так, чтобы для всех базисных клеток плана было выполнено следующее соотношение:

$$U_i + V_j = c_{ij}.$$

3. Для свободных клеток находим оценки $d_{ij} = U_i + V_j - c_{ij}$.

Если среди оценок d_{ij} нет положительных (в транспортных задачах с целевой функцией на минимум), то получен оптимальный план транспортной задачи. Если же они имеются, то делается переход к новому опорному плану.

Транспортные задачи с целевой функцией на максимум решаются аналогично, за исключением того, что план считается оптимальным, если все оценки для свободных клеток будут больше нуля.

4. Выбор максимального среди положительных чисел d_{ij}. Определение свободной клетки, которую нужно заполнить. Построение цикла пересчета для выбранной свободной клетки. Сдвиг по циклу пересчета.

5. Проверка полученного опорного плана на оптимальность, т.е. переход к пункту 2.

Циклом в транспортной задаче называется замкнутая последовательность клеток таблицы, которые называются вершинами цикла, обладающая следующими свойствами:

1) две соседние вершины располагаются в одной строке или одном столбце. То есть геометрически, изображение цикла состоит из чередования горизонтальных и вертикальных линий, соединяющихся в вершинах цикла (рисунок 15).

2) В любой строке или столбце таблицы могут располагаться только две вершины цикла, или ни одной. Каждому циклу соответствует четное число вершин, которые отмечают знаками «+» или «–». Начиная со свободной клетки - пишут знак «+», остальные вершины имеют чередующие знаки.

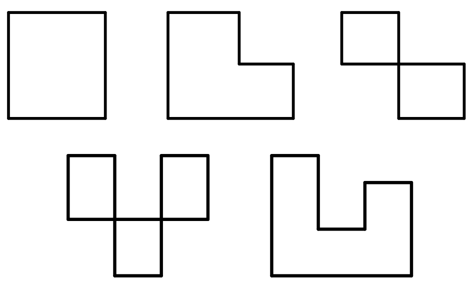


Рисунок 15 - Возможные варианты циклов

Пересчёт по циклу производят следующим образом:

1) из чисел, которые находятся в вершинах со знаком «-», находим минимальное и обозначим Δ;

2) к числам, которые находятся в вершинах со знаком «+» прибавляем Δ, а из чисел в отрицательных вершинах вычитаем Δ.

Возвращаясь к примеру, найденный исходный опорный план (методом наименьшего (минимального) тарифа) проверяем на оптимальность методом потенциалов.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	70 [4]	[11]	20 [6]	110 [5]	[15]	200
A_2	[8]	[7]	130 [9]	[13]	70 [10]	200
A_3	[9]	80 [5]	[12]	[7]	20 [20]	100
Заявки b_j	70	80	150	110	90	

Первоначальный опорный план:

$$F = 70 \cdot 4 + 20 \cdot 6 + 110 \cdot 5 + 130 \cdot 9 + 70 \cdot 10 + 80 \cdot 5 + 20 \cdot 20 = 3620$$

Этот опорный план дает значительно меньшее значение целевой функции, чем опорный план, построенный методом «северо-западного угла», значит, он приведет быстрее к оптимальному решению.

Клетки таблицы, в которые записаны отличные от нуля перевозки, называются базисными, а остальные (пустые) — свободными.

Количество базисных (заполненных) клеток транспортной таблицы равно числу:

$$m+n-1 = 3+5-1 = 7$$

Следовательно, первоначальный опорный план перевозок - невырожденный (7 = 7).

Добавим к транспортной таблице дополнительную строку и столбец для U_i и V_j.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	U_i
A_1	70 [4]	[11]	20 [6]	110 [5]	[15]	U_1
A_2	[8]	[7]	130 [9]	[13]	70 [10]	U_2
A_3	[9]	80 [5]	[12]	[7]	20 [20]	U_3
V_j	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	

Для заполненных клеток составляем систему уравнений потенциалов:

$$\begin{cases} U_1 + V_1 = 4, \\ U_1 + V_3 = 6, \\ U_1 + V_4 = 5, \\ U_2 + V_3 = 9, \\ U_2 + V_5 = 10, \\ U_3 + V_2 = 5, \\ U_3 + V_5 = 20. \end{cases}$$

Для решения данной задачи одно из неизвестных можно сделать равным нулю и найти остальные неизвестные.

Полагаем $U_1 = 0$, находим

$$\begin{cases} V_1 = 4 - U_1 = 4 - 0 = 4, \\ V_3 = 6 - U_1 = 6 - 0 = 6, \\ V_4 = 5 - U_1 = 5 - 0 = 5, \\ U_2 = 9 - V_3 = 9 - 6 = 3, \\ V_5 = 10 - U_2 = 10 - 3 = 7, \\ V_2 = 5 - U_3 = 5 - 13 = -8, \\ U_3 = 20 - V_5 = 20 - 7 = 13. \end{cases}$$

Для свободных клеток находим оценки по формуле

$$d_{ij} = U_i + V_j - c_{ij} .$$

Таким образом, получим

$$d_{12} = U_1 + V_2 - c_{12} = 0 +(-8) -11 = -19,$$
$$d_{15} = U_1 + V_5 - c_{15} = 0 +7 -15 = -8,$$
$$d_{21} = U_2 + V_1 - c_{21} = 3 +4 -8 = -1,$$
$$d_{22} = U_2 + V_2 - c_{22} = 3 +(-8) -7 = -12,$$
$$d_{24} = U_2 + V_4 - c_{24} = 3 +5 -13 = -5,$$
$$d_{31} = U_3 + V_1 - c_{31} = 13 +4 -9 = 8 > 0,$$
$$d_{33} = U_3 + V_3 - c_{33} = 13 +6 -12 = 7 > 0,$$
$$d_{34} = U_3 + V_4 - c_{34} = 13 +5 -7 = 11 > 0.$$

Так как имеются положительные оценки, значит, план не оптимальный, необходим пересчёт по циклу для одной из клеток.

Найдем цикл для клетки A_3B_4 (у нее самая большая положительная оценка) - цикл показан пунктирной линией:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	U_i
A_1	70 (4)	(11)	20 (6)	110 (5)	(15)	U_1
A_2	(8)	(7)	130 (9)	(13)	70 (10)	U_2
A_3	(9)	80 (5)	(12)	(7)	20 (20)	U_3
V_j	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	

Найдем $\Delta = \min\{130, 110, 20\} = 20$.

Старый цикл пересчета Цикл после пересчета

Рисунок 16 - Циклы пересчета единиц груза

Пересчитав единицы груза (рисунок 16), таблица поставок распределения груза в пункты назначения, имеет вид:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	70 (4)	(11)	40 (6)	90 (5)	(15)	200
A_2	(8)	(7)	110 (9)	(13)	90 (10)	200
A_3	(9)	80 (5)	(12)	20 (7)	(20)	100
Заявки b_j	70	80	150	110	90	

Для заполненных клеток находим потенциалы строк и столбцов.

$$\begin{cases} U_1 + V_1 = 4, \\ U_1 + V_3 = 6, \\ U_1 + V_4 = 5, \\ U_2 + V_3 = 9, \\ U_2 + V_5 = 10, \\ U_3 + V_2 = 5, \\ U_3 + V_4 = 7. \end{cases}$$

Полагая $U_1 = 0$, находим

$$\begin{cases} V_1 = 4 - U_1 = 4 - 0 = 4, \\ V_3 = 6 - U_1 = 6 - 0 = 6, \\ V_4 = 5 - U_1 = 5 - 0 = 5, \\ U_2 = 9 - V_3 = 9 - 6 = 3, \\ V_5 = 10 - U_2 = 10 - 3 = 7, \\ V_2 = 5 - U_3 = 5 - 2 = 3, \\ U_3 = 7 - V_5 = 7 - 5 = 2. \end{cases}$$

Для свободных клеток находим оценки:

$d_{12} = U_1 + V_2 - c_{12} = 0 + 3 - 11 = -8;$
$d_{15} = U_1 + V_5 - c_{15} = 0 + 7 - 15 = -8;$
$d_{21} = U_2 + V_1 - c_{21} = 3 + 4 - 8 = -1;$
$d_{22} = U_2 + V_2 - c_{22} = 3 + 3 - 7 = -1;$
$d_{24} = U_2 + V_4 - c_{24} = 3 + 5 - 13 = -5;$
$d_{31} = U_3 + V_1 - c_{31} = 2 + 4 - 9 = -3;$
$d_{33} = U_3 + V_3 - c_{33} = 2 + 6 - 12 = -4;$
$d_{35} = U_3 + V_5 - c_{35} = 2 + 7 - 20 = -11.$

Оценки всех свободных клеток меньше нуля, значит, полученный план перевозок является оптимальным. По этому плану:

$$F_{\text{опт}} = 70\cdot 4 + 40\cdot 6 + 90\cdot 5 + 110\cdot 9 + 90\cdot 10 + +80\cdot 5 + 20\cdot 7 = 3400 \text{ ед.}$$

Таким образом, оптимальным является решение:

x_{11} = 70 тонн груза с базы A_1 потребителю B_1;
x_{13} = 40 тонн груза с базы A_1 потребителю B_3;
x_{14} = 90 тонн груза с базы A_1 потребителю B_4;
x_{23} = 110 тонн груза с базы A_2 потребителю B_3;
x_{25} = 90 тонн груза с базы A_2 потребителю B_5;
x_{32} = 80 тонн груза с базы A_3 потребителю B_2;
x_{34} = 20 тонн груза с базы A_3 потребителю B_4.

Транспортная задача на максимум. Имеются пять участков земли для посева: 1) ржи, 2) пшеницы, 3) ячменя, 4) кукурузы. Площади участков соответственно равны 270, 250, 200, 350,430 га. Урожайность культур (ц/га) на соответствующих участках земли представлена матрицей:

$$\begin{pmatrix} 25 & 20 & 22 & 23 & 20 \\ 21 & 22 & 20 & 25 & 23 \\ 14 & 16 & 18 & 21 & 15 \\ 40 & 50 & 46 & 42 & 48 \end{pmatrix}$$

Требуется определить, сколько гектаров земли засеять каждой из культур на каждом участке земли, чтобы суммарная урожайность собранного зерна была максимальной, если известно, что из-за ограниченности в семенном фонде можно засеять рожью, пшеницей, ячменем и кукурузой соответственно 200, 500, 350 и 450 га.

Решение. Найдем исходное опорное решение (аналогично методу наименьшего тарифа зерно будем распределять в первую очередь сельскохозяйственным предприятиям с максимальным тарифом c_{ij}.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	[25]	[20]	[22]	[20]	[20]	200
A_2	[21]	[22]	[20]	[25]	[23]	500
A_3	[14]	[16]	[18]	[21]	[15]	350
A_4	[40]	[50]	[46]	[42]	[48]	450
Заявки b_j	270	250	200	350	430	∑=1500

Заполним таблицу количества каждой культуры на участках земли.

1. Максимальный тариф – 50. В клетку A_4B_2 помещаем min{450, 250}=250. Потребность пункта B_2 удовлетворена, далее этот столбец из рассмотрения исключаем.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	[25]	[20]	[22]	[20]	[20]	200
A_2	[21]	[22]	[20]	[25]	[23]	500
A_3	[14]	[16]	[18]	[21]	[15]	350
A_4	[40]	[50] 250	[46]	[42]	[48]	450-250
Заявки b_j	270	250	200	350	430	∑=1500

2. Следующий максимальный тариф – 48. В клетку A_4B_5 помещаем min{450-250, 430} = 200.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	[25]	[20]	[22]	[20]	[20]	200
A_2	[21]	[22]	[20]	[25]	[23]	500
A_3	[14]	[16]	[18]	[21]	[15]	350
A_4	[40]	[50] 250	[46]	[42]	[48] 200	450-250
Заявки b_j	270	250	200	350	430-200	∑=1500

3. В клетку A_1B_1 с тарифом 25 вписываем min{200, 270}=200.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	$\boxed{25}$ 200	$\boxed{20}$	$\boxed{22}$	$\boxed{20}$	$\boxed{20}$	200
A_2	$\boxed{21}$	$\boxed{22}$	$\boxed{20}$	$\boxed{25}$	$\boxed{23}$	500
A_3	$\boxed{14}$	$\boxed{16}$	$\boxed{18}$	$\boxed{21}$	$\boxed{15}$	350
A_4	$\boxed{40}$	$\boxed{50}$ 250	$\boxed{46}$	$\boxed{42}$	$\boxed{48}$ 200	450-250
Заявки b_j	270-200	250	200	350	430-200	∑=1500

4. Заполняем клетку A_2B_4 с тарифом 25. В эту клетку вписываем min{500, 350}=350. Потребность пункта B_4 удовлетворена, далее этот столбец из рассмотрения исключаем.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	$\boxed{25}$ 200	$\boxed{20}$	$\boxed{22}$	$\boxed{20}$	$\boxed{20}$	200
A_2	$\boxed{21}$	$\boxed{22}$	$\boxed{20}$	$\boxed{25}$ 350	$\boxed{23}$	500-350
A_3	$\boxed{14}$	$\boxed{16}$	$\boxed{18}$	$\boxed{21}$	$\boxed{15}$	350
A_4	$\boxed{40}$	$\boxed{50}$ 250	$\boxed{46}$	$\boxed{42}$	$\boxed{48}$ 200	450-250
Заявки b_j	270-200	250	200	350	430-200	∑=1500

5. Следующий максимальный тариф 23. В клетку A_2B_5 помещаем min{500-350, 430-200}=150.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	$\boxed{25}$ 200	$\boxed{20}$	$\boxed{22}$	$\boxed{20}$	$\boxed{20}$	200
A_2	$\boxed{21}$	$\boxed{22}$	$\boxed{20}$	$\boxed{25}$ 350	$\boxed{23}$ 150	500-350
A_3	$\boxed{14}$	$\boxed{16}$	$\boxed{18}$	$\boxed{21}$	$\boxed{15}$	350
A_4	$\boxed{40}$	$\boxed{50}$ 250	$\boxed{46}$	$\boxed{42}$	$\boxed{48}$ 200	450-250
Заявки b_j	270-200	250	200	350	430-200- -150	∑=1500

6. В клетку A_3B_3 с тарифом 18 вписываем min{350, 200}=200. Потребность пункта B_3 удовлетворена.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	25 200	20	22	20	20	200
A_2	21	22	20	25 350	23 150	500-350
A_3	14	16	18 200	21	15	350-200
A_4	40	50 250	46	42	48 200	450-250
Заявки b_j	270-200	250	200	350	430-200- -150	∑=1500

7. В клетку A_3B_5 с тарифом 15 вписываем min{350-200, 430-200-150}=80. Потребность пункта B_5 удовлетворена.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	25 200	20	22	20	20	200
A_2	21	22	20	25 350	23 150	500-350
A_3	14	16	18 200	21	15 80	350-200
A_4	40	50 250	46	42	48 200	450-250
Заявки b_j	270-200	250	200	350	430-200- -150	∑=1500

8) Максимальный тариф – 14. В клетку A_3B_1 помещаем min{350-200-80, 270-200}=70. Все культуры распределили.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	25 200	20	22	20	20	200
A_2	21	22	20	25 350	23 150	500-350
A_3	14 70	16	18 200	21	15 80	350-200- -80
A_4	40	50 250	46	42	48 200	450-250
Заявки b_j	270-200	250	200	350	430-200- -150	∑=1500

Число базисных переменных должно быть равно ($m + n$ – 1), то есть 4+5–1=8. По полученной таблице количество занятых клеток 8, условие выполняется. Получим опорный план посева, для которого суммарная урожайность зерна:

F_1 =200·25 + 350·25 + 150·23+ 70·14 + 200·18 +80·15 + 250·50 + 200·48 = 45080

Проверяем полученный план на оптимальность. Для заполненных клеток найдем потенциалы строк и столбцов.

$$\begin{cases} U_1 + V_1 = 25, \\ U_2 + V_4 = 25, \\ U_2 + V_5 = 23, \\ U_3 + V_1 = 14, \\ U_3 + V_3 = 18, \\ U_3 + V_5 = 15, \\ U_4 + V_2 = 50, \\ U_4 + V_5 = 48. \end{cases}$$

Полагая $U_1 = 0$, находим

$$\begin{cases} V_1 = 25 - U_1 = 25 - 0 = 25, \\ V_4 = 25 - U_2 = 25 - (-3) = 28, \\ U_2 = 23 - V_5 = 23 - 26 = -3, \\ U_3 = 14 - V_1 = 14 - 25 = -11, \\ V_3 = 18 - U_3 = 18 - (-11) = 29, \\ V_5 = 15 - U_3 = 15 - (-11) = 26, \\ V_2 = 50 - U_4 = 50 - 22 = 28, \\ U_4 = 48 - V_5 = 48 - 26 = 22. \end{cases}$$

Для свободных клеток вычислим оценки:

$d_{12} = U_1 + V_2 - c_{12} = 0 + 28 - 20 = 8;$
$d_{13} = U_1 + V_3 - c_{13} = 0 + 29 - 22 = 7;$
$d_{14} = U_1 + V_4 - c_{14} = 0 + 28 - 23 = 5;$
$d_{15} = U_1 + V_5 - c_{15} = 0 + 26 - 20 = 6;$
$d_{21} = U_2 + V_1 - c_{21} = (-3) + 25 - 21 = 1;$
$d_{22} = U_2 + V_2 - c_{22} = (-3) + 28 - 22 = 3;$
$d_{23} = U_2 + V_3 - c_{23} = (-3) + 29 - 20 = 6;$
$d_{32} = U_3 + V_2 - c_{32} = (-11) + 28 - 16 = 1;$
$d_{34} = U_3 + V_4 - c_{34} = (-11) + 28 - 21 = -4 < 0;$
$d_{41} = U_4 + V_1 - c_{41} = 22 + 25 - 40 = 7;$
$d_{43} = U_4 + V_3 - c_{43} = 22 + 29 - 46 = 5;$
$d_{44} = U_4 + V_4 - c_{44} = 22 + 28 - 42 = 8.$

Так как среди оценок свободных клеток имеется отрицательная оценка ($d_{34} = -4$), то план посева не является оптимальным, т.е. необходим пересчёт по циклу для клетки A_3B_4. Найдем цикл для клетки A_3B_4.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	25 200	20	22	20	20	200
A_2	21	22	20	25 350	23 150	500
A_3	14 70	16	18 200	21	15 80	350
A_4	40	50 250	46	42	48 200	450
Заявки b_j	270	250	200	350	430	$\sum$=1500

Найдем $\Delta = min\{350, 80\} = 80$.

Старый цикл пересчета Цикл после пересчета

Рисунок 17 - Циклы пересчета единиц груза

После реализации цикла пересчета (рисунок 17) получаем:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	25 200	20	22	20	20	200
A_2	21	22	20	25 270	23 230	500
A_3	14 70	16	18 200	21 80	15	350
A_4	40	50 250	46	42	48 200	450
Заявки b_j	270-200	250	200	350	430	$\sum$=1500

По новому плану посева суммарная урожайность зерна составляет:

$F_2 = 200{\cdot}25 + 270{\cdot}25 + 230{\cdot}23 + 70{\cdot}14 + 200{\cdot}18 + 80{\cdot}21 + 250{\cdot}50 + 200{\cdot}48 = 45400.$

Проверяем полученный план на оптимальность. Для заполненных клеток находим потенциалы строк и столбцов.

Полагая $u_1 = 0$, находим

$$\begin{cases} U_1 + V_1 = 25, \\ U_2 + V_4 = 25, \\ U_2 + V_5 = 23, \\ U_3 + V_1 = 14, \\ U_3 + V_3 = 18, \\ U_3 + V_4 = 21, \\ U_4 + V_2 = 50, \\ U_4 + V_5 = 48. \end{cases} \qquad \begin{cases} V_1 = 25 - U_1 = 25 - 0 = 25, \\ U_2 = 25 - V_4 = 25 - 32 = -7, \\ V_5 = 23 - U_2 = 23 - (-7) = 30, \\ U_3 = 14 - V_1 = 14 - 25 = -11, \\ V_3 = 18 - U_3 = 18 - (-11) = 29, \\ V_4 = 21 - U_3 = 21 - (-11) = 32, \\ V_2 = 50 - U_4 = 50 - 18 = 32, \\ U_4 = 48 - V_5 = 48 - 30 = 18. \end{cases}$$

Для свободных клеток находим оценки:

$d_{12} = U_1 + V_2 - c_{12} = 0 + 32 - 20 = 12;$
$d_{13} = U_1 + V_3 - c_{13} = 0 + 29 - 22 = 7;$
$d_{14} = U_1 + V_4 - c_{14} = 0 + 32 - 23 = 9;$
$d_{15} = U_1 + V_5 - c_{15} = 0 + 30 - 20 = 10;$
$d_{21} = U_2 + V_1 - c_{21} = (-7) + 25 - 21 = -3<0;$
$d_{22} = U_2 + V_2 - c_{22} = (-7) + 32 - 22 = 3;$
$d_{23} = U_2 + V_3 - c_{23} = (-7) + 29 - 20 = 2;$
$d_{32} = U_3 + V_2 - c_{32} = (-11) + 32 - 16 = 5;$
$d_{35} = U_3 + V_5 - c_{35} = (-11) + 30 - 15 = 4;$
$d_{41} = U_4 + V_1 - c_{41} = 18 + 25 - 40 = 3;$
$d_{43} = U_4 + V_3 - c_{43} = 18 + 29 - 46 = 1;$
$d_{44} = U_4 + V_4 - c_{44} = 18 + 32 - 42 = 8.$

Так как среди оценок свободных клеток имеется отрицательная оценка ($d_{21} = -3$), то план посева не является оптимальным, т.е. необходим пересчёт по циклу для клетки A_2B_1. Найдем цикл для клетки A_2B_1.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	[25] 200	[20]	[22]	[20]	20	200
A_2	[21]	[22]	[20]	[25] 270	[23] 230	500
A_3	[14] 70	[16]	[18] 200	[21] 80	[15]	350
A_4	[40]	[50] 250	[46]	[42]	[48] 200	450
Заявки b_j	270	250	200	350	430	$\sum$=1500

Найдем $\Delta = min\{70, 270\} = 70$.

Старый цикл пересчета Цикл после пересчета

Рисунок 18 - Циклы пересчета единиц груза

После реализации цикла пересчета (рисунок 18) получаем:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	[25] 200	[20]	[22]	[20]	[20]	200
A_2	[21] 70	[22]	[20]	[25] 200	[23] 230	500
A_3	[14]	[16]	[18] 200	[21] 150	[15]	350
A_4	[40]	[50] 250	[46]	[42]	[48] 200	450
Заявки b_j	270	250	200	350	430	$\sum$=1500

По новому плану посева суммарная урожайность зерна составляет:

$F_3 = 200 \cdot 25 + 70 \cdot 21 + 200 \cdot 25 + 230 \cdot 23 + 200 \cdot 18 + 150 \cdot 21 + 250 \cdot 50 + 200 \cdot 48 = 45610$

Проверяем полученный план на оптимальность. Для заполненных клеток находим потенциалы строк и столбцов.

Полагая $u_1 = 0$, находим

$$\begin{cases} U_1 + V_1 = 25, \\ U_2 + V_1 = 21, \\ U_2 + V_4 = 25, \\ U_2 + V_5 = 23, \\ U_3 + V_3 = 18, \\ U_3 + V_4 = 21, \\ U_4 + V_2 = 50, \\ U_4 + V_5 = 48. \end{cases} \qquad \begin{cases} V_1 = 25 - U_1 = 25 - 0 = 25, \\ U_2 = 21 - V_1 = 21 - 25 = -4, \\ V_4 = 25 - U_2 = 25 - (-4) = 29, \\ V_5 = 23 - U_2 = 23 - (-4) = 27, \\ V_3 = 18 - U_3 = 18 - (-8) = 26, \\ U_3 = 21 - V_4 = 21 - 29 = -8, \\ V_2 = 50 - U_4 = 50 - 21 = 29, \\ U_4 = 48 - V_5 = 48 - 27 = 21. \end{cases}$$

Для свободных клеток находим оценки:

$d_{12} = U_1 + V_2 - c_{12} = 0 + 29 - 20 = 9;$

$d_{13} = U_1 + V_3 - c_{13} = 0 + 26 - 22 = 4;$

$d_{14} = U_1 + V_4 - c_{14} = 0 + 29 - 23 = 6;$

$d_{15} = U_1 + V_5 - c_{15} = 0 + 27 - 20 = 7;$

$d_{22} = U_2 + V_2 - c_{22} = (-4) + 29 - 22 = 3;$

$d_{23} = U_2 + V_3 - c_{23} = (-4) + 26 - 20 = 2;$

$d_{13} = U_3 + V_1 - c_{31} = (-8) + 25 - 14 = 3;$

$d_{32} = U_3 + V_2 - c_{32} = (-8) + 29 - 16 = 5;$

$d_{35} = U_3 + V_5 - c_{35} = (-8) + 27 - 15 = 4;$

$d_{41} = U_4 + V_1 - c_{41} = 21 + 25 - 40 = 6;$
$d_{43} = U_4 + V_3 - c_{43} = 21 + 29 - 46 = 1;$
$d_{44} = U_4 + V_4 - c_{44} = 21 + 32 - 42 = 8.$

Так как оценки всех свободных клеток положительные, следовательно, полученный план посева является оптимальным.

Таким образом, оптимальным является посев культур:

$x_{11} = 200$ га – рожь на участке 1;
$x_{21} = 70$ га – пшеница на участке 1;
$x_{24} = 200$ га – пшеница на участке 4;
$x_{25} = 230$ га – пшеница на участке 5;
$x_{33} = 200$ га – ячмень на участке 3;
$x_{34} = 150$ га – ячмень на участке 4;
$x_{42} = 250$ га – кукуруза на участке 2;
$x_{45} = 200$ га – кукуруза на участке 5,

По этому плану посева суммарная урожайность зерна составляет

$$F_{\text{опт}} = 45610.$$

Вопросы для самоконтроля

1) Что называется транспортной задачей.
2) Что называется тарифом перевозки в транспортной задаче.
3) Какая транспортная задача называется закрытой.
4) Какая транспортная задача называется открытой.
5) В чем состоит процедура закрытия открытой транспортной задачи.
6) Что называется фиктивным поставщиком.
7) Что называется фиктивным потребителем.
8) Что называется потенциалом в транспортной задаче.
9) В чем состоит схема решения транспортной задачи с помощью метода потенциалов.
10) Как строится первоначальный план перевозок с помощью метода северо-западного угла.
11) Как строится первоначальный план перевозок с помощью метода наименьшей стоимости.
12) Что называется циклом в транспортной таблице.
13) Какие клетки транспортной таблицы называются базисными.
14) Какие клетки транспортной таблицы называются свободными.
15) Какой план перевозок называется вырожденным.
16) В чем состоит схема пополнения вырожденного плана перевозок.
18) В чем состоит критерий оптимальности плана при решении транспортной задачи методом потенциалов.

Задания для самостоятельного решения

Три хлебокомбината ежедневно производят A_1, A_2, A_3 тонн муки. Мука потребляется четырьмя хлебозаводами, потребности которых ежедневно равны соответственно B_1, B_2, B_3, B_4. Тарифы перевозок 1 тонны муки с хлебокомбината к каждому хлебозаводу заданы в виде матрицы. Составить такой план доставки муки, при котором общая стоимость затрат на перевозку была бы минимальной.

1

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		100	60	190	150
A_1	140	2	5	4	2
A_2	200	4	3	8	9
A_3	160	7	6	1	3

2

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		120	180	210	120
A_1	240	6	4	2	6
A_2	200	4	9	7	4
A_3	260	10	3	5	10

3

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		150	140	170	150
A_1	210	6	3	1	6
A_2	170	2	4	9	2
A_3	220	5	7	8	5

4

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		90	200	120	90
A_1	130	4	9	1	7
A_2	210	6	3	4	5
A_3	160	10	4	8	2

5

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		240	200	90	170
A_1	300	9	10	5	7
A_2	150	2	4	3	1
A_3	250	3	8	6	5

6

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		120	80	210	190
A_1	190	2	7	6	10
A_2	200	9	4	3	1
A_3	210	3	2	5	8

7

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		110	100	150	140
A_1	180	3	6	8	3
A_2	100	5	2	9	4
A_3	220	4	5	1	7

8

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		200	140	210	150
A_1	220	6	3	9	4
A_2	250	5	4	1	5
A_3	230	2	7	2	10

9

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		140	200	170	90
A_1	280	4	9	8	2
A_2	190	10	4	1	7
A_3	230	2	7	2	10

10

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		200	100	80	120
A_1	180	1	6	9	2
A_2	150	4	5	3	7
A_3	170	8	10	4	5

11

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		230	140	120	210
A_1	200	4	1	5	6
A_2	220	3	8	2	9
A_3	280	9	4	7	7

12

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		170	130	180	120
A_1	200	1	10	9	5
A_2	190	9	5	3	7
A_3	210	8	2	4	6

13

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		140	100	100	160
A_1	160	5	4	9	2
A_2	190	3	4	8	1
A_3	150	7	6	5	7

14

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		170	80	150	100
A_1	120	4	1	2	6
A_2	180	9	4	7	10
A_3	200	3	8	5	3

15

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		150	180	170	200
A_1	210	8	3	6	10
A_2	290	1	4	5	3
A_3	200	9	7	2	6

16

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		70	50	80	100
A_1	100	5	3	4	2
A_2	70	4	2	6	1
A_3	130	1	4	5	3

17

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		90	130	110	150
A_1	140	8	4	10	2
A_2	150	2	5	7	3
A_3	190	4	6	1	9

18

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		170	200	40	90
A_1	150	9	4	3	1
A_2	250	2	6	4	10
A_3	100	3	10	5	7

19

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		190	200	180	130
A_1	200	4	2	8	7
A_2	350	3	5	9	6
A_3	150	5	10	1	3

20

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		150	160	180	110
A_1	240	8	6	7	2
A_2	190	4	5	3	9
A_3	170	1	10	4	3

21

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		130	90	50	230
A_1	180	9	4	7	10
A_2	140	2	8	2	3
A_3	180	4	1	5	6

22

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		200	130	120	150
A_1	160	5	6	8	9
A_2	250	7	10	1	4
A_3	190	2	3	4	3

23

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		190	200	140	70
A_1	100	7	10	1	4
A_2	350	2	3	4	3
A_3	150	1	6	8	9

24

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		100	160	130	110
A_1	200	5	10	1	5
A_2	190	4	2	8	7
A_3	110	3	5	9	6

25

Поставщик	Запас груза A_i	Потребитель B_j			
		200	160	190	150
A_1	170	9	4	6	3
A_2	290	2	7	10	4
A_3	240	3	1	5	8

Тестовые задания

1. Транспортная задача является задачей…… программирования

1) динамического
2) ***линейного***
3) целочисленного
4) нелинейного

2. Транспортная задача. Метод разработки начального плана перевозок, при котором решение начинается с левой верхней ячейки таблицы и продолжается вниз и вправо по диагонали называется методом…

1) минимальной стоимости
2) потенциалов
3) ***северо-западного угла***
4) двойного предпочтения

3. Транспортная задача. Метод «наименьшего (минимального) тарифа» разработки начального плана перевозок начинается с ячейки таблицы …

1) ***минимальной стоимости***
2) потенциалов
3) северо-западного угла
4) двойного предпочтения

4. В транспортной задаче все переменные x_{ij}:
1) больше нуля
2) ***больше или равняются нулю***
3) меньше нуля
4) меньше или не равняются нулю

5. Свойство транспортной задачи: каждая неизвестная в ограничениях встречается только:
1) ***один раз***
2) два раза
3) три раза
4) $m+n-1$ раза

6. Транспортная задача, в которой суммарный запас поставщиков не равен суммарному спросу потребителей называется …
1) ***открытой транспортной задачей***
2) закрытой транспортной задачей
3) оптимальной транспортной задачей
4) минимальной транспортной задачей

7. Транспортная задача. Если спрос потребителей превышает запас поставщиков, то вводится:
1) фиктивный потребитель с нулевой стоимостью перевозок
2) фиктивный потребитель с отрицательной стоимостью перевозок
3) ***фиктивный поставщик с нулевой стоимостью перевозок***
4) фиктивный поставщик с отрицательной стоимостью перевозок

8. Транспортная задача. Если запас поставщиков превышает спрос потребителей, то вводится:
1) ***фиктивный потребитель с нулевой стоимостью перевозок***
2) фиктивный потребитель с отрицательной стоимостью перевозок
3) фиктивный поставщик с нулевой стоимостью перевозок
4) фиктивный поставщик с отрицательной стоимостью перевозок

9. Как называется задача, если в транспортной задаче объем спроса равен объему предложения
1) замкнутой
2) открытой
3) ***закрытой***
4) сбалансированной

10. Как называется задача, если в транспортной задаче объем спроса превышает объема предложения
1) замкнутой
2) ***открытой***
3) закрытой
4) сбалансированной

11. Транспортная задача

	50	60+b	200
100+a	7	2	4
200	3	5	6

будет закрытой, если
1) $b=a+40$
2) $b=a+60$
3) **$b=a-10$**
4) $b=a+10$

12. Транспортная задача

	100+b	200
50	7	3
60+a	2	5
200	4	6

будет закрытой, если
1) $b=a+40$
2) $b=a+60$
3) $b=a-10$
4) **$b=a+10$**

13. Транспортная задача

	150-b	300
40	3	4
60+a	5	6
300	7	8

будет закрытой, если
1) $a=50+b$
2) **$a=50-b$**
3) $a=b-60$
4) $a=b+60$

14. Транспортная задача

	150+b	300
100	5	6
a	7	8
300	9	10

будет закрытой, если
1) $a=b-150$
2) $a=b+100$
3) $a=b-50$
4) **$a=b+50$**

15. Транспортная задача

	40	20-*b*	100
10+*a*	2	3	4
100	5	6	7

будет закрытой, если

1) ***a*=50-*b***

2) *b*=*a*-50

3) *a*=60-*b*

4) *b*=60-*b*

16. Транспортные задачи решаются методом…

1) дифференцирования целевой функции

2) градиентов

3) ***потенциалов***

4) линейной алгебры

17. Транспортная задача. При расчете потенциалов потенциал первой строки приравнивается:

1) ***нулю***

2) единице

3) двум

18. При решении транспортной задачи методом потенциалов уравнения вида $u_i + v_j = c_{ij}$ записывают для

1) ячеек с минимальными стоимостями

2) ***занятых ячеек***

3) ячеек с максимальными стоимостями

4) не занятых ячеек

19. При решении транспортной задачи методом потенциалов неравенства вида $u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$ записывают для

1) ячеек с минимальными стоимостями

2) занятых ячеек

3) ячеек с максимальными стоимостями

4) ***не занятых ячеек***

20. Решается транспортная задача с m поставщиками и n потребителями. В методе потенциалов количества занятых клеток должна быть …

1) $m+n$

2) $m+n+1$

3) $m+n-1$

4) $m-n+1$

21. Методом потенциалов решается транспортная задача на минимум. План перевозок является оптимальным, если для незанятых ячеек выполняются оценки

1) $u_i + v_j - c_{ij} < 0$

2) $u_i + v_j - c_{ij} > 0$

3) $u_i + v_j - c_{ij} = 0$

4) $u_i + v_j - c_{ij} \neq 0$

22. Распределенный метод решения транспортной задачи

1) поставка, передаваемая по циклу, определяется как минимум среди поставок в клетках цикла со знаком "+"

2) ***поставка, передаваемая по циклу, определяется как минимум среди поставок в клетках цикла со знаком "-"***

3) поставка, передаваемая по циклу, не может быть ни меньше, ни больше минимума поставок клеток цикла со знаком "-"

4) поставка, передаваемая по циклу, не может быть ни меньше, ни больше минимума поставок клеток цикла со знаком "+"

23. Цикл – это

1) ***последовательность вершин и соединяющих их вертикальных и горизонтальных отрезков***

2) последовательность вершин и соединяющих их вертикальных и диагональных отрезков

3) последовательность вершин и соединяющих их диагональных и горизонтальных отрезков

24. Цикл при решении транспортной задачи методом потенциалов содержит:

1) перспективную свободную клетку и часть занятых клеток

2) ***перспективную свободную клетку и все занятые клетки***

3) занятую клетку и часть свободных клеток

4) все свободные клетки

25. После построения цикла его вершинам присваиваются знаки, исходя из следующего правила:

1) вершине, соответствующей незаполненной клетке, присваивается «–», далее знаки «+» и «–» чередуются

2) всем вершинам присваиваются знаки «+»

3) всем вершинам присваиваются знаки «–»

4) ***вершине, соответствующей незаполненной клетке, присваивается «+», далее знаки «–» и «+» чередуются***

26.Число, перемещаемое по циклу, определяется как…

1) ***наименьшее среди вершин со знаком «–»***

2) наибольшее среди вершин со знаком «+»

3) наименьшее среди вершин со знаком «+»

4) наибольшее среди вершин со знаком «–»

27. При построении нового опорного плана в транспортной задаче число, перемещаемое по циклу, необходимо…

1) вычесть в клетках со знаком «+»

2) ***прибавить в клетках со знаком «+»***

3) прибавить в клетках со знаком «–»

28. Транспортная задача имеет множество оптимальных решений, если…

1) среди неотрицательных значений потенциалов есть нулевые

2) ***среди неотрицательных значений оценок есть нулевые***

3) среди значений потенциалов есть отрицательные

4) среди значений оценок есть отрицательные.

29. Методом потенциалов решается транспортная задача на максимум. План перевозок является оптимальным, если для незанятых ячеек выполняются оценки

1) $u_i + v_j - c_{ij} < 0$

2) $u_i + v_j - c_{ij} > 0$

3) $u_i + v_j - c_{ij} \geq 0$

4) $u_i + v_j - c_{ij} \neq 0$

30.Опорный план транспортной задачи решаемой на максимум будет оптимальным, если:

1) оценки свободных клеток отрицательные

2) ***оценки свободных клеток положительные***

3) оценки свободных клеток неотрицательные

4) оценки свободных клеток неположительные

31. Максимальное значение целевой функции $F = x_1 + 3x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

равно…

1) 15 2) 19 3) 10 4) 6

32. Максимальное значение целевой функции $F = 3x_1 + x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

равно…

1) 15 2) 19 3) 10 **4) 13**

33. Максимальное значение целевой функции $F = x_1 + 2x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

равно…

1) 15 2) 19 **3) 14** 4) 13

34. Задача линейного программирования имеет вид: $F = 5x_1 - 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 3x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Тогда целевой вектор $\overline{n} = (c_1; c_2)$ имеет координаты…

1) (-5; 2)
2) (5; 2)
3) (5; -2)
4) (-5; -2)

35. Задача линейного программирования имеет вид: $F = -3x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 5 \\ 4x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Тогда целевой вектор $\overline{n} = (c_1; c_2)$ имеет координаты…

1) (-3; 4)
2) (3; 4)
3) (3; -4)
4) (-3; -4)

36. Задача линейного программирования имеет вид: $F = x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 7 \\ x_1 \ge 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Тогда целевой вектор $\overline{n} = (c_1; c_2)$ имеет координаты…

1) (-1; 5)
2) (1; 5)
3) (1; -5)
4) (-1; -5)

37. Методом потенциалов решается транспортная задача на максимум. Оптимальное решение будет единственным, если для всех незанятых ячеек выполняются оценки

1) $u_i + v_j - c_{ij} < 0$

2) $u_i + v_j - c_{ij} > 0$

3) $u_i + v_j - c_{ij} = 0$

4) $u_i + v_j - c_{ij} \neq 0$

38. Задача линейного программирования имеет вид $F = x_1 + 2x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Уравнение линии уровня целевой функции будет иметь вид…

1) $x_1 + 2x_2 = 0$

2) $x_1 - 2x_2 = 0$

3) $x_1 + 2x_2 = 1$

4) $x_1 - 2x_2 = 1$

39. Задача линейного программирования имеет вид $F = 3x_1 - 2x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Уравнение линии уровня целевой функции будет иметь вид…

1) $3x_1 + 2x_2 = 0$

2) $3x_1 - 2x_2 = 0$

3) $3x_1 + 2x_2 = 1$

4) $3x_1 - 2x_2 = 1$

40. Задача линейного программирования имеет вид $F = -2x_1 + 5x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Уравнение линии уровня целевой функции будет иметь вид…

1) $-2x_1 + 5x_2 = 1$

2) $-2x_1 - 5x_2 = 0$

3) $-2x_1 + 5x_2 = 0$

4) $2x_1 - 5x_2 = 0$

Список литературы

1. Алпатов, Ю.Н. Математическое моделирование: учебное пособие. –2-е изд., испр. / Ю.Н. Алпатов. – СПб.: Издательство «Лань», 2022. – 136 с.

2. Дегтярев, В.Г. Математическое моделирование производственных процессов: учебное пособие / В.Г. Дегтярев, Руслан С. Кударов, Рустем С. Кударов. – Санкт-Петербург: ФГБОУ ВО ПГУПС, 2021. – 84 с.

3. Каштаева, С.В. Математическое моделирование: учебное пособие / С.В. Каштаева; Министерство сельского хозяйства Российской Федерации, ФГБОУ ВО «Пермский аграрно-технологический университет им. Академика Д.Н. Прянишникова». – Пермь: ИПЦ «Прокрость», 2022. – 112 с.

4. Стефанова, И.А. Обработка данных и компьютерное моделирование: учебное пособие / И.А. Стефанова. – Санкт-Петербург: Лань, 2020. – 112 с.

5. Голубева, Н.В. Основы математического моделирования систем и процессов: Учебное пособие. 2-е изд., с измен. / Н.В. Голубева; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2019. – 95 с.

6. Власов, Е.Н. Моделирование и оптимизация процессов: Учебное пособие для студентов направления 35.03.02 «Технология лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств». Уровень подготовки – бакалавриат / Е.Н. Власов. – СПб.: СПбГЛТУ, 20118. – 84 с.

7. Медведев, П.В. Математическая обработка результатов исследования: учебное пособие / П.В. Медведев, В.А. Федотов; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург; ОГУ, 2017. – 99 с.

8. Тарасов, В.Н. Методы оптимизации: учебник / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева. – Самара: ПГУТИ, 2020. – 282 с.

9. Самков, Т.Л. Математические методы исследования экономики и математическое программирование: учебное пособие / Т.Л. Самков. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2018. – 115 с.

10. Федоренко, И.Я. Оптимизация и принятие решений в агроинженерных задачах: Учебное пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. / И.Я. Федоренко, С.В. Морозова. – СПб.: Издательство «Лань», 2022. – 288 с.

11. Чумак, И.В. Математические методы: учебное пособие / И.В. Чумак. – Донской государственный технический университет. – Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2020. – 80 с.

12. Юрчук, С.Ю. Методы математического моделирования: учеб. пособие / С.Ю. Юрчук. – М.: Изд. Дом НИТУ «МИСиС», 2018. – 96 с.

Подписано в печать __________
Бумага офсетная. Печать ризографическая.
Формат 60х84 1/16. Гарнитура «Times New Roman».
Усл. печ. л. 6,25. Тираж 50 экз.
Заказ № ___

Отпечатано в типографии
Казанского государственного аграрного университета
420015 Казань, ул. К. Маркса, 65