

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
"Казанский государственный аграрный университет"

Тетрадь

для _____

учени _____ класса _____

_____ школы _____

Контрольная работа

по математике

Работу выполнила
студентка 1 курса
заочной формы обучения
факультет ФЛХ и Э
по направлению ландшаф
тная архитектура

Группа: Б402-02

Багашева Р.А.

№ зачетной книжки

Прверила: Киселева Н.Т.

Казань 2021г.

Задача №26.

Решите систему линейных уравнений тремя способами: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$a) \begin{cases} 2x + 3y + z = 8 \\ x - y + 2z = -2 \\ 5x + y - 3z = -5 \end{cases}$$

$$x - y + 2z = -2$$

$$5x + y - 3z = -5$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot (-3) = 6 + 30 + 1 + 5 - 4 + 9 = 47$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-1) \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \cdot (-5) + 1 \cdot (-2) \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot (-5) - 8 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) = 24 - 30 - 2 - 5 - 16 - 18 = -47$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 5 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot (-3) + 8 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot (-5) - 1 \cdot (-2) \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot (-5) - 8 \cdot 1 \cdot (-3) = 12 + 80 - 5 + 10 + 20 + 24 = 141$$

$$\Delta_3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot (-5) + 3 \cdot (-2) \cdot 5 + 8 \cdot 1 \cdot 1 -$$

$$- 8 \cdot (-1) \cdot 5 - 2 \cdot (-2) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot (-5) =$$

$$= 10 - 30 + 8 + 40 + 4 + 15 = 47$$

Antwort:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-47}{47} = -1$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{141}{47} = 3$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{47}{47} = 1$$

$$5) \quad 2x + 3y + z = 8$$

$$x - y + 2z = -2$$

$$5x + y - 3z = -5$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1,5 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1,5 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & -2,5 & 1,5 & -0,5 & 1 & 0 \\ 0 & -6,5 & -5,5 & -2,5 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1,5 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,6 & 0,2 & -0,4 & 0 \\ 0 & -6,5 & -5,5 & -2,5 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1,4 & 0,2 & 0,6 & 0 \\ 0 & 1 & -0,6 & 0,2 & -0,4 & 0 \\ 0 & 0 & -9,4 & -1,2 & -2,6 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1,4 & 0,2 & 0,6 & 0 \\ 0 & 1 & -0,6 & 0,2 & -0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{47} & \frac{13}{47} & -\frac{5}{47} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{47} & \frac{10}{47} & \frac{7}{47} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{47} & -\frac{11}{47} & -\frac{3}{47} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{47} & \frac{13}{47} & -\frac{5}{47} \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{47} & \frac{10}{47} & \frac{7}{47} \\ \frac{13}{47} & -\frac{11}{47} & -\frac{3}{47} \\ \frac{6}{47} & \frac{13}{47} & -\frac{5}{47} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad 2x + 3y + z &= 8 \\ x - y + 2z &= -2 \\ 5x + y - 3z &= -5 \end{aligned}$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = -2$$

$$5x_1 + x_2 - 3x_3 = -5$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 3 & -5 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1,5 & 0,5 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 & -5 \end{array} \right) / 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1,5 & 0,5 & 4 \\ 0 & -2,5 & 1,5 & -6 \\ 0 & -6,5 & -5,5 & -25 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1,5 & 0,5 & 4 \\ 0 & 1 & -0,6 & 2,4 \\ 0 & -6,5 & -5,5 & -25 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1,4 & 0,4 \\ 0 & 1 & -0,6 & 2,4 \\ 0 & 0 & -9,4 & -9,4 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1,4 & 0,4 \\ 0 & 1 & -0,6 & 2,4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} X_1 = -1 \\ X_2 = 3 \\ X_3 = 1 \end{cases}$$

проб.

$$2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 + 1 = -2 + 9 + 1 = 8$$

$$(-1) - 3 + 2 \cdot 1 = -1 - 3 + 2 = -2$$

$$5 \cdot (-1) + 3 - 3 \cdot 1 = -5 + 3 - 3 = -5$$

Ответ:

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Задача 43.

$$A(1; 0); B(7; 3); C(4; 4)$$

Решение:

$$1) \vec{AC} = \{4-1; 4-0\} = \{3; 4\}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$2) \frac{x-1}{7-1} = \frac{y-0}{3-0}$$

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \text{у.л. } AB$$

$$3) \text{Т.к. } CH \perp AB, \text{ то } k_{CH} = -\frac{1}{k_{AB}} = -2$$

$$y = -2x + 8$$

Подставим координаты Т.с:

$$4 = -8 + 8 \Rightarrow 8 = 12$$

$$y = -2x + 12 \text{ - ур-ния } CH$$

4) Найти координаты Т.М - середины стороны BC

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{7 + 4}{2} = 5,5; \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3 + 4}{2} = 3,5$$

$$M(5,5; 3,5)$$

Ур-на AM:

$$\frac{x-1}{5,5-1} = \frac{y-0}{3,5-0} \Rightarrow y = \frac{7}{9}x - \frac{7}{9} \text{ - ур-на } AM$$

5) Найдём Т. N пересечения AM и CH:

$$\begin{cases} y = -2x + 12 \\ y = \frac{7}{9}x - \frac{7}{9} \end{cases} \Rightarrow -2x + 12 = \frac{7}{9}x - \frac{7}{9} \Rightarrow \begin{cases} x = 4,6 \\ y = 2,8 \end{cases}$$

$$N(4,6; 2,8)$$

6) Ур-ие прямой $\parallel AB$.

$$k = k_{AB} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + 8$$

Подставим координаты Т.С:

$$4 = 2 + 8 = 2; \quad y = \frac{1}{2}x + 2$$

Задача 86.

$$A(1; -2; 1); B(3; 1; -2); C(2; 2; 5); D(-2; 1; 0)$$

$$1) V = \frac{1}{6} |\overline{AB} \times \overline{AC} \times \overline{AD}|$$

$$\overline{AB} = \{3-1; 1+2; -2-1\} = \{2; 3; -3\}$$

$$\overline{AC} = \{2-1; 2+2; 5-1\} = \{1; 4; 4\}$$

$$\overline{AD} = \{-2-1; 1+2; 0-1\} = \{-3; 3; -1\}$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} \times \overline{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -8 - 36 - 9 - 36 - 24 + 3 = -110$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot 110 = \frac{55}{3}$$

$$2) |\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}$$

$$3) S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 24i - 11j + 5k$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{24^2 + 11^2 + 5^2} = \frac{1}{2} \sqrt{722} = \frac{19\sqrt{2}}{2}$$

$$4) \cos(\widehat{AB;AD}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}|} = \frac{-2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1}{\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-1)^2}} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{19}} = \frac{6}{\sqrt{418}}$$

$$\widehat{AB;AD} = \arccos \frac{6}{\sqrt{418}} \approx 72,9^\circ$$

Задача 103.

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - 5x + 1}{2x^2 - 3x + 5} = \frac{4 + 5 + 1}{2 + 3 + 5} = \frac{10}{10} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x + 1}{x^2 + 5 - 7x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x} + \frac{5}{x^3} - 7} = -\frac{3}{7}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 6x + 8} = \left| \begin{array}{l} x^2 - 6x + 8 = 0 \\ x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \\ x_1 = 2; x_2 = 4 \end{array} \right|$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x-2)(x-4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-2)(x-4)(\sqrt{x} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x-2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-7}{2x-3} \right)^{4x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3-4}{2x-3} \right)^{4x+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{2x-3} \right)^{-\frac{2x-3}{4}} \cdot \left(-\frac{4(4x+1)}{2x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{4(4x+1)}{2x-3} =$$

$$= 1^{-8}$$

Задача 133.

Найти производные первого порядка данных функций, используя правила вычисления производных:

$$a) y = 8x - \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x} - \sqrt[5]{x^4}$$

$$y' = 8 + \frac{20}{x^5} - \frac{1}{x^2} - \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$$

$$b) y' = (2^{\operatorname{ctg}^2 x})' \cdot (5x^3 + \sqrt[3]{x}) + 2^{\operatorname{ctg}^2 x} \cdot (5x^3 + \sqrt[3]{x})' =$$

$$= 2^{\operatorname{ctg}^2 x} \cdot 2 \operatorname{ctg} x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) \cdot (5x^3 + \sqrt[3]{x}) + 2^{\operatorname{ctg}^2 x} (15x^2 +$$

$$+ \frac{1}{3} x^{-2/3}) = -2^{\operatorname{ctg}^2 x + 1} \cdot \operatorname{ctg} x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} (5x^3 + \sqrt[3]{x}) +$$

$$+ 2^{\operatorname{ctg}^2 x} \left(15x^2 + \frac{1}{3} x^{-2/3} \right)$$

$$b) y' = \left(\frac{\operatorname{ctg} 3x}{1+e^{x/4}} \right)' = \frac{(8 \operatorname{ctg} 3x)' \cdot (1+e^{x/4}) - \operatorname{ctg} 3x (1+e^{x/4})'}{(1+e^{x/4})^2} =$$

$$= \frac{8 \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3(1+e^{x/4}) - \operatorname{ctg} 3x \cdot e^{x/4}}{(1+e^{x/4})^2} = \frac{24(1+e^{x/4})}{\cos^2 3x} - \frac{\operatorname{ctg} 3x \cdot e^{x/4}}{(1+e^{x/4})^2}$$

$$2) \begin{cases} x = \ln(5-2t) \\ y = \operatorname{arctg}(5-2t) \end{cases}$$

$$x'_t = \frac{-2}{5-2t}$$

$$y'_t = \frac{-2}{1+(5-2t)^2}$$

$$y'_x = \frac{-2}{1+(5-2t)^2} \cdot \frac{(5-2t)}{-2} = \frac{5-2t}{1+(5-2t)^2}$$

$$9) x = \operatorname{arctg}(2x+y)$$

$$1 = \frac{1}{1+(2x+y)^2} \cdot (2+y')$$

$$y' = \frac{1}{1+(2x+y)^2} = 1 - \frac{2}{1+(2x+y)^2} = \frac{1+(2x+y)^2-2}{1+(2x+y)^2}$$

$$y' = (2x+y)^2 - 1$$

Задача 155.

Построить график функции $y = f(x)$, используя таблицу исследования.

$$y = (x-6)(x-3)^2$$

1) Область определения: $x \in \mathbb{R}$

2) Четность - нечетность: Периодичность

$$y(-x) = (-x-6)(-x-3)^2 \neq \pm y(x)$$

Функция ни четная, ни нечетная. Функция не периодическая

3) Вертикальных асимптот нет. Наклонные асимпт. имеют вид $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-6)(x-3)}{x} = \infty$$

Наклонных асимптот нет.

4) Точки пересечения с осями координат.

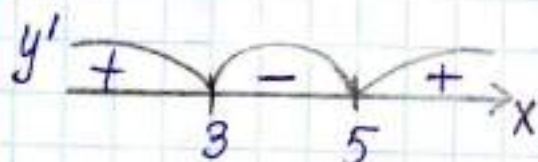
$$x=0 : y = -54 \quad (0; -54)$$

$$y=0 : x_1 = 6; x_2 = 3 \quad (6; 0); (3; 0)$$

5) Экстремум и интервалы монотонности.

$$y' = (x-3)^2 + 2(x-6)(x-3) = (x-3)(x-3+2x-12) = \\ = (x-3)(3x-15)$$

$$y' = 0 \Rightarrow x_1 = 3; x_2 = 5$$



На интервалах $(-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$ функция возрастает. На интервале $(3; 5)$ функция убывает.

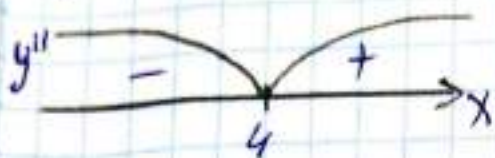
$x = 3$ — точка максимума; $y_{\max} = 0$

$x = 5$ — точка минимума; $y_{\min} = -4$

6) Точки перегиба. Интервалы выпуклости — вогнутости.

$$y'' = 3x - 15 + 3(x - 3) = 3x - 15 + 3x - 9 = 6x - 24$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = 4 - \text{точка перегиба}; y(4) = -2$$



На интервале $(-\infty; 4)$ функция выпукла вверх;
 на интервале $(4; +\infty)$ функция вогнута вниз.

7) На основании полученных данных строим график функции.

