Министерство сельского хозяйства
Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
профессионального образования
Казанский государственный
аграрный университет

Кафедра физики и математики

Контрольная работа
по дисциплине „Математика
Вариант №40 (№11, 32, 71, 32, 122, 170)

Выполнил: студент I курса
заочного отделения
Агрономического факультета
группа Б112-01 з/г А321240
Фаттахов Ислам Ильдарович
проверила: Киселева Н.Г

Казань, 2022 г.

Контрольная работа

№11 Решите систему линейных уравнений тремя способами: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x+y-2z-1=0 \\ x+y+3z+1=0 \end{cases}$$

Метод Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 4 \qquad \Delta x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 4; \qquad \Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = 1; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = 1; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = 1$$

Ответ: $x=1$; $y=1$; $z=1$.

83 $a(k; 4; -6)$

$\frac{k}{} = \frac{4}{} = \frac{-6}{}$

Метод обратной матрицы.

Запишем систему уравнений в виде $A \cdot X = B$, где:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Находим обратную матрицу A^{-1}

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 4$$ (вычислено методом Крамера)

Находим алгебраические дополнения:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1$

$A_{12} = 4$ ~~A~~ $A_{23} = 0$

$A_{13} = 1$ $A_{31} = -3$

$A_{21} = 4$ $A_{32} = 4$

$A_{22} = -4$ $A_{33} = -1$

Находим $\tilde{A}^T = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 4 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

В

Н

=

С

$\int \sqrt{x'} dx = \int x^3 dx = \frac{x}{\frac{3}{2}} + C = 3$

Вычислим $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T = \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 4 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

Находим $X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 4 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3+4+3 \\ 12-4-4 \\ 3+0+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ответ: $x = 1$; $y = 1$; $z = 1$

метод Гаусса

$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right| \rightarrow$ умножим 1-ю строчку на 2, умножим 2-ю на -1 и добавим к 1-ой; умножим 3-ю строку на -2 добавим ко 2-й; добавим 2-ю строку к 1-й и получим:

$\left|\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right|$

Теперь $z = \frac{8}{8} = 1$. $x = \frac{[-1-(y-3z)]}{1} = 1$.

$y = [3-(4z)]/-1 = 1$

Ответ: $x = 1$; $y = 1$; $z = 1$.

№32 Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти:

1) Длину стороны AC
2) Уравнение стороны AB
3) уравнение высоты CH
4) уравнение медианы AM
5) точку N пересечения медианы AM и высоты CH
6) Уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB

$A(7;0)$ $B(1;4)$ $C(-8;-4)$ аналогично.

Решение:

1) Длина $AC = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(-8-7)^2+(-4-0)^2} = \sqrt{241} = 15{,}52$

2) Уравнение AB $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ + $\frac{x-7}{1-7} = \frac{y-0}{4-0} \Rightarrow$

$3y+2x-14=0 \rightarrow \underline{y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3}}$

3) Уравнение высоты CH $\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} \rightarrow$

$\frac{x-(-8)}{2} = \frac{y-(-4)}{3} \rightarrow \underline{2y-3x-16=0} \rightarrow$

$\underline{y = \frac{3}{2}x + 8}$

$\int \sqrt{x'}\,dx =$

4) Уравнение медианы AM. Находим координаты M

$x_m = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+(-8)}{2} = \frac{-7}{2}$; $y_m = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{4+(-4)}{2} = 0$. $M\left(\frac{-7}{2}; 0\right)$, $\frac{x-7}{\frac{-21}{0}} = \frac{y-0}{0-0} \to \underline{y=0}$

5) Координаты точки пересечения AM и CH найдем решая систему уравнений

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{3}{2}x + 8 \end{cases} \to \begin{matrix} y_N = 0 \\ x_N = -\frac{16}{3} \end{matrix} \quad \underline{N\left(-\frac{16}{3}; 0\right)}$$

6) Уравнение параллельной прямой AB через т. C $(-8;-4)$.

$y - y_0 = k(x - x_0)$ $y_0 = -4$ $x_0 = -8$ $k = -2/3 \to$

$\to y = -2/3\,x - \frac{28}{3} \to \underline{3y + 2x + 28 = 0}$

№71 Даны координаты вершин пирамиды ABCD. Вычислить: 1) объем пирамиды;

2) длины ребра AB;

3) площадь грани ABC;

4) угол между ребрами AB и AD
Координаты вершин пирамиды для соответствующих номеров задач следующие:

$A(4,2,5)$ $B(-3,0,4)$ $C(0,2,3)$ $D(5,2,-4)$

Решение: Находим векторы $AB(-7;-2;-1)$ $AC(-4;0,-2)$; $AD(1,0,-9)$

1) объем $V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -7 & -2 & -1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -9 \end{vmatrix} = \frac{76}{6} = \underline{\underline{12,67}}$

2) Длина $AB = |AB| = \sqrt{7^2+2^2+1^2} = \sqrt{54} = 7,35$

3) Площадь грани $ABC = S = \frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}| =$

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -7 & -2 & -1 \\ -4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|4i - 10j - 8k| = \frac{1}{2}\sqrt{4^2+10^2+8^2} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{176} = 6,7$

4) Угол между AB и $AD = \cos\varphi =$

$= \frac{AB \cdot AD}{|AB||AD|} = \frac{(-7)\cdot 1\cdot(-2)\cdot 0 + (-1)(-9)}{\sqrt{54}\cdot\sqrt{82}} = 0,03$

$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

$\gamma = \arccos 0{,}03 = 88{,}3°$

№92 Найти пределы (не применяя правило Лопиталя)

а) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{3x - x^2 - 4}{x^2 - 2x - 8} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{-(x-4)(x-1)}{(x-4)(x+2)} = \frac{-3}{6} = -0{,}5$

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^3 + x^2 + 1}{3x^2 + 5} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{(4x^3 + x^2 + 1)/x^2}{(3x^2 + 5)/x^2} =$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x + 1 + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{5}{x^2}} = \infty$

в) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg^2 x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{2\sin x \cdot \cos^3 x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{2\cos^3 x} = 0$

г) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{4x - 1}{4x + 3}\right)^{2x} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \frac{4}{4x+3}\right)^{2x} = \lim\limits_{x \to \infty} \left[\left(1 - \frac{4}{4x+3}\right)^{\frac{4x+3}{4}}\right]$

$= \lim \left[\left(1 - \frac{4}{4x+3}\right)^{\frac{4x+3}{4}}\right]^{\frac{-4 \cdot 2x}{4x+3}} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-4 \cdot 2x}{4x+3}} = e^{-2}$

№122 Найти производные первого порядка данных ф-ий, используя правила вычисления производных:

$\overline{1} \quad k \quad 3$

$b = i - 2j - 3k$

$a = 2i - 5k$

$(2;0;-5) \quad (1;-2;-3)$

а) $y = \frac{3}{x} + \sqrt[5]{x^2} - 4x^3 + \frac{2}{x^4}$; $y'_x = -\frac{3}{x^2} + \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} - 12x^2 - \frac{8}{x^5}$

б) $y = \sin x \cdot \ln x$; $y'_x = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$

в) $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{ctg x}$; $y'_x = \frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \cdot ctg x + \sqrt[3]{x} / \sin^2 x}{(ctg x)^2}$

г) $\begin{cases} x = (1-t)^2 \\ y = \cos(t-1)^2 \end{cases}$ $dy = -2(t-1) \cdot \sin(t-1)^2 dt$ $\frac{dy}{dx} = -\sin(t-1)^2$

$dx = -2(1-t)dt$

д) $x^2 - y^2 = \sin(x+y)$

Дифференцируем:

$2x - 2y \cdot y'_x = \cos(x+y) \cdot (1 + y'_x) \to$

$y'_x (\cos(x+y) + 2y) = 2x - \cos(x+y) \to$

$y'_x = \frac{2x - \cos(x+y)}{\cos(x+y) + 2y}$

№170

Построить график функции $y = f(x)$, используя общую схему исследования, $y = (x+5)(x+2)^2$

1) $f(x)$ определена на всей оси x

2) $f(x)$ не имеет четности, нечетности и периодичности

$$\int \sqrt{x'}\,dx = \int x^3 dx = \frac{x^3}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x} + C$$

3) $y = 0$ $x_1 = -5$ $x_2 = -2$ $y > 0$ при $x > -2$ $x = 0$ $y = 20$

4) асимптот нет $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

5) экстремум $f'(x) = (x+2) + 2(x+2) = (x+2)(x+4) = 0$ $x_1 = -2$
$x_2 = -4$

$f''(x) = x + 3 = 0$ $x_3 = -3$

x	$-\infty;-4$	-4	$-4;-3$	-3	$-3;-2$	-2	$-2;+\infty$
y	↗	4	↘	2	↘	0	↗
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+

$M(-4;4)$ - max
$m(-2;0)$ - min
$N(-3;2)$ - точка перегиба