

2. Матрицы. Действия с ними

Прямоугольная таблица чисел, расположенных в «m» строках и «n» столбцах называется прямоугольной матрицей размера $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если $m = n$, то матрица называется квадратной.

Пусть даны две квадратные матрицы третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

2.1. Действия с матрицами

2.1.1. Суммой (разностью) двух матриц A и B называется матрица, определяемая равенствами.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} \end{pmatrix}.$$

2.1.2. Произведением числа m на матрицу A называется матрица, определяемая равенством:

$$m \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \\ ma_{31} & ma_{32} & ma_{33} \end{pmatrix}.$$

2.1.3. Произведением AB матрицы A на матрицу B называется матрица, определяемая равенством:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^3 a_{1j}b_{j2} & \sum_{j=1}^3 a_{1j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^3 a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^3 a_{2j}b_{j2} & \sum_{j=1}^3 a_{2j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^3 a_{3j}b_{j1} & \sum_{j=1}^3 a_{3j}b_{j2} & \sum_{j=1}^3 a_{3j}b_{j3} \end{pmatrix},$$

т.е. элемент матрицы-произведения, стоящий в i -той строке и k -том столбце, равен сумме произведений соответственных элементов i -той строки матрицы A и k -того столбца матрицы B .

Замечание: AB не всегда равно BA . Исключение составляет произведение $AE=EA$, E – единичная матрица.

Пример 1. Найти $AB - BA$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 0 & 3 \cdot 4 + 5 \cdot (-2) + 7 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 4 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 21 & 9 \\ 0 & 1 & 10 \\ 8 & 17 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 & 2 \cdot 7 + 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 \\ (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 & (-1) \cdot 5 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 & (-1) \cdot 7 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 15 & 15 \\ 4 & 1 & 10 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 6-23 & 21-15 & 9-15 \\ 0-4 & 1-1 & 10-10 \\ 8-1 & 17+2 & 12+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 6 & -6 \\ -4 & 0 & 0 \\ 7 & 19 & 17 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти $AB - BA$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 3 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 - 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 6-4 & 0-6 & 7-6 \\ 16-1 & 10-7 & 4-3 \\ 13-8 & 5-11 & 7-14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ 15 & 3 & 1 \\ 5 & -6 & -7 \end{pmatrix}.$$