Вариант 0.

110. Точка движется по окружности радиусом $R = 30$ см с постоянным угловым ускорением ε. Определить тангенциальное ускорение a_τ точки, если известно, что за время $t = 4$с она совершила три оборота и в конце третьего оборота её нормальное ускорение $a_n = 2{,}7$ м/с^2.

Дано:

$R = 30$ см

$t = 4$с

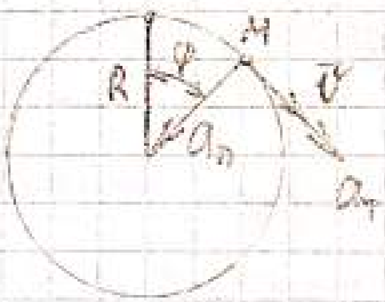
$a_n = 2{,}7$ м/с^2

$N = 3$

---

a_τ - ?

Решение:



За время t точка приобретет скорость $v = a_\tau \cdot t + v_0$ и пройдет путь $S = v_0 \cdot t + \dfrac{a_\tau \cdot t^2}{2}$

Нормальное ускорение точки $a_n = \dfrac{v^2}{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow v = \sqrt{a_n \cdot R}$, подставляя в формулу получаем $a_\tau \cdot t + v_0 = \sqrt{a_n \cdot R} \Rightarrow v_0 = \sqrt{a_n R} - a_\tau t$.

Тогда пройденный путь будет

$$s = \left(\sqrt{a_n R} - a_\tau t\right) t + \frac{a_\tau t^2}{2} = \sqrt{a_n R}\cdot t - a_\tau t^2 + \frac{a_\tau t^2}{2} = \sqrt{a_n R}\cdot t - \frac{a_\tau t^2}{2}$$

По условию $s = N \cdot C = N \cdot 2\pi R = 3 \cdot 2\pi R = 6\pi R$.

Отсюда: $6\pi R = \sqrt{a_n R}\cdot t - \frac{a_\tau t^2}{2}$, следовательно тангенциальное ускорение будет равно:

$$a_\tau = \frac{2}{t^2}\left(\sqrt{a_n R}\cdot t - 6\pi R\right).$$

$$a_\tau = \frac{2}{(4)^2}\left(\sqrt{2{,}7\cdot 0{,}3}\cdot 4 - 6\cdot 3{,}14\cdot 0{,}3\right) = -0{,}26\ м/с^2$$

Ответ: $-0{,}26\ м/с^2$

120. Лодка длиной $l = 3$ м и массой $m = 120$ кг стоит на спокойной воде. На носу и корме находятся два рыбака массами $m_1 = 60$ кг и $m_2 = 90$ кг. На сколько сдвинется лодка относительно воды, если рыбаки поменяются местами?

Дано:

$L = 3$ м

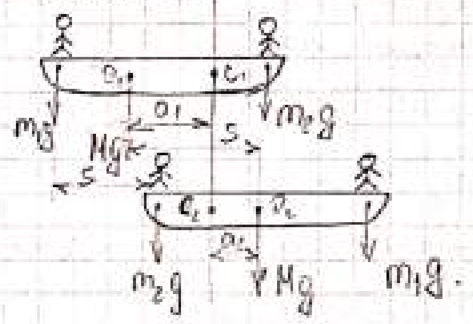
$M = 120$ кг

$m_1 = 60$ кг

$m_2 = 90$ кг

$S = ?$

Решение:



Центр масс системы люди-лодка находится на вертикали, проходящей в начальный момент через точку C_1 лодки, а после перемещения лодки - через другую ее точку C_2. Так как эта вертикаль неподвижна относительно берега (можно считать), то искомое перемещение S лодки относительно берега равно перемещению лодки относительно вертикали. А это последнее легко определить по перемещению центра масс O лодки.

В начальный момент точка О находится на расстоянии a_1 слева от вертикали, а после перехода людей — на расстоянии a_2 справа от вертикали. Следовательно, искомое перемещение лодки $S = a_1 + a_2$.

Для определения a_1 и a_2 воспользуемся тем, что результирующий момент сил, действующих на систему относительно горизонтальной оси, перпендикулярной продольной оси лодки, равен нулю. Поэтому для начального положения системы $Mga_1 + m_1g(L-l+a_1) = m_2g(l-a_1)$, откуда $a_1 = \frac{m_2 - m_1(L-l)}{M+m_1+m_2}$. После перемещения лодки $Mga_2 + m_1g(a_2+l) = m_2g(L-a_2-l)$, откуда $a_2 = \frac{m_2(L-l) - m_1}{M+m_1+m_2}$. Подставив полученные значения a_1 и a_2 в $S = a_1 + a_2$ найдем:

$$S = \frac{m_2 - m_1(L-l)}{M+m_1+m_2} + \frac{m_2(L-l) - m_1}{M+m_1+m_2} = \frac{(m_2 - m_1)L}{M+m_1+m_2},$$

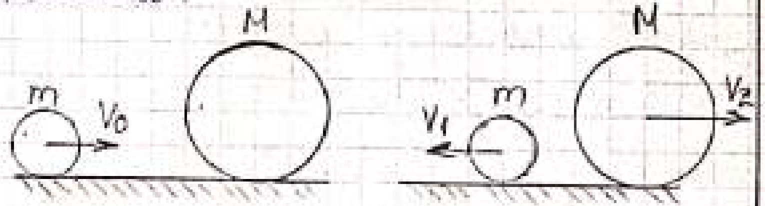
$$S = \frac{(90кг - 60)\cdot 3м}{120кг + 60кг + 9кг} = 0{,}33 м.$$

Ответ: 0,33 м.

130. Шар массой $m_1 = 2$ кг сталкивается с покоящимся шаром большей массы и при этом теряет 40% кинетической энергии. Определить массу m_2 большего шара. Удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным.

Дано:
$m = 2$ кг
$k = 0{,}4$
$M = ?$

Решение:



Из закона сохранения импульса находим:
$mV_0 = -mV_1 + MV_2$

Из закона сохранения энергии получаем:
$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV_1^2}{2} + \frac{MV_2^2}{2}$. Из этого уравнения сразу находим потерю кинетической энергии первого шара: $\frac{mV_0^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = \frac{MV_2^2}{2}$

Нам известно, что малый шар потерял 40% своей кинетической энергии, поэтому

$\frac{mV_0^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = k\cdot\frac{mV_0^2}{2}$, и тогда $\frac{mV_1^2}{2} = (1-k)\frac{mV_0^2}{2}$

Поэтому $V_1 = \sqrt{(1-k)}\cdot V_0$

С другой стороны мы получим, что

$\frac{mV_0^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = \frac{MV_2^2}{2}$, поэтому

$k = \frac{mV_0^2}{2} = \frac{M \cdot V_2^2}{2}$, и тогда скорость второго шара равна $V_2 = \sqrt{\frac{mk}{M}} \cdot V_0$

Подставляем полученные V_1 и V_2 в уравнение закона сохранения импульса:

$mV_0 = -m\sqrt{(1-k)} \cdot V_0 + M\sqrt{\frac{mk}{M}} \cdot V_0$, Делим обе части на V_0 и упрощаем:

$m = -m\sqrt{(1-k)} + \sqrt{Mmk}$. Из этого уравнения находим искомую массу $M = \frac{m(1+\sqrt{(1-k)})^2}{k}$

Подставляем числа (переводя предварительно все величины в систему СИ).

$M = \frac{2кг(1+\sqrt{(1-0{,}4)})^2}{0{,}4} = 15{,}7 кг$

Ответ: 15,7 кг.

140 Какая работа A должна быть совершена при поднятии с земли материалов для постройки цилиндрической дымоходной трубы высотой $h = 40 м$, наружным диаметром $D = 3{,}0 м$ и внутренним диаметром $d = 2{,}0 м$. Плотность материала ρ принять равной $2{,}8 \cdot 10^3 кг/м^3$.

Дано:

$H = 40 м$

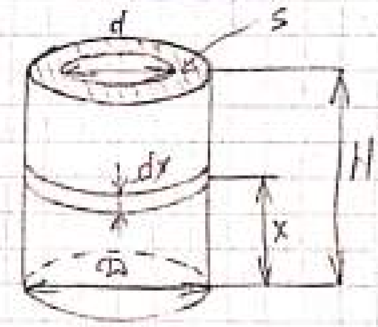
$D = 3{,}0 м$

$d = 2{,}0 м$

$\rho = 2{,}8 \cdot 10^3 кг/м^3$

$A = ?$

Решение:



Найдем потенциальную энергию тонкого слоя dx, находящегося на высоте x. Для этого нам нужно узнать массу этого слоя. Она равна $dm = \rho \times dV$, где ρ - плотность материала, $dV = S \cdot dx$ - объем этого слоя.

Тогда $dm = \rho \cdot S\, dx$. Откуда потенциальная энергия равна $dW = dm \cdot g \cdot x = \rho \cdot S \cdot dx \cdot g \cdot x =$

$= \rho \cdot S \cdot g \cdot x \cdot dx$.

Проинтегрируем правую и левую части:

$$\Delta W = \int dW = \int_0^H \rho \cdot S \cdot g \cdot x \cdot dx = \frac{\rho \cdot S \cdot g \cdot H^2}{2}$$

Площадь кольца равна $S = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi(D^2-d^2)}{4}$. Поэтому потенциальная энергия установки, равная совершенной работе:

$$A = \Delta W = \frac{\rho \cdot \pi (D^2 - d^2) \cdot g \cdot H^2}{8}.$$

Подставляем числа (переводя одновременно все величины в систему СИ).

$$A = \frac{2{,}8 \cdot 10^3 \cdot 3{,}14 \cdot (3^2 - 2^2) \cdot 9{,}81 \cdot 40^2}{8} = 8{,}6 \cdot 10^7 \text{ Дж} =$$

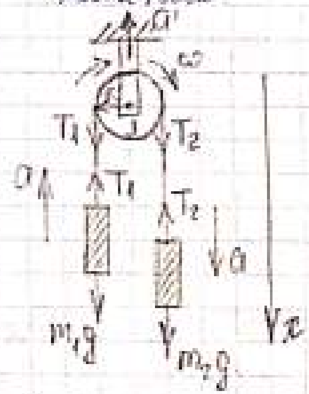
$= 86$ МДж

Ответ: 86 МДж.

150. К концам лёгкой и нерастяжимой нити, перекинутой через блок, подвешены грузы массами $m_1 = 0{,}2$ кг и $m_2 = 0{,}3$ кг. Во сколько раз отличаются силы, действующие на нить по обе стороны от блока, если масса блока $m = 0{,}4$ кг, а его ось движется вертикально вверх с ускорением $a = 2$ м/с²? Силами трения и проскальзывания нити по блоку пренебречь.

Дано:
$m_1 = 0{,}2$ кг
$m_2 = 0{,}3$ кг
$m = 0{,}4$ кг
$a = 2$ м/с²
$\frac{T_2}{T_1}$ — ?

Решение



Веса первой и второй гири равны $P_1 = m_1 g$ и $P_2 = m_2 g$ соответственно. Ввиду того, что масса нити пренебрежимо мала, изменением натяжений T_1 и T_2 вдоль нити можно не учитывать. Используем второй закон Ньютона и, одновременно проецируем силы на ось x. Тогда уравнения движения грузов и блока будут:

$$-m_1(a + a') = -T_1 + m_1 g \quad (1)$$

$m_2(a-a') = -T_2 + m_2 g$ (2)

$J\frac{d\omega}{dt} = R\cdot(T_2-T_1)$ (3), где J - момент инерции блока. Известно, что для однородного диска массой m и радиусом R момент инерции равен: $J = \frac{mR^2}{2}$.

Если проскальзывания нити по блоку нет, то $R\frac{d\omega}{dt} = a$, где a - ускорение грузов, $\frac{d\omega}{dt}$ - угловое ускорение блока. Тогда $\frac{J\cdot a}{R^2} = (T_2-T_1)$.

Из (1) и (2) уравнений находим:

$(m_1+m_2)a-(m_2-m_1)\cdot a' = -(T_2-T_1)+(m_2-m_1)\cdot g$.

Подставляем $(T_2-T_1) = \frac{J\cdot a}{R^2}$ и получаем

$(m_1+m_2)a+\frac{J\cdot a}{R^2} = (m_2-m_1)(g+a')$, откуда ускорение равно:

$$a = \frac{(m_2-m_1)(g+a')}{(m_1+m_2)+\frac{J}{R^2}} = \frac{(m_2-m_1)(g+a')}{(m_1+m_2)+\frac{mR^2}{2R^2}} = \frac{(m_2-m_1)(g+a')}{(m_1+m_2)+\frac{m}{2}}.$$

Подставляем ускорение в (1) и находим T_1:

$$T_1 = m_1(g+a+a') = m_1\left[g+a'+\frac{(m_2-m_1)(g+a')}{(m_1+m_2)+\frac{m}{2}}\right] =$$

$$= m_1(g+a')\left[\frac{(4m_2+m)}{2(m_1+m_2)+m}\right];$$

Подставляем ускорение в (2) и находим T_2:

$$T_2 = m_2(g+a'-a) = m_2\left[g+a'-\frac{(m_2-m)(g+a')}{(m_1+m_2)+\frac{m}{2}}\right] =$$

$$= m_2(g+a')\left[\frac{(4m_1+m)}{2(m_1+m_2)+m}\right]$$

Отношение

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{m_2(g+a')\left[\frac{(4m_1+m)}{2(m_1+m_2)+m}\right]}{m_1(g+a')\left[\frac{(4m_2+m)}{2(m_1+m_2)+m}\right]} =$$

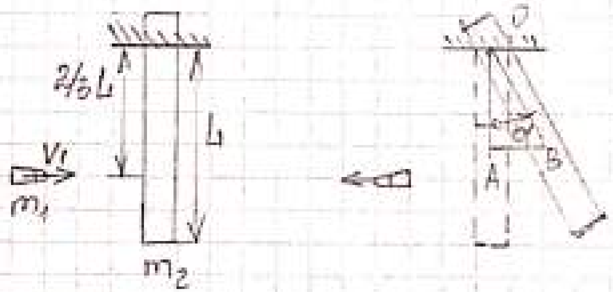
$$= \frac{m_2(4m_1+m)}{m_1(4m_2+m)} = \frac{0{,}3(4\cdot 0{,}2+0{,}4)}{0{,}2\cdot(4\cdot 0{,}3+0{,}4)} = 1{,}125.$$

Ответ: $\frac{T_2}{T_1} = 1{,}125$.

160. Однородный стержень длиной $L = 1{,}0$ м и массой $M = 0{,}7$ кг подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. В точку, отстоящую от оси на $2/3L$, абсолютно упруго ударяет пуля массой $m = 5$ г, летящая перпендикулярно стержню и его оси. После удара стержень отклонился на угол $\alpha = 60°$. Определите скорость пули.

Дано:
$L = 1{,}0$ м
$m_1 = 5$ г
$m_2 = 0{,}7$ кг
$\alpha = 60°$
$V_1 - ?$

Решение:



Момент импульса пули равен $M_1 = m_1 V_1 \frac{2}{3} L$.
После столкновения момент импульса стержня должен быть равен, по закону сохранения, моменту импульса пули: $m_1 V_1 \frac{2}{3} L = L_2 \omega_2$, где ω_2 - угловая скорость стержня после столкновения,

$J_2 = \frac{m_2 L^2}{3}$ - момент импульса стержня относительно его края. Откуда $\omega_2 = \frac{2 m_1 V_1}{m_2 L}$.
Тогда начальная кинетическая энергия стержня равна
$E_2 = \frac{J_2 (\omega_2)^2}{2} = \frac{2 (m_1)^2 (V_1)^2}{3 m_2}$
Через время кинетическая энергия перешла в изменение потенциальной энергии по закону сохранения энергии:
$E_2 = \Delta E_p$. Начальная потенциальная энергия стержня (относительно точки подвеса) равна $E_{p1} = -\frac{2}{3} m_2 g L$, где L - длина нити, g - ускорение свободного падения. После того как он поднялся на угол α, величина OA (из треугольника) стала равна $OA = \frac{2}{3} L \cos\alpha$. Поэтому потенциальная энергия
$E_{p2} = -\frac{2}{3} m_2 g L \cos\alpha$. Тогда разность потенциальных энергий
$E_{p2} - E_{p1} = -\frac{2}{3} m_2 g L \cos\alpha + \frac{2}{3} m_2 g L = \frac{2}{3} m_2 g L (1 - \cos\alpha)$, откуда
$E_2 = \Delta E_p = \frac{2}{3} m_2 g L (1 - \cos\alpha)$. Или же
$\frac{2 (m_1)^2 (V_1)^2}{3 m_2} = \frac{2}{3} m_2 g L (1 - \cos\alpha)$. Откуда искомое

$V_1 = \frac{m_2}{m_1} \sqrt{g L (1 - \cos\alpha)} = \frac{0{,}7\text{ кг}}{0{,}005\text{ кг}} \cdot \sqrt{9{,}81\text{ м/с}^2 \cdot 1\text{ м} \cdot (1 - \cos 60°)} =$
$= 310$ м/с.

Ответ: $V_1 = 310$ м/с.

170. Во сколько раз средняя плотность земного вещества отличается от средней плотности лунного? Принять, что радиус $R_З$ Земли в 3,9 раз больше радиуса $R_Л$ Луны и вес тела на Луне в 6 раз меньше веса тела на Земле.

Дано:

$\frac{P_З}{P_Л} = 6$

$\frac{R_З}{R_Л} = 3{,}9$

$\frac{\rho_З}{\rho_Л}$ — ?

Решение:

Сила всемирного тяготения, действующая на тело массой m на расстоянии R от Земли, равна $F = \gamma \frac{m M_З}{R^2}$, где $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$ — гравитационная постоянная, $M_З$ — масса Земли. Вес тела на поверхности Земли равен $P_З = \gamma \frac{m M_З}{R_З^2}$. Вес тела на поверхности Луны равен $P_Л = \gamma \frac{m M_Л}{R_Л^2}$. Разделим первое на второе и получим $\frac{P_З}{P_Л} = \frac{\gamma}{\gamma} \cdot \frac{m M_З R_Л^2}{m M_Л R_З^2} = \frac{M_З R_Л^2}{M_Л R_З^2}$. Откуда отношение масс равно: $\frac{M_З}{M_Л} = \frac{P_З}{P_Л} \cdot \frac{R_З^2}{R_Л^2}$.

Плотность Земли равна:

$\rho_З = \frac{M_З}{V_З} = \frac{M_З}{\frac{4}{3}\pi R_З^3}$, где $V_З = \frac{4}{3}\pi R_З^3$ — объём Земли.

Плотность Луны равна $\rho_Л = \frac{M_Л}{V_Л} = \frac{M_Л}{\frac{4}{3}\pi R_Л^3}$.

Тогда отношение равно:

$\frac{\rho_З}{\rho_Л} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_Л^3 M_З}{\frac{4}{3}\pi R_З^3 \cdot M_Л} = \frac{R_Л^3 M_З}{R_З^3 M_Л}$.

Подставляем сюда $\frac{M_З}{M_Л} = \frac{P_З}{P_Л} \cdot \frac{R_З^2}{R_Л^2}$ и получаем $\frac{\rho_З}{\rho_Л} = \frac{R_Л^3 \cdot R_З^2}{R_З^3 \cdot R_Л^2} \cdot \frac{P_З}{P_Л} = \frac{R_Л}{R_З} \cdot \frac{P_З}{P_Л}$.

Подставляем числа.

$\frac{\rho_З}{\rho_Л} = \frac{1}{3{,}9} \cdot 6 = 1{,}54$.

Ответ: 1,54 раз.

180. Шарик массы $m = 60$ г колеблется с периодом $T = 2$с. В начальный момент времени смещение шарика $x_0 = 4{,}0$ см и он обладает энергией $E = 0{,}02$ Дж. Записать уравнение простого гармонического колебания шарика и закон изменения возвращающей силы с течением времени.

Дано:	
$m = 60$ г	
$x_0 = 4{,}0$ см	
$T = 2$ с	
$E = 0{,}02$ Дж	

Уравнение гармонических колебаний $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, где x - смещение колеблющейся величины, A - амплитуда колебаний, $\omega t + \varphi_0$ - фаза колебаний, ω - циклическая частота, φ_0 - начальная фаза.

Скорость равна $V = \frac{dx}{dt} = \frac{d(A\sin(\omega t + \varphi_0))}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$. В начальный момент $t = 0$ имеем $x_0 = A\sin(\varphi_0)$ и $V_0 = A\omega\cos(\varphi_0)$. Тогда начальная энергия равна $E = \frac{m(V_0)^2}{2} = \frac{m(A\omega\cos(\varphi_0))^2}{2}$.

Отношение $\frac{(x_0\omega)^2}{E} = \frac{2(A\omega\sin(\varphi_0))^2}{m(A\omega\cos(\varphi_0))^2} = 2\frac{tg^2\varphi_0}{m}$.

Циклическая частота равна по определению $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где T - период. Поэтому $tg(\varphi_0) = \sqrt{\frac{m(x_0 \cdot \frac{2\pi}{T})^2}{2E}}$

Начальная фаза равна $\varphi_0 = arctg\left(\sqrt{\frac{m}{2E}} \cdot \left(x_0 \cdot \frac{2\pi}{T}\right)\right)$.

Подставляем числа:

$\varphi_0 = arctg\left(\sqrt{\frac{0{,}06 \text{ кг}}{2 \cdot 0{,}02 \text{ Дж}}} \cdot \left(0{,}04 \text{ м} \cdot \frac{2\pi}{2 \text{ с}}\right)\right) = 8{,}7°$

Теперь найдем амплитуду. Умножим $x_0 = A\sin(\varphi_0)$ на $\sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}$, возведем все в квадрат и сложим с $E = \frac{m(A\omega\cos(\varphi_0))^2}{2}$. Получим следующее:

$\frac{m(\omega)^2(x_0)^2}{2} + E = \frac{m(A\omega)^2}{2}\sin^2(\varphi_0) + \frac{m(A\omega)^2}{2}\cos^2(\varphi_0)$

Так как $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, то $(x_0)^2 + \frac{2E}{m(\omega)^2} = A^2$

Откуда амплитуда равна:

$A = \sqrt{(x_0)^2 + \frac{2E}{m\omega^2}} = \sqrt{(x_0)^2 + \frac{2E}{m(2\pi/T)^2}}$.

Подставляем числа: $A = \sqrt{(0{,}04)^2 + \frac{2 \cdot 0{,}02}{0{,}06 \text{ кг}\,(2\pi/2c)^2}} = 0{,}26$ м

Поэтому уравнение гармонических колебаний

$x = 0{,}26 \text{ м} \cdot \sin((2\pi/2c)t + 8{,}7°)$.

Ускорение равно $a = \frac{dV}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0)$. Тогда сила равна:

$F = ma = -mA\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) = -0{,}06 \text{ кг} \cdot 0{,}04 \text{ м}\,(2\pi/2c)^2\sin(\omega t + \varphi_0) =$

$= -0{,}024\text{ Н}\sin(\omega t + 8{,}7°)$