Задача 7

Решите систему линейных уравнений тремя способами: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = -2, \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$$

Метод Крамера

Запишем систему в виде:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B^T = (2,-2,1)$

Считаем определитель системы:

$\Delta = 2 \bullet (2 \bullet 1-(-2) \bullet 2)-3 \bullet ((-1) \bullet 1-(-2) \bullet 1)+1 \bullet ((-1) \bullet 2-2 \bullet 1) = 5$

По методу Крамера меняем 1-ый столбец матрицы А на вектор результата В.

2	-1	1
-2	2	2
1	-2	1

Найдем определитель полученной матрицы.

$\Delta_1 = 2 \bullet (2 \bullet 1-(-2) \bullet 2)-(-2) \bullet ((-1) \bullet 1-(-2) \bullet 1)+1 \bullet ((-1) \bullet 2-2 \bullet 1) = 10$

Аналогично, для второго и третьего столбцов

2	2	1
3	-2	2
1	1	1

$\Delta_2 = 2 \bullet ((-2) \bullet 1-1 \bullet 2)-3 \bullet (2 \bullet 1-1 \bullet 1)+1 \bullet (2 \bullet 2-(-2) \bullet 1) = -5$

2	-1	2
3	2	-2
1	-2	1

$\Delta_3 = 2 \bullet (2 \bullet 1-(-2) \bullet (-2))-3 \bullet ((-1) \bullet 1-(-2) \bullet 2)+1 \bullet ((-1) \bullet (-2)-2 \bullet 2) = -15$

Решение ищем в виде

$x_1 = \frac{\Delta 1}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2$, $x_2 = \frac{\Delta 2}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1$, $x_3 = \frac{\Delta 3}{\Delta} = \frac{-15}{5} = -3$

Метод обратной матрицы

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B^T=(2,-2,1)$

$\Delta=2\bullet(2\bullet1-(-2\bullet2))-3\bullet(-1\bullet1-(-2\bullet1))+1\bullet(-1\bullet2-2\bullet1)=5 \neq 0$, ищем решение. Найдем обратную матрицу через алгебраические дополнения.

$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}

$A^T=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Вычисляем алгебраические дополнения.

$A_{1,1}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=(2\bullet1-2\bullet(-2))=6$

$A_{1,2}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-(-1\bullet1-1\bullet(-2))=-1$

$A_{1,3}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=(-1\bullet2-1\bullet2)=-4$

$A_{2,1}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-(3\bullet1-2\bullet1)=-1$

$A_{2,2}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=(2\bullet 1-1\bullet 1)=1$

$A_{2,3}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-(2\bullet 2-1\bullet 3)=-1$

$A_{3,1}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=(3\bullet(-2)-2\bullet 1)=-8$

$A_{3,2}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-(2\bullet(-2)-(-1\bullet 1))=3$

$A_{3,3}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=(2\bullet 2-(-1\bullet 3))=7$

Тогда

$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

$X=A^{-1}\bullet B$

$X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -8 & 3 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} (6\bullet 2)+(-1\bullet(-2))+(-4\bullet 1) \\ (-1\bullet 2)+(1\bullet(-2))+(-1\bullet 1) \\ (-8\bullet 2)+(3\bullet(-2))+(7\bullet 1) \end{pmatrix},\ X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -15 \end{pmatrix}$

$x_1={}^{10}/{}_{5}=2$

$x_2={}^{-5}/{}_{5}=-1$

$x_3={}^{-15}/{}_{5}=-3$

метод Гаусса

Запишем систему в виде расширенной матрицы:

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Умножим 1-ую строку на (3). Умножим 2-ую строку на (-2). Добавим 2-ую строку к 1-ой:

$\begin{pmatrix} 0 & -7 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Умножим 3-ую строку на (-3). Добавим 3-ую строку к 2-ой:

$\begin{pmatrix} 0 & -7 & -1 \\ 0 & 8 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Умножим 1-ую строку на (8). Умножим 2-ую строку на (7). Добавим 2-ую строку к 1-ой:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -15 \\ 0 & 8 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 45 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Тогда

$x_3 = 45/(-15)$

$x_2 = [-5 - (- x_3)]/8$

$x_1 = [1 - (- 2x_2 + x_3)]/1$

$x_3 = \frac{45}{-15} = -3,\ x_2 = \frac{-5 - (-1)\bullet(-3)}{8} = \frac{-8}{8} = -1,\ x_1 = \frac{1 - (-2)\bullet(-1) - 1\bullet(-3)}{1} = \frac{2}{1} = 2$

Задача 54

Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти:

1) длину стороны AC;
2) уравнение стороны AB;
3) уравнение высоты CH;
4) уравнение медианы AM;
5) точку N пересечения медианы AM и высоты CH;
6) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB.

(54) $A(-1;0)$; $B(5;3)$, $C(2;4)$

Решение:

1) $\overline{AC} = \{2+1;\ 4-0\} = \{3;4\}$

$|\overline{AC}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

2) $\dfrac{x+1}{5+1} = \dfrac{y-0}{3-0}$

$\dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ - ур-ние AB

3) Т.к. $CH \perp AB$, то $k_{CH} = -\dfrac{1}{k_{AB}} = -2$

$y = -2x + b$

Подставляем координаты т. С

$4 = -4 + b \Rightarrow b = 8$

$y = -2x + 8$ - ур-ние CH

4) Найдем координаты т. М - середины стороны BC

$x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{5+2}{2} = 3{,}5$; $y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{3+4}{2} = 3{,}5$

$M(3{,}5;\ 3{,}5)$

Ур-ние AM

$\dfrac{x+1}{3{,}5+1} = \dfrac{y-0}{3{,}5-0} \Rightarrow \dfrac{x+1}{4{,}5} = \dfrac{y}{3{,}5} \Rightarrow y = \frac{7}{9}x + \frac{7}{9}$ - ур-ние AM

5) Найдем т. N пересечения AM и CH

$\begin{cases} y = -2x + 8 \\ y = \frac{7}{9}x + \frac{7}{9} \end{cases} \Rightarrow -2x + 8 = \frac{7}{9}x + \frac{7}{9} \Rightarrow \begin{cases} x = 2{,}6 \\ y = 2{,}8 \end{cases}$

$N(2{,}6;\ 2{,}8)$

6) Ур-ние прямой $\parallel AB$

$k = k_{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + b$

Подставляем координаты т. С

$4 = 1 + b \Rightarrow b = 3$; $y = \frac{1}{2}x + 3$

Задача 67

Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Вычислить: 1) объем пирамиды;

2) длину ребра AB;

3) площадь грани ABC;

4) угол между ребрами AB и AD.

Координаты вершин пирамиды для соответствующих номеров задач следующие:

Задача 67 $A(3,2,4)$ $B(2,4,3)$ $C(4,3,-2)$ $D(-4,-2,-3)$ решение

Находим векторы $\overline{AB}(-1,2,-1)$ $\overline{AC}(1,1,-6)$ $\overline{AD}(-7,-4,-7)$

1) объем $V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}-1&2&-1\\1&1&-6\\-7&-4&-7\end{vmatrix}\right|=\frac{126}{6}=21$

2) Длина $\overline{AB}=|\overline{AB}|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}=2,449$

3) Площадь грани ABC – $S=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}i&j&k\\-1&2&-1\\1&1&-6\end{vmatrix}\right|=$

$=\frac{1}{2}|-11i-7j-3k|=\frac{1}{2}\sqrt{11^2+7^2+3^2}=\frac{1}{2}\sqrt{179}=6,69$

4) Угол между $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ $\cos\gamma=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{|AB||AD|}=\frac{(-1)(-7)+2(-4)+(-1)(-7)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{114}}=0,229$

$\gamma=\arccos(0,229)=76,7^\circ$

Задача 114

Найти пределы (не применяя правило Лопиталя):

114 а) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+5x+6}{3x^2-x-14}=\left|\begin{matrix}x^2+5x+6=0 & 3x^2-x-14=0\\ x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2} & x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+168}}{6}\\ x_1=-3;\ x_2=-2 & x_1=-2;\ x_2=\frac{7}{3}\end{matrix}\right|=$

$=\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x+3)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(3x-7)}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x+3}{3x-7}=\frac{-2+3}{-6-7}=-\frac{1}{13}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-x^5-4x^4}{7x^5+3x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^5}-1-\frac{4}{x}}{7+\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^5}}=-\frac{1}{7}$

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\cdot tg4x}{\sin^2 6x}=\left|\begin{matrix}\text{т.к при } x\to0\\ \sin x\sim x \text{ и } tg x\sim x, \text{ то}\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\cdot4x}{(6x)^2}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-5}\right)^{7x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-5+2}{2x-5}\right)^{7x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-5}\right)^{\frac{2x-5}{2}\cdot\frac{2(7x-3)}{2x-5}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{2(7x-3)}{2x-5}}=e^7$

Задача 144

Найти производные первого порядка данных функций, используя правила вычисления производных:

Задача 144

а) $y = \sqrt{x^3} + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^5} - 5x^3$

$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{20}{x^6} - 15x^2$

б) $y = \ln x \cdot (2 - \cos^2 x)$

$y'_x = \frac{2-\cos^2 x}{x} + 2\cos x \cdot \sin x \cdot \ln x = \frac{2-\cos^2 x}{x} + 2\sin 2x \ln x$

в) $y = \frac{4\ln x}{1-\ln x}$

$y' = \frac{\frac{4}{x}(1-\ln x) + \frac{1}{x}\cdot 4\ln x}{(1-\ln x)^2} = \frac{4(1-\ln x+\ln x)}{x(1-\ln x)^2} =$

$= \frac{4}{x(1-\ln x)^2}$

г) $\begin{cases} x = \frac{1}{\sin^2(2-t)} \\ y = \operatorname{tg}(2-t) \end{cases}$ $\quad x'_t = \frac{-2\sin(2-t)\cdot\cos(2-t)(-1)}{\sin^4(2-t)} = \frac{2\cos(2-t)}{\sin^3(2-t)}$

$y'_t = -\frac{1}{\cos^2(2-t)}$

$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{1}{\cos^2(2-t)}\cdot\frac{\sin^3(2-t)}{2\cos(2-t)} = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}^3(2-t)$

д) $x \arccos\frac{x}{y} = x^y$

$\arccos\frac{x}{y} + x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\cdot\frac{y-xy'}{y^2} = e^{y\cdot\ln x}\cdot\left(y'\cdot\ln x + \frac{y}{x}\right)$

$y'\cdot\left(e^{y\cdot\ln x}\cdot\ln x + \frac{x^2}{y\sqrt{y^2-x^2}}\right) = -\frac{y}{x}\cdot e^{y\cdot\ln x} + \arccos\frac{x}{y} + \frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}$

$y' = \frac{\arccos\frac{x}{y} + \frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}} - \frac{y}{x}\cdot x^y}{x^y\cdot\ln x + \frac{x^2}{y\sqrt{y^2-x^2}}}$

Задача 166

Построить график функции $y = f(x)$, используя общую схему исследования. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

Задача 166

$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$

1) $f(x)$ определена на всей оси x

2) $f(x)$ не имеет четности, нечетности и периодичности.

3) $y = 0$ при $x = -0,355$ (один действительный корень)

$x = 0$ $y = 4$ $y > 0$ при $x > -0,355$

4) асимптот нет $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

5) Экстремум $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$ $x_1 = 1$ $x_2 = 3$.

$f''(x) = 6x - 12$ $x_3 = 2$.

x	$-\infty;1$	1	1;2	2	2;3	3	$3;+\infty$
y	↗	8	↘	6	↘	4	↗
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+

имеем Максимум $M(1;8)$ минимум $m(3;4)$ и точку перегиба $N(2;6)$ Строим график.