Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования.

Казанский государственный аграрный университет.

Кафедра физики и математики.

Тетрадь

для Контрольная работа

по дисциплине „Математика"

ученик Выполнила: студентка класса 1 курса

агрономического факультета школы

гр. Б102-04, направление: землеустройство

и кадастры.

Аббазова Л.Д.

Номер зач. кн.: А320553

Проверила: Киселева Н.Г.

Казань, 2020.

Сканировано с CamScanner

Контрольная работа.

Решить систему линейных уравнений тремя способами: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

№8.

$$\begin{cases} x+3y+4z=6 \\ 2x-y-z=1 \\ x+2y+3z=5 \end{cases}$$

Решение.

а) По формулам Крамера:

Находим определитель матрицы системы по правилу треугольников:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot3+3\cdot(-1)\cdot1+4\cdot2\cdot2-4\cdot(-1)\cdot1-$$

$$-3\cdot2\cdot3-1\cdot(-1)\cdot2=-2$$

Находим определители Δx, Δy, Δz:

$$\Delta x=\begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}=6\cdot(-1)\cdot3+3\cdot(-1)\cdot5+4\cdot1\cdot2-4\cdot(-1)\cdot5-$$
$$-3\cdot1\cdot3-6\cdot(-1)\cdot2=-2$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot1\cdot3+6\cdot(-1)\cdot1+4\cdot2\cdot5-4\cdot1\cdot1-6\cdot2\cdot3-$$
$$-1\cdot(-1)\cdot5=2$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot5+3\cdot1\cdot1+6\cdot2\cdot2-6\cdot(-1)\cdot1-$$
$$-3\cdot2\cdot5-1\cdot1\cdot2=-4.$$

Сканировано с CamScanner

По формулам Крамера нахожу:

$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1$, $y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{2}{-2} = -1$; $z = \frac{-4}{-2} = 2$

б) с помощью обратной матрицы.

Обозначу.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Тогда исходная система в матричной форме выглядит так:

$AX = B$.

Её решение:

$X = A^{-1}B$

A^{-1} методом присоединенной матрицы нахожу.

Определитель матрицы системы был найден: $\Delta = -2$.

Вычисляю алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$A11 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = -1$

$A12 = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2 \cdot 3 - (-1) \cdot 1) = -7$

$A13 = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1) = 5$

$$A21=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=(3\cdot3-4\cdot2)=-1$$

$$A22=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1\cdot3-4\cdot1=-1$$

$$A23=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(1\cdot2-3\cdot1)=1$$

$$A31=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{vmatrix}=3\cdot(-1)-4\cdot(-1)=1$$

$$A32=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-(1\cdot(-1)-4\cdot2)=9$$

$$A33=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)-3\cdot2=-7$$

Получаю матрицу алгебраических дополнений:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}-1 & -7 & 5\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 9 & -7\end{pmatrix}.$$

Обратная матрица равна:

$$A^{-1}=\frac{\tilde{A}^T}{\Delta}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -7 & -1 & 9\\ 5 & 1 & -7\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 7 & 1 & -9\\ -5 & -1 & 7\end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 7 & 1 & -9\\ -5 & -1 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\ 1\\ 5\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\cdot6+1\cdot1+(-1)\cdot5\\ 7\cdot6+1\cdot1+(-9)\cdot5\\ (-5)\cdot6+(-1)\cdot1+7\cdot5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$$

Получаю, $x=1$; $y=-1$; $z=2$

Сканировано с CamScanner

в) методом Гаусса.

Из коэффициентов при неизвестных и свободных членов составляю расширенную матрицу системы.

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 4 & 6\\ 2 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 5\end{array}\right)$$

Элементарными преобразованиями приведу ее к ступенчатому виду:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 4 & 6\\ 2 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 5\end{array}\right)\sim$$

Умножаю 1-ю строку на (-2) и прибавляю ко 2-й строке, умножаю 1-ю строку на (-1) и прибавляю к 3-й строке:

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 4 & 6\\ 0 & -7 & -9 & -11\\ 0 & -1 & -1 & -1\end{array}\right)\sim$$

Умножаю 2-ю строку на (-1/7) и прибавляю к 3-й строке.

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 4 & 6\\ 0 & -7 & -9 & -11\\ 0 & 0 & 2/7 & 4/7\end{array}\right)$$

Отсюда из 3-й строки получаю:

$$\frac{2}{7}z=\frac{4}{7},\ z=2$$

Из 2-й строки получаю:

$$-7y-9\cdot 2=-11,\ y=-1$$

Сканировано с CamScanner

Из 1-й строки получаю:

$x+3\cdot(-1)+4\cdot 2=6$, $x=1$

Ответ: $x=1$; $y=-1$; $z=2$.

№52.

Даны координаты вершин треугольника ABC.

Найти:

1) Длину стороны AC;

2) Уравнение стороны AB;

3) Уравнение высоты CH;

4) Уравнение медианы AM;

5) Точку N пересечения медианы AM и высоты CH;

6) Уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB.

$A(-2;4)$, $B(4;7)$, $C(1;8)$.

Решение:

Обозначу координаты вершин треугольника: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$.

1) Длина стороны AC:

$AC=\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}=\sqrt{(1+2)^2+(8-4)^2}=\sqrt{25}=5$

2) Уравнение стороны AB

Сканировано с CamScanner

Уравнение прямой, проходящей через точки А и В:

$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$, т. е. $\frac{y-4}{7-4}=\frac{x+2}{4+2}$, $y-4=\frac{1}{2}(x+2)$, $y=\frac{1}{2}x+5$.

3) Уравнение высоты CH

Уравнение высоты CH составлю как уравнение прямой, проходящей через точку С:

$y-y_3=k_{CH}(x-x_3)$.

Коэффициент $k_{CH}=\frac{-1}{k_{AB}}$, где k_{AB} - угловой коэффициент прямой AB. Получаю:

$k_{CH}=\frac{-1}{\frac{1}{2}}=-2$, $y-8=-2(x-1)$, $y=-2x+10$

4) уравнение медианы AM.

Найду координаты точки M как середины BC:

$x_M=\frac{x_2+x_3}{2}=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2}$, $y_M=\frac{y_2+y_3}{2}=\frac{7+8}{2}=$
$=\frac{15}{2}$

Уравнение AM:

$\frac{y-y_1}{y_M-y_1}=\frac{x-x_1}{x_M-x_1}$, т. е. $\frac{y-4}{\frac{15}{2}-4}=\frac{x+2}{\frac{5}{2}+2}$, $y-4=$
$=\frac{7}{9}(x+2)$

Сканировано с CamScanner

$y = \frac{7}{9}x + \frac{50}{9}.$

5) точка N пересечения медианы AM и высоты CH

Решу систему уравнений:

$\begin{cases} y = \frac{7}{9}x + \frac{50}{9} \\ y = -2x + 10 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{7}{9}x + \frac{50}{9} = -2x + 10 \\ y = -2x + 10 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = -2x + 10 = \frac{34}{5} \end{cases}$

Получила точку $N\left(\frac{8}{5}; \frac{34}{5}\right)$.

6. Уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB

Эта прямая имеет тот же угловой коэффициент K, что и прямая AB, т.е. $K = K_{AB} = \frac{1}{2}$. Уравнение прямой, имеющей коэффициент K и проходящей через точку C имеет вид:

$y - y_3 = K \cdot (x - x_3)$, $y - 8 = \frac{1}{2}(x - 1)$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$

<u>N68</u>. Даны координаты вершин пирамиды ABCD.

Вычислить: 1) объем пирамиды;
2) длину ребра AB
3) площадь грани ABC;
4) угол между ребрами AB и AD.

Координаты вершин пирамиды: $A(6; 3; 5)$, $B(5; -6; 3)$,

Сканировано с CamScanner

$C(3;5;6)$, $D(-6;-1;2)$.

Решение:

Обозначу координаты вершин пирамиды $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$.

1) Объем пирамиды.

Нахожу его как модуль смешанного произведения:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB}\cdot[\overline{AC}\times\overline{AD}]\right)\right|.$$

Нахожу векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$:

$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k} = (5-6)\bar{i} + (-6-3)\bar{j} + (3-5)\bar{k} = -\bar{i} - 9\bar{j} - 2\bar{k}$.

$\overline{AC} = (x_3 - x_1)\bar{i} + (y_3 - y_1)\bar{j} + (z_3 - z_1)\bar{k} = (3-6)\bar{i} + (5-3)\bar{j} + (6-5)\bar{k} = -3\bar{i} + 2\bar{i} + \bar{k}$

$\overline{AD} = (x_4 - x_1)\bar{i} + (y_4 - y_1)\bar{j} + (z_4 - z_1)\bar{k} = (-6-6)\bar{i} + (-1-3)\bar{j} + (2-5)\bar{k} = -12\bar{i} - 4\bar{j} - 3\bar{k}$.

Объём пирамиды рассчитаю через определитель, который раскрою по правилу треугольника:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB}\cdot[\overline{AC}\times\overline{AD}]\right)\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} -1 & -9 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -12 & -4 & -3 \end{matrix}\right\| =$$

$$= \frac{1}{6}\left|(-1)\cdot 2\cdot(-3) + (-9)\cdot 1\cdot(-12) + (-2)\cdot(-3)\cdot(-4) - (-2)\cdot 2\cdot(-12) - (-9)\cdot(-3)\cdot(-3) - (-1)\cdot 1\cdot(-4)\right| = \frac{|119|}{6} = \frac{119}{6}$$

8

2) Длина ребра AB

$AB = |\overline{AB}| = \sqrt{x_{AB}^2 + y_{AB}^2 + z_{AB}^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-9)^2 + (-2)^2} = \sqrt{86}$

3) площадь грани ABC

$S_{ABC} = \frac{1}{2}|[\overline{AB} \times \overline{AC}]| = \frac{1}{2}\left|\left|\begin{matrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & -9 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{matrix}\right|\right| = \frac{1}{2}|\bar{i}((-9)\cdot 1 - (-2)\cdot 2) -$

$- \bar{j}((-1)\cdot 1 - (-2)\cdot(-3)) + \bar{k}((-1)\cdot 2 - (-9)\cdot(-3))| = \frac{1}{2}|-5\bar{i} + 7\bar{j} - 29\bar{k}| =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2 + 7^2 + (29)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{915}$

4) Угол между рёбрами AB и AD

Обозначу угол между ребрами AB и AD за α.

$\cos\alpha = \frac{(\overline{AB}\cdot\overline{AD})}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AD}|} = \frac{(-1)\cdot(-12)+(-9)\cdot(-4)+(-2)\cdot(-3)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{(-12)^2+(4)^2+(-3)^2}} =$

$= \frac{54}{13\sqrt{86}} \approx 0,4479.$

$a \approx \arccos 0,4479 \approx 63,4°.$

№112. Найти пределы (не применяя правило Лопиталя):

а) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+5x+4}{2x^2-3x+5} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{(-2)^2+5\cdot(-2)+4}{2\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)+5} =$

$= \frac{-2}{19} = -\frac{2}{19}.$

Сканировано с CamScanner

б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^3-3x^2+2}{-3x^4+5x^3-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3(6-3x^{-1}+2x^{-3})}{x^4(-3+5x^{-1}-x^{-4})} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{6-3x^{-1}+2x^{-3}}{x(-3+5x^{-1}-x^{-4})} = \frac{6}{\infty} = 0.$

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x(1-\cos^2 x)}{x\cdot 2\sin x\cos x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{2x\sin x} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \{$ первый замечательный предел: $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1\} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{8}{2x+5}\right)^{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{8}{2x+5}\right)^{-\frac{2x+5}{8}}\right]^{-\frac{8(x-1)}{2x+5}} = \{$ второй замечательный предел: $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e\} = \lim\limits_{x\to\infty}$

$e^{-\frac{8(x-1)}{2x+5}} = e^{-8/2} = e^{-4}$

<u>N142.</u> Найти производные первого порядка данных функций, используя правила вычисления производных.

N142.

а) $y = x^2 - 3\sqrt{x^5} - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^4}$

$y' = \left(x^2 - 3\sqrt{x^5} - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^4}\right)' = 2x - 3\cdot\frac{5}{2}x^{3/2} + \frac{4}{x^2} + \frac{20}{x^5} =$

$= 2x - \frac{15}{2}x^{3/2} + \frac{4}{x^2} + \frac{20}{x^5}$

Сканировано с CamScanner

б) $y = \arccos 4x \ln x = y' = (\arccos 4x \cdot \ln x)' = (\arccos 4x)' \cdot \ln x + \arccos 4x \cdot (\ln x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}} \cdot 4 \cdot \ln x + \arccos 4x \cdot \frac{1}{x} = \frac{-4\ln x}{\sqrt{1-(4x)^2}} + \frac{\arccos 4x}{x}$

в) $y = \frac{tg\, 3x}{x^2+2x}$

$y' = \left(\frac{tg\, 3x}{x^2+2x}\right)' = \frac{(x^2+2x)(tg\, 3x)' - (x^2+2x)' \cdot tg\, 3x}{(x^2+2x)^2} =$

$= \frac{(x^2+2x)\frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3 - (2x+2)tg\, 3x}{(4-3\cos x)^2} =$

$= \frac{3(x^2+2x) - (2x+2)\sin 3x \cos 3x}{(x^2+2x)^2 \cos^2 3x} = \frac{3(x^2+2x) - (x+1)\sin 6x}{(x^2+2x)^2 \cos^2 3x}$

г). $x = te^{-5t}$
$y = (5t-1)^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$.

$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}((5t-1)^2) = 2 \cdot (5t-1) \cdot 5 = 10 \cdot (5t-1)$

$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(te^{-5t}) = e^{-5t} + t \cdot (-5e^{-5t}) = e^{-5t}(1-5t)$

Тогда:

$\frac{dy}{dx} = \frac{10(5t-1)}{e^{-5t}(1-5t)} = \frac{-10}{e^{-5t}} = -10e^{5t}$

д) $e^{xy}=4x-7y$

$e^{xy}=4x-7y$, $(e^{xy})'=(4x-7y)'$,

$e^{xy}\cdot(y+x\cdot y')=4-7y'$

$y'=\frac{4-ye^{xy}}{xe^{xy}+7}$

173. Построить график функции $y=f(x)$, используя общую схему исследования.

№173. $y=-(x+2)\cdot(x-1)^2$

Решение:

Преобразую функцию:

$y=-(x+2)\cdot(x-1)^2=-(x+2)(x^2-2x+1)=-x^3+3x-2$

1. Область определения функции: $D(y)$: $x\in(-\infty;\infty)$.

Симметрия: функция общего вида.

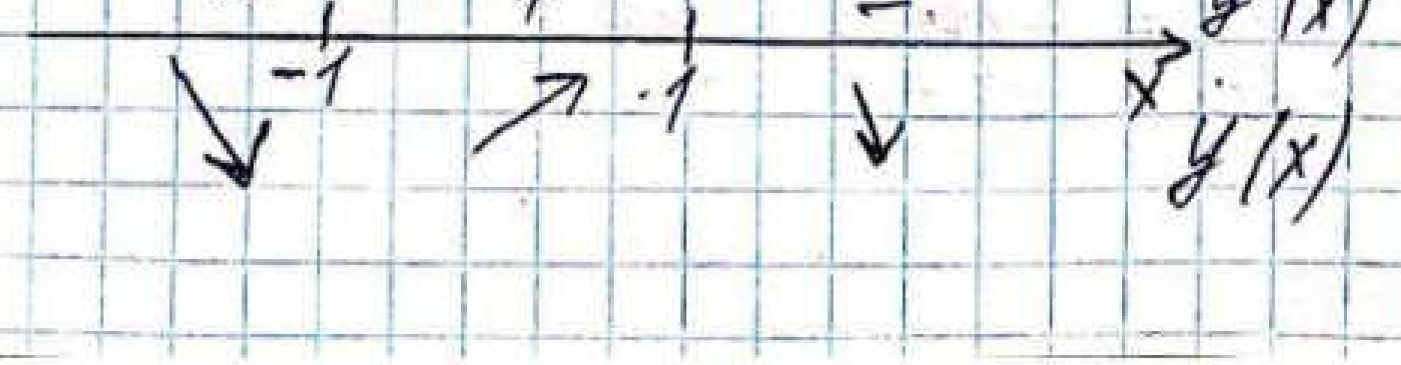
Нули функции: $x=-2$; $x=1$.

2. Точки разрыва: нет точек разрыва.

3. Экстремумы:

$y'(x)=(-x^3+3x-2)'=-3x^2+3=-3(x+1)\cdot(x-1)=0$.

$x_1=-1$; $x_2=1$.



Т.е. функция возрастает на $x \in (-1;1)$ и убывает на $x \in (-\infty;-1) \cup (1;\infty)$

$x=-1$ – точка локального минимума, $y(-1)=-4$

$x=1$ – точка локального максимума $y(1)=0$.

4. Точки перегиба:

$$y''(x)=(-3x^2+3)'=-6x=0,\quad x_3=0.$$

Т.е. функция выпуклая вверх на $x \in (0;+\infty)$ и выпуклая вниз на $x \in (-\infty;0)$.

$x_3=0$ – точка перегиба, $y(0)=-2$

5. Асимптоты:

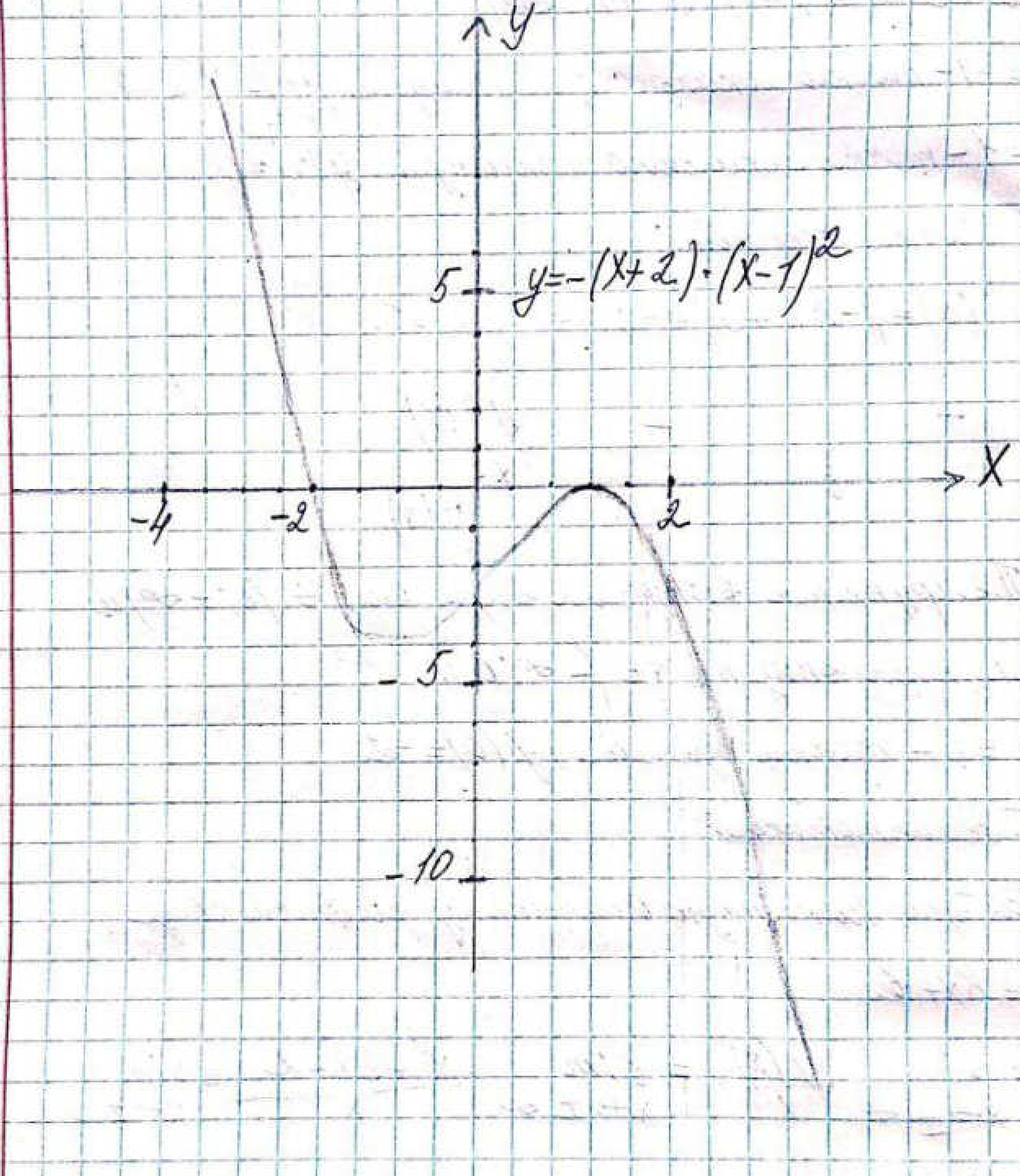
Найдем наклонную асимптоту графика в виде $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^3+3x-2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-x^2+3-\frac{2}{x}\right)=-\infty,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}(-x^3+3x-2-\infty\cdot x)=\infty$$

Следовательно, график функции не имеет асимптот.

6. Учитывая все эти особенности, построю график функции:



Сканировано с CamScanner