Казанский государственный аграрный университет

Кафедра: общеинженерные дисциплины

Контрольная работа по теоретической механике

(тема: статика и кинематика)

Казань

2020

Вариант
ЗАДАНИЕ С1

Постановка задачи. Дана (AB = BC = 2a, BD = DE = 3a), находятся в равновесии по действием сил $\overline{F}$, $\overline{Q}$, пары сил с моментом M и распределенной силы интенсивности $\overline{q}$. Балка удерживается в заданном на рисунке положении двумя опорами: неподвижной шарнирной опорой и подвижной шарнирной опорой с ползунком. Определить реакции опор.
F = 160 H; β = 60°; Q = 180 H; γ = 30°; q = 80 Н/м; α = 30°; M = 250 Н·м; a = 0,4 м.

Решение:

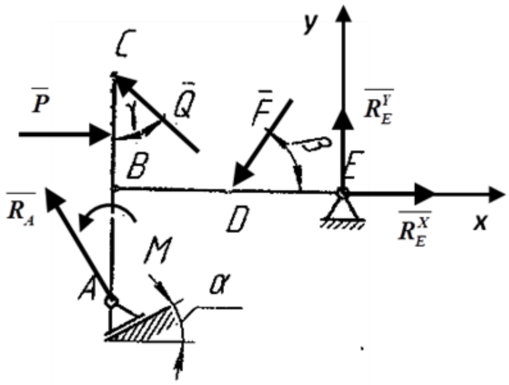

Рисунок 1.

1. Рассмотрим равновесии T – образной балки ABCDE. Все заданные силы показаны на рис. 1. Распределенную силу заменим сосредоточенной силой $\overline{P}$, приложенной к середине отрезка BC. Модуль силы P равен: $P = q \cdot BC = q \cdot 2a = 80 \cdot 2 \cdot 0,4 = 64$ Н.
2. Связи рассматриваемой балки: в точке E – неподвижная шарнирная опора, заменяем ее двумя составляющими $\overline{R_E^X}$; $\overline{R_E^Y}$; в точке A – подвижная шарнирная опора, реакция связи: $\overline{R_A}$.
3. Составим уравнения равновесия.

$$\sum m_E\left(\overline{F_k}\right) = 0: \ F\sin\beta \cdot DE + Q\sin\gamma \cdot BC - Q\cos\gamma \cdot BE - P \cdot \frac{BC}{2} + M - R_A \sin\alpha \cdot AB - R_A\cos\alpha \cdot BE = 0$$

$$\sum F_{kx} = 0: \ R_E^X - F\cos\beta - Q\sin\gamma + P - R_A\sin\alpha = 0$$

$$\sum F_{ky} = 0: \ R_E^Y - F\sin\beta + Q\cos\gamma + R_A\cos\alpha = 0$$

4. Решим совместно полученные уравнения:

$$\begin{cases} F\sin\beta \cdot 3a + Q\sin\gamma \cdot 2a - Q\cos\gamma \cdot 6a - P \cdot a + M - R_A\sin\alpha \cdot 2a - R_A\cos\alpha \cdot 6a = 0 \\ R_E^X - F\cos\beta - Q\sin\gamma + P - R_A\sin\alpha = 0 \\ R_E^Y - F\sin\beta + Q\cos\gamma + R_A\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

Отсюда:

$$\begin{cases} R_A = \dfrac{1}{\sin\alpha + 3\cos\alpha} \cdot \left[\dfrac{3}{2}F\sin\beta + Q\sin\gamma - 3Q\cos\gamma - \dfrac{P}{2} + \dfrac{M}{2a}\right] \\ R_E^X = F\cos\beta + Q\sin\gamma - P + \dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha + 3\cos\alpha} \cdot \left[\dfrac{3}{2}F\sin\beta + Q\sin\gamma - 3Q\cos\gamma - \dfrac{P}{2} + \dfrac{M}{2a}\right] \\ R_E^Y = F\sin\beta - Q\cos\gamma - \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha + 3\cos\alpha} \cdot \left[\dfrac{3}{2}F\sin\beta + Q\sin\gamma - 3Q\cos\gamma - \dfrac{P}{2} + \dfrac{M}{2a}\right] \end{cases}$$

Окончательно:

$R_A = -37,06$ Н; $R_E^X = 18,80$ Н; $R_E^Y = -17,10$ Н.

Знаки минус у R_A, R_E^Y указывают на то, что действительные направления реакций $\overline{R_A}$, $\overline{R_E^Y}$ противоположны показанным на рис.1.

5. Для проверки результатов расчета, составим сумму моментов сил относительно точки B, она должна равняться нулю.

$$\sum m_B\left(\overline{F_k}\right) = R_E^Y \cdot BE - F\sin\beta \cdot BD + Q\cdot\sin\gamma\cdot BC - P\cdot\frac{BC}{2} - R_A\sin\alpha\cdot AB + M \approx 0$$

Ответ: $R_A = -37,06$ Н; $R_E^X = 18,80$ Н; $R_E^Y = -17,10$ Н.

ЗАДАНИЕ С2

Постановка задачи. Дана система тел, состоящая из двух балок, соединенным между собой шарниром С. Она находится в равновесии по действием плоской произвольной системы сил. Определить реакции опор в точках А и В, а так же шарнира С.

F = 1500 Н; Q = 1000 Н; $\beta = 45^o$; $\gamma = 60^o$; M = 2000 Н·м; q = 400 Н/м; a = 0,5 м.

Решение:

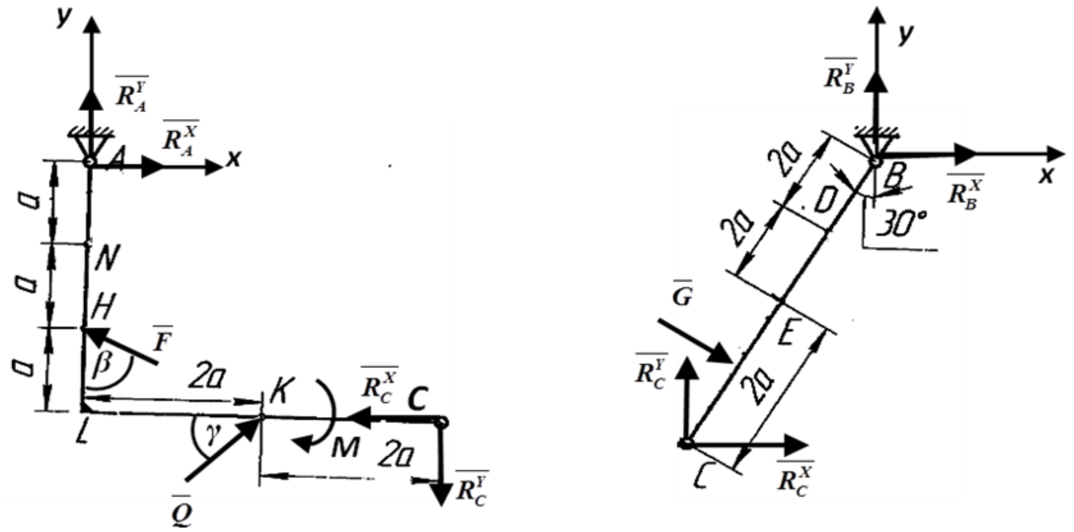

Рисунок 2.

1. Устанавливаем число неизвестных: $\overline{R_A^X}$; $\overline{R_A^Y}$; $\overline{R_B^X}$; $\overline{R_B^Y}$; $\overline{R_C^X}$; $\overline{R_C^Y}$. Всего шесть неизвестных. Составим 6 уравнений для нахождения неизвестных.
2. Разбиваем систему на отдельные тела по соединительному шарниру С: балка ВС и ломаный стержень ALC. Прикладываем к каждой балке действующие на нее силы.
3. Рассмотрим равновесие балки ВС.

   Действие распределенной силы $\overline{q}$ заменим сосредоточенной силой $\overline{G}$ приложенной к середине отрезка CE, перпендикулярно к последней: G = q·CE = q·2a = 100 Н.

   Составим уравнения равновесия:

$$\sum m_B\left(\overline{F_k}\right) = 0:\ -G\cdot 5a - R_C^X\cos 30\cdot 6a + R_C^Y\sin 30\cdot 6a = 0$$
$$\sum F_{kx} = 0:\ R_B^X + G\cos 30 + R_C^X = 0$$
$$\sum F_{ky} = 0:\ R_B^Y - G\sin 30 + R_C^Y = 0$$

4. Рассмотрим равновесие балки ALC. Составим уравнения равновесия.

$$\sum m_A\left(\overline{F_k}\right) = 0:\ F\sin\beta\cdot 2a - Q\sin\gamma\cdot 2a - Q\cos\gamma\cdot 3a + M + R_C^X\cdot 3a + R_C^Y\cdot 4a = 0$$
$$\sum F_{kx} = 0:\ R_A^X - F\sin\beta + Q\cos\gamma - R_C^X = 0$$
$$\sum F_{ky} = 0:\ R_A^Y + F\cos\beta + Q\sin\gamma - R_C^Y = 0$$

5. Решаем все 6 полученных уравнений совместно. Получаем:

$$R_C^Y = -\frac{1}{2}F\sin\beta + \frac{1}{2}Q\sin\gamma + \frac{3}{4}Q\cos\gamma - \frac{M}{4a} - \frac{1}{4\sqrt{3}+3}\cdot\left[-5G - \frac{3}{2}F\sin\beta + \frac{3}{2}Q\sin\gamma + \frac{9}{4}Q\cos\gamma - \frac{3M}{4a}\right]$$

$$R_C^X = \frac{4}{12\sqrt{3}+9}\cdot\left[-5G - \frac{3}{2}F\sin\beta + \frac{3}{2}Q\sin\gamma + \frac{9}{4}Q\cos\gamma - \frac{3M}{4a}\right]$$

$$R_A^X = F\sin\beta - Q\cos\gamma + R_C^X$$

$$R_A^Y = -F\cos\beta - Q\sin\gamma + R_C^Y$$

$$R_B^X = -G\cos 30 - R_C^X$$

$$R_B^Y = \frac{1}{2}G - R_C^Y$$

Подставляя значения, находим: $R_C^Y = -1540,44$ Н, $R_C^X = -479,78$ Н, $R_A^X = 154,80$ Н, $R_A^Y = -22,54$ Н, $R_B^X = 1038,12$ Н, $R_B^Y = 822,54$ Н.

<u>*Ответ:*</u> $R_C^Y = -1540,44$ Н, $R_C^X = -479,78$ Н, $R_A^X = 154,80$ Н, $R_A^Y = -22,54$ Н, $R_B^X = 1038,12$ Н, $R_B^Y = 822,54$ Н.

ЗАДАНИЕ К1

Постановка задачи: Движение точки М заданно координатным способом. Определить уравнение траектории точки в координатной форме, направление движение точки, а так же в момент времени t_1 = 2 с – положение, скорость, ускорение и радиус кривизны траектории.

$x = 4\sin\frac{\pi}{6}t$; $y = 6\cos\frac{\pi}{3}t$.

Решение:

Исключим время t из уравнения движения и получим уравнение траектории движения точки:

$$y = 6\cos\frac{\pi}{3}t = 6 - 12\sin^2\frac{\pi}{6}t = 6 - \frac{3}{4}x^2.$$

$$y = 6 - \frac{3}{4}x^2$$

Траекторией точки является парабола.

Подставляя в уравнение $t = t_1$, получим координаты точки x, y в данный момент времени:

$x = 4\sin\frac{\pi}{3} = 3,464$ м; $y = 6\cos\frac{2\pi}{3} = -3$ м.

Найдем проекции скорости точки на оси координат *Ox* и *Oy*:

$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{6}t$; $V_y = \frac{dy}{dt} = -2\pi\sin\frac{\pi}{3}t$.

Найдем проекции вектора ускорения точки на оси *Ox* и *Oy*:

$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{9}\pi^2\sin\frac{\pi}{6}t$; $a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2}{3}\pi^2\cos\frac{\pi}{3}t$.

Найдем проекции скорости и ускорения вычисляем при $t = t_1$:

$V_x = \frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{3} = 1,047$ м/с; $V_y = -2\pi\sin\frac{2\pi}{3} = -5,441$ м/с;

$a_x = -\frac{1}{9}\pi^2\sin\frac{\pi}{3} = -0,950$ м/с^2; $a_y = -\frac{2}{3}\pi^2\cos\frac{2\pi}{3} = 3,290$ м/с^2.

Модули скорости и ускорения вычисляем по формулам:

$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{1,047^2 + 5,441^2} = 5,541$ м/с.

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0,950^2 + 3,290^2} = 3,424$ м/с^2.

Касательное ускорение a_τ находим путем дифференцирования модуля скорости:

$$a_\tau = \left|\frac{dV}{dt}\right| = \left|\frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}\right| = \left|\frac{-1,047\cdot 0,950 - 5,441\cdot 3,290}{5,541}\right| = |-3,410| = 3,410 \text{ м/с}^2.$$

Так как $\frac{dV}{dt} < 0$, значит $\overline{a_\tau}$ направленно в противоположном направлении от $\overline{V}$.

Нормальное ускорение точки для $t = t_1$ вычислим по формуле:

$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{3,424^2 - 3,410^2} = 0,309$ м/с^2.

Радиус кривизны траектории в той точке, где $t = t_1$ находится точка М, вычисляем по формуле:

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{5,541^2}{0,309} = 99,36 \text{ м.}$$

Изобразим траекторию и покажем на ней положение точки М в заданный момент времени:

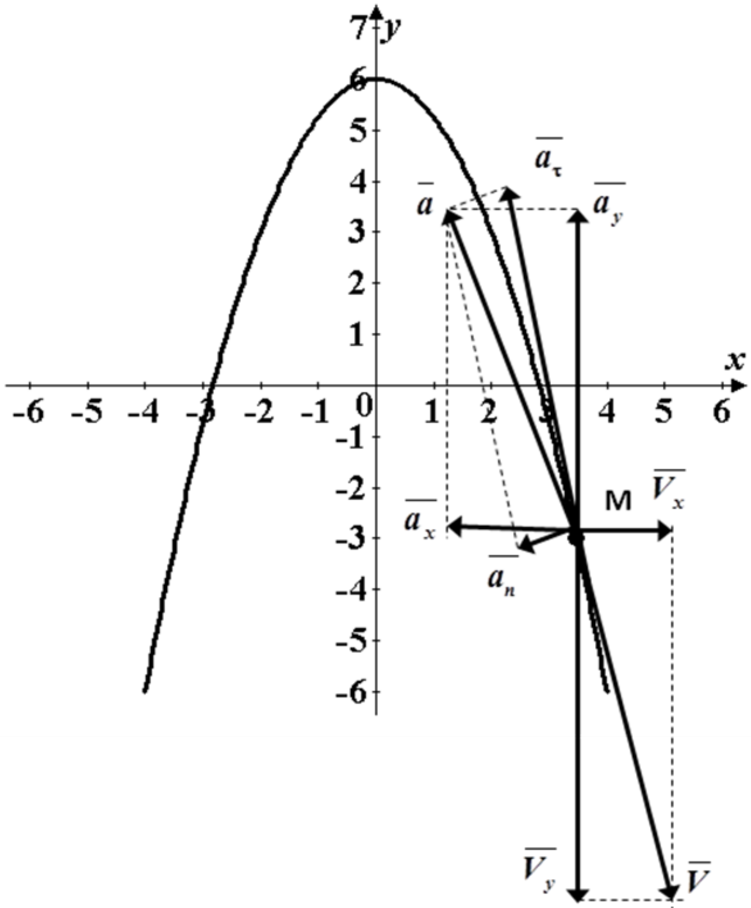

Рисунок 3.

ЗАДАНИЕ К2

Постановка задачи: Дан четырехзвенный шарнирно – рычажный механизм $OABO_1$, состоящий из трех подвижных звеньев OA (звено 2), AB (звено 2), BO_1 (звено 3) и одного неподвижного (звено 4). В движение механизм приводится за счет вращения с постоянной скоростью ω_1 звена 1. Звено 3 также совершает вращательное движение, звено 2 – плоскопараллельное. По звену 2 или 3 движется ползушка 5 с постоянной скоростью $\overline{V_r}$. Для положения механизма и ползушки, указанного на рис.4, определить абсолютные скорость и ускорение точки M ползушки, а так же угловые скорости ω_2 и ω_3 и угловые ускорения ε_2 и ε_3, звеньев 2 и 3.

$\omega_1 = 25$ рад/с; $\alpha = 30^o$; $\beta = 60^o$; $\gamma = 60^o$; BM = 0,3 м; OA = 0,5 м; AB = 1,2 м; BO_1 = 1,0 м; V_r = 25 м/с.

Решение:

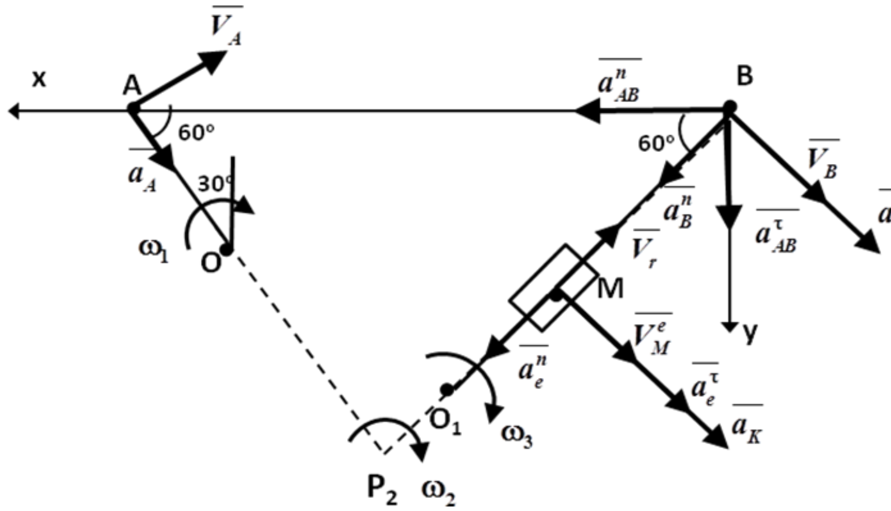

Рисунок 4.

1. Определим скорость точки A.
   $V_A = \omega_1 \cdot OA = 25 \cdot 0,5 = 12,5$ м/с.
   Направлен вектор скорости $\overline{V_A}$ перпендикулярно OA в сторону угловой скорости ω_1.
2. Найдем скорость точки B с использованием теоремы о проекциях скоростей, учитывая, что вектор скорости должен быть перпендикулярен BO_1.
   $V_A \cos 30 = V_B \cos 30$
   $V_B = V_A = 12,5\ м/с$
3. Угловую скорость звена 2 найдем через мгновенный центр P_2 скоростей этого звена.
   $\omega_2 = \dfrac{V_A}{AP_2}$.
   Расстояние AP_2 найдем из равностороннего $\Delta\ BAP_2$:
   $AP_2 = BP_2 = AB = 1,2$ м.
   Получаем $\omega_2 = \dfrac{V_A}{AP_2} = \dfrac{12,5}{1,2} = 10,417$ рад/с.
4. Определим угловую скорость звена 3.
   $\omega_3 = \dfrac{V_B}{BO_1} = \dfrac{12,5}{1,0} = 12,5$ рад/с.

5. Вычислим переносную скорость точки М

$$V_M^e = \frac{V_B \cdot MO_1}{BO_1} = \frac{12,5 \cdot 1,3}{1,0} = 16,25 \text{ м/с.}$$

6. Абсолютная скорость $\overline{V_M}$ равна:

$$V_M = \sqrt{(V_r)^2 + \left(V_M^e\right)^2} = \sqrt{25^2 + 16,25^2} = 29,817 \text{ м/с.}$$

7. Найдем ускорение точки А.
8. $a_A = a_A^n = \omega_1^2 \cdot OA = 25^2 \cdot 0,5 = 312,5$ м/с^2.
9. Касательное и нормальное ускорение точки В: $\overline{a_B^\tau} + \overline{a_B^n} = \overline{a_A} + \overline{a_{AB}^\tau} + \overline{a_{AB}^n}$.

в проекции на ось Ох: $a_B^n \cos 60 - a_B^\tau \cos 30 = -a_A \cos 60 + a_{AB}^\tau$,

в проекции на ось Оу: $a_B^n \sin 60 + a_B^\tau \sin 30 = a_A \sin 60 + a_{AB}^n$.

где $a_B^n = \omega_3^2 \cdot BO_1 = 30^2 \cdot 0,8 = 720$ м/с^2.

$a_{AB}^n = \omega_2^2 \cdot AB = 20,80^2 \cdot 1,0 = 432,64$ м/с^2.

Получаем:

$$a_B^\tau = \frac{a_{AB}^n - a_B^n \sin 60 + a_A \sin 60}{\sin 30} = -376,12 \text{ м/с}^2.$$

$$a_{AB}^\tau = a_B^n \cos 60 - a_B^\tau \cos 30 + a_A \cos 60 = -349,37 \text{ м/с}^2.$$

$$a_B = \sqrt{\left(a_B^\tau\right)^2 + \left(a_B^n\right)^2} = \sqrt{376,12^2 + 79,998^2} = 384,53 \text{ м/с}^2.$$

Касательное и нормальное ускорение точки М:

$$a_e^\tau = a_B^\tau \cdot \frac{MO_1}{BO_1} = 123,67 \cdot \frac{0,4}{0,8} = 61,84 \text{ м/с.}$$

$$a_e^n = a_B^n \cdot \frac{MO_1}{BO_1} = 720 \cdot \frac{0,4}{0,8} = 360 \text{ м/с}^2.$$

10. Найдем модуль кориолисова ускорения точки М.

$a_K = 2 \cdot \omega_2 \cdot V_r \cdot \sin 90 = 2 \cdot 30 \cdot 30 = 1800$ м/с.

Для определения направления ускорения a_K повернем вектор $\overline{V_r}$ на 90° вокруг точки М по угловой скорости ω_2 звена, на котором расположена ползушка.

11. Абсолютное ускорение точки М равно: $\overline{a_M} = \overline{a_e^n} + \overline{a_e^\tau} + \overline{a_r} + \overline{a_K}$. Т.к. $a_r = 0$, то

$$a_M = \sqrt{\left(a_e^\tau + a_K\right)^2 + \left(a_e^n\right)^2} = \sqrt{(61,81 + 1800)^2 + 360^2} = 1856,97 \text{ м/с.}$$

12. Угловое ускорение звена 2 равно:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{AB}^\tau}{AB} = \frac{-56,92}{1,2} = -47,43 \text{ рад/с}^2.$$

13. Угловое ускорение звена 3 равно:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_B^\tau}{BO_1} = \frac{123,67}{1,0} = 123,67 \text{ рад/с}^2.$$