Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
„Казанский Государственный Аграрный Университет"

ТЕТРАДЬ

для ______________________

____

учени__________ класса__________

__________ школы__________

Контрольная работа
по математике

Выполнила работу студентка
I курса заочного отделения
Факультета лесного хозяйства
и экологии
Зарипова Миляуша
Рустемовна
Направление 35.03.10
Ландшафтная архитектура
группа Б402-02
Проверил: Киселева Н.J.

Казань 2020

Задача №5.

Решите систему линейных уравнений тремя способами:
а) по формулам Крамера;
б) с помощью обратной матрицы;
в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x+5y-4z+5=0, \\ 2x-3y+z-2=0, \\ 4x+y-3z+4=0. \end{cases}$$

А) Матричный вид системы имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$ свободные коэф. $B^T=(-5, 2, -4)$

Вычислим определитель матрицы A

$$\Delta = 1\cdot((-3)\cdot(-3)-1\cdot 1)-2\cdot(5\cdot(-3)-1\cdot(-4))+$$
$$+4\cdot(5\cdot 1-(-3)\cdot(-4))=2$$

Заменим первый столбец матрицы A на вектор результата B.

$$\begin{matrix} -5 & 5 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & -3 \end{matrix}$$

Найдем определитель полученной матрицы:

$\Delta_1 = (-5)\cdot((-3)\cdot(-3) - 1\cdot 1) - 2\cdot(5\cdot(-3) - 1\cdot(-4)) +$

$+ (-4)\cdot(5\cdot 1 - (-3)\cdot(-4)) = 10$

$x_1 = \frac{10}{2} = 5$

Заменим 2-ой столбец матрицы A на вектор результата B.

$$\begin{matrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & -3 \end{matrix}$$

Найдем определитель полученной матрицы.

$X_2 = 1\cdot(2\cdot(-3) - (-4)\cdot 1) - 2\cdot((-5)\cdot(-3) - (-4)\cdot$

$\cdot(-4)) + 4\cdot((-5)\cdot 1 - 2\cdot(-4)) = 12$

$X_2 = \frac{12}{2} = 6$

Заменим 3-ий столбец матрицы A на вектор результата B.

$$\begin{matrix} 1 & 5 & -5 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -4 \end{matrix}$$

Найдем определитель полученной матрицы.

$\Delta_3 = 1\cdot((-3)\cdot(-4) - 1\cdot 2) - 2\cdot(5\cdot(-4) - 1\cdot(-5)) +$

$+ 4\cdot(5\cdot 2 - (-3)\cdot(-5)) = 20$

$x_3 = \frac{20}{2} = 10$

$x_1 = \frac{10}{2} = 5$, $x_2 = \frac{12}{2} = 6$, $x_3 = \frac{20}{2} = 10$

б) Найдем главный определитель

$\Delta = 1(-3\cdot(-3) - 1\cdot 1) - 2\cdot(5\cdot(-3) - 1\cdot(-4)) +$

$+ 4\cdot(5\cdot 1 - (-3\cdot(-4))) = 2 \neq 0$

$$A = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij}. Транспонируем матрицу A:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (-3\cdot(-3) - 1\cdot 1) = 8$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = -(5\cdot(-3) - (-4\cdot 1)) = 11$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = (5\cdot 1 - (-4\cdot(-3))) = -7$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(2\cdot(-3) - 1\cdot 4) = 10$

$$A_{2,2} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = (1\cdot(-3) - (-4\cdot 4)) = 13$$

$$A_{2,3} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -(1\cdot 1 - (-4\cdot 2)) = -9$$

$$A_{3,1} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (2\cdot 1 - (-3\cdot 4)) = 14$$

$$A_{3,2} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -(1\cdot 1 - 5\cdot 4) = 19$$

$$A_{3,3} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = (1\cdot(-3) - 5\cdot 2) = -13$$

Обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 11 & -7 \\ 10 & 13 & -9 \\ 14 & 19 & -13 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 11 & -7 \\ 10 & 13 & -9 \\ 14 & 19 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8\cdot(-5) + (11\cdot 2) + (-7\cdot(-4)) \\ 10\cdot(-5) + (13\cdot 2) + (-9\cdot(-4)) \\ 14\cdot(-5) + (19\cdot 2) + (-13\cdot(-4)) \end{pmatrix} =$$

$$= X \; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 10/2 = 5$, $x_2 = 12/2 = 6$, $x_3 = 20/2 = 10$

В) Запишем систему в виде расширенной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Умножим 1-ую строку на (2).
Умножим 2-ую строку на (-1).
Добавим 2-ую строку к 1-ой:

$$\begin{pmatrix} 0 & 13 & -9 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Умножим 2-ую строку на (2).
Умножим 3-ю строку на (-1)
Добавим 3-ю строку к 2-ой:

$$\begin{pmatrix} 0 & 13 & -9 \\ 0 & -7 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Умножим 1-ую строку на (7).
Умножим 2-ю строку на (13).
Добавим 2-ую строку к 1-ой:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Теперь исходную систему можно записать как:

$x_3 = 20/2$

$x_2 = [8 - (5x_3)]/(-7)$

$x_1 = [-4 - (x_2 - 3x_3)]/4$

Из 1 строки выражаем x_3:

$$x_3 = \frac{20}{2} = 10$$

Из 2 строки выражаем x_2:

$x_2 = \frac{8-5\cdot 10}{-7} = \frac{-42}{-7} = 6$

Из 3 строки выразим x_1:

$x_1 = \frac{-4-1\cdot 6-(-3)\cdot 10}{4} = \frac{20}{4} = 5$

Задача № 35

Даны координаты вершин $\triangle ABC$

Найти:
1) длину стороны AC;
2) уравнение стороны AB;
3) уравнение высоты CH;
4) уравнение медианы AM;
5) точку N пересечения медианы AM и высоты CH;
6) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB.

$A(-2;-3)$, $B(0;7)$, $C(8;3)$

1) Длина $AC = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(8-(-2))^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{136} = 11,66$

2) Уравнение AB.

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \to \frac{x+2}{0-(-2)} = \frac{y+3}{7-(-3)} = y = 5x+7$

$y-5x-7=0$

3) Уравнение высоты CH.

$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B}$

$(A=-5;\ B=1) \to \frac{x-8}{-5} = \frac{y-3}{1} = y = 1/5x + 23/5 = 5y+x-23=0$

4) Уравнение медианы AM.

$x_m = \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{0+8}{2} = 4$

$y_m = \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{7+3}{2} = 5 \quad M(4;5)$

$\frac{x+2}{4-(-2)} = \frac{y+3}{5-(-3)} \to y = 4/3x - \frac{1}{3}$ или

$3y-4x+1=0$

5) Координаты точки пересечения AM и CH найдем из системы уравнений:

$\begin{cases} 3y-4x+1=0 \\ 5y+x-23=0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{91}{23};\ x = \frac{74}{23}$

$N\left(\frac{74}{23};\ \frac{91}{23}\right)$

6) Уравнение параллельной прямой AB проходящей через $C(8;3)$

$y-y_0 = k(x-x_0)$ где $k = 1/_{AB} = 5$;

$y_0 = 3;\ x_0 = 8$

$y-3 = 5(x-8) \Rightarrow y = 5x-37$

Задача № 65.

Даны координаты вершин пирамиды ABCD. Вычислить:

1) объем пирамиды;
2) длину ребра AB;
3) площадь грани ABC;
4) угол между ребрами AB и AD

Координаты вершин пирамиды для соответствующих номеров задач следующие:

$A(2;-5;3)$, $B(3;2;-5)$, $C(5;-3;-2)$, $D(-5;3;-2)$

1) Находим векторы $\overline{AB}(1;7;-8)$, $\overline{AC}(3;2;-5)$, $\overline{AD}(-7;8;-5)$

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 7 & -8\\ 3 & 2 & -5\\ -7 & 8 & -5\end{vmatrix}=\frac{76}{6}=12,67$$

2) Длина $\overline{AB}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{1^2+7^2+8^2}=$

$=\sqrt{114}=10,68$

3) Площадь грани $ABC=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|=$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 7 & -8\\ 3 & 2 & -5\end{vmatrix}=\frac{1}{2}|-19i-19j-19k|=$$

$=\frac{1}{2}\sqrt{19^2+19^2+19^2}=16,45$

4) Угол между $\overline{AB}$ и $\overline{AD}\Rightarrow\cos\varphi=$

$$=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{|AB||AD|}=\frac{1\cdot(-7)+7\cdot8+(-8)(-5)}{\sqrt{114}\cdot\sqrt{138}}=0,71$$

$\varphi=\arccos(0,71)=44,8^\circ$

Задача № 95.

Найти пределы (не применяя правило Лопиталя):

а) $$\lim_{x\to-3}\frac{2x^2+5x-3}{3x^2+11x+6}=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(2x-1)}{(x+3)(3x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{2x-1}{3x+2}=\frac{-7}{-7}=1$$

б) $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+2x+3}{1-4x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{(5x^3+2x+3)/x^3}{(1-4x^3)/x^3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{\frac{1}{x^3}-4}=\frac{5}{-4}=-1\frac{1}{4}$$

в) $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos6x}{1-\cos2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x}=$$

$$=\lim\frac{9\sin^2 3x/x^2}{9x^2\sin^2 x}=9$$

г) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-1}\right)^{6x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{5}}\right]^{\frac{5}{x-1}\cdot6x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{30x}{x-1}}=e^{30}$$

Задача № 125.

Найти производные первого порядка данных функций, используя правила вычисления производных:

а) $y = 8x^2 - \frac{4}{x} + \sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{x^3}$;

$y'_x = 16x + \frac{4}{x^2} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} + \frac{6}{x^4}$

б) $y = x^5 \cdot e^x$

$y'_x = e^x(4x^4 + x^5)$

в) $y = \frac{tg x}{\ln x}$

$y'_x = \frac{\frac{\ln x}{\cos^2 x} - \frac{tg x}{x}}{\ln^2 x}$

г) $\begin{cases} x = 7 + t^2 \\ y = ctg\, 3t^2 \end{cases}$; $dy = -\frac{6 \cdot t dt}{\sin^2 3t^2}$; $dx = 2t dt$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{\sin^2 3t^2}$

д) $2^x + 2^y = x + y$

$\ln 2 \cdot 2^x + y' \ln 2 \cdot 2^y = 1 + y'$

$y'(1 - \ln 2 \cdot 2^y) = \ln 2 \cdot 2^x - 1 \quad y'_x =$

$= \frac{2^x \ln 2 - 1}{1 - 2^y \ln 2}$

Задача № 155.

Построить график функции $y = f(x)$, используя общую схему исследования

$y = (x-6)(x-3)^2$

1) Область определения: $x \in R$

2) Четность - нечетность. Периодичность.

$y(-x) = (-x-6)(-x-3)^2 \neq \pm y(x)$

функция нечетная. Функция не периодич.

3) Вертикальных асимптот нет. Наклонные асимптоты ищем в виде $y = kx + b$, где

$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(x-6)(x-3)^2}{x} = \infty$

Наклонных асимптот нет

4) Точки пересечения с осями координат $x = 0$; $y = -54$; $(0; -54)$

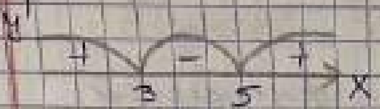
$y = 0$; $x_1 = 6$; $x_2 = 3$ $(6; 0)$, $(3; 0)$

5) Экстремумы. Интервалы монотонности.

$y' = (x-3)^2 + 2(x-6)(x-3) = (x-3)(x-3+$

$+2x-12) = (x-3)(3x-15)$

$y' = 0 \Rightarrow x_1 = 3$; $x_2 = 5$



На интервалах $(-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$ функция возрастает

На интервале $(3; 5)$ функция убывает.

$x = 3$ – точка максимума; $y_{max} = 0$

$x = 5$ – точка минимума; $y_{min} = -4$

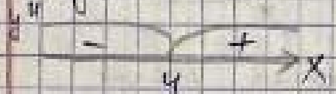
в) Точки перегиба. Интервалы выпуклости-вогнутости.

$y'' = 3x - 15 + 3(x-3) = 3x - 15 + 3x - 9 =$

$= 6x - 24$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 4$ – точка перегиба,

$y(4) = -2$



На интервале $(-\infty; 4)$ функция выпукла вверх.

На интервале $(4; +\infty)$ функция вогнута вниз.

г) На основании полученных данных строим график функции.